Inversion triangulaire

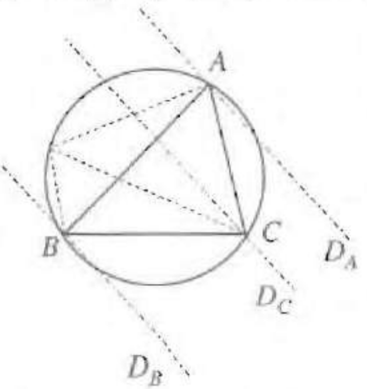
Jean De Biasi
IREM-UFR.MIG
Université Paul Sabatier - Toulouse

Dans tout ce qui suit, P est un plan affine euclidien orienté.

1 - Points inversés par rapport à un triangle

1.1 - Théorème et définition

Soit un triangle ABC, M un point distinct de chacun des sommets, A, B, C et D_A, D_B, D_C les droites respectivement isogonales de (AM), (BM), (CM) par rapport à $\{AB, AC\}$, $\{BC, BA\}$, $\{CA, CB\}$ (rappelons que ceci signifie que les paires de droites $\{AM, D_A\}$ et $\{AB, AC\}$, $\{BM, D_B\}$ et $\{BC, BA\}$, $\{CM, D_C\}$ et $\{CA, CB\}$ ont les mêmes bissectrices).



Supposons, dans un premier cas, que M appartienne au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC, en étant distinct de chacun des sommets A, B, C.

On a, modulo π, les égalités angulaires suivantes :

$$(D_A, AB) = (AC, AM) = (BC, BM) = (D_B, BA)$$

d'où $D_A \parallel D_B$ et de manière analogue avec D_C d'où $D_A \parallel D_B \parallel D_C$.

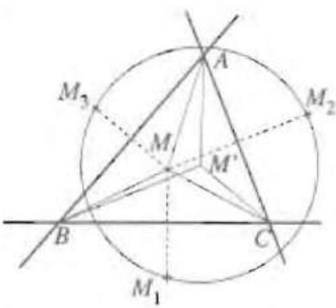
Si M est l'un des sommets du triangle

ABC, par exemple, A, alors $D_B = D_C = (BC)$ et D_A est une droite quelconque passant par A. Il y a donc indétermination et on peut considérer que D_A, D_B et D_C sont concourantes en un point quelconque de (BC) ou parallèles à (BC) avec D_B et D_C confondues.

Supposons maintenant que M n'appartienne pas au cercle $\mathscr{C}$ et soient M_1, M_2, M_3 respectivement symétriques de M par rapport à (BC), (CA), (AB). On sait que ces trois points M_1, M_2, M_3 forment un véritable triangle (non aplati). [En effet, ces trois symétriques sont alignés si et seulement si M appartient à $\mathscr{C}$, la droite joignant ces trois points étant la droite de STEINER du point M par rapport au triangle ABC (elle passe, en particulier, par l'orthocentre du triangle)]. M' étant le centre du cercle circonscrit à ce triangle $M_1M_2M_3$, (AM') est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$ et (AC) celle de $[MM_2]$. On a donc mmodulo π :

$$(AC, AM') = (M_2M, M_2M_3) \text{ (angles à côtés perpendiculaires).}$$

Mais A étant le centre du cercle circonscrit à MM_2M_3, on a :



$$(M_2M, M_2M_3) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_3}\right)$$

$$= (AM, AB)$$

d'où $(AC, AM') = (AM, AB)$ et par suite, les droites $\{AM, AM'\}$ sont isogonales par rapport à $\{AB, AC\}$. Il en est évidemment de même pour les paires $\{BM, BM'\}$, $\{BC, BA\}$ et $\{CM, CM'\}$, $\{CA, CB\}$.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème :

Soit, dans un plan P, un triangle ABC, un point M et D_A, D_B, D_C les droites respectivement isogonales de (AM), (BM), (CM) par rapport à {AB, AC}, {BC, CA} et {CA, CB}. Alors :

- *Si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC en étant distincts des sommets, les trois droites D_A, D_B, D_C sont parallèles.*
- *Si M est confondu avec l'un des sommets, par exemple A, D_A est indéterminée et D_B et D_C sont confondues avec le côté (BC).*
- *Si M n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC, les trois droites D_A, D_B, D_C sont concourantes en un point M' et M' est appelé* **inverse** *de M par rapport au triangle ABC, l'application ξ qui à M associe M' étant l'inversion triangulaire par rapport à ABC.*

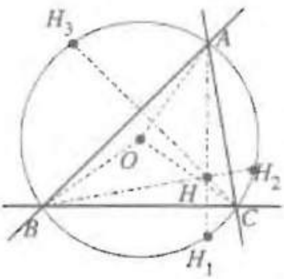
Remarques. La restriction de ξ à $P/\mathscr{C}$ est évidemment involutive. Si M est confondu avec un sommet, par exemple A, on peut considérer qu'il a pour inverse un point quelconque du côté opposé (BC) et s'il appartient à un côté, par esemple (BC), en étant distinct de B et C, on peut considérer qu'il a pour inverse le sommet opposé A.

1.2 - Exemples

1.2.1 - *Points invariants dans* ξ

Ce sont les points M tels que $D_A = (AM)$, $D_B = (BM)$, $D_C = (CM)$, c'est-à-dire les points I, I_A, I_B, I_C points de concours des bissectrices respectivement de chacun des trois angles du triangle (le centre du cercle inscrit et les centres des c ercles exinscrits).

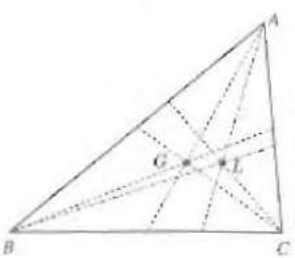
1.2.2 - *Orthocentre et centre du cercle circonscrit points inverses*



Soit H et O respectivement l'orthocentre et le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Comme les symétriques H_1, H_2, H_3 de H par rapport aux côtés (BC), (CA), (AB) appartiennent à $\mathscr{C}$, O et H sont donc inverses l'un de l'autre par rapport à ce triangle.

L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont deux points inverses par rapport à ce triangle.

1.2.3 - *Inverse du centre de gravité*



Si G est le centre de gravité du triangle ABC, les droites respectivement isogonales des médianes (AG), (BG), (CG) par rapport à $\{AB, AC\}$, $\{BC, BA\}$, $\{CA, CB\}$ sont appelées ***symédianes*** du triangle ABC.

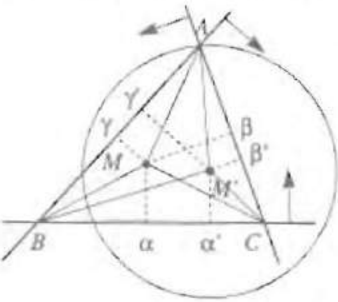
Ces symédianes sont concourantes en un point L inverse de G par rapport au triangle ABC. Ce point L est appelé ***point de Lemoine*** de ce triangle.

2 - Etude barycentrique

2.1 - Rappel

On sait que, notant $\mathcal{A}(PQR)$ l'aire algébrique d'un triangle PQR, si ABC est un repère affine du plan orienté P, tout point M de P est barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $\mathcal{A}(MBC)$, $\mathcal{A}(MCA)$, $\mathcal{A}(MAB)$ [autrement dit: $\mathcal{A}(MBC)$, $\mathcal{A}(MCA)$, $\mathcal{A}(MAB)$ sont un système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère affine A, B, C].

2.2 - Coordonnées barycentriques de l'inverse d'un point



Soient M et M' deux points inverses par rapport au triangle ABC (supposé de sens direct), pris comme repère affine et dans lequel on note a, b, c, A, B, C les longueurs des trois côtés et les mesures, comprises entre 0 et π, des trois angles.

De plus, orientons positivement la normale à chaque côté vers le demi-plan contenant le sommet opposé.

Dans ces conditions, si α, β, γ (resp α', β', γ') sont les projetés orthogonaux du point M (resp du point M') respectivement sur (BC), (CA), (AB), les aires algébriques des triangles MBC, MCA, MAB ont pour valeurs :

$$\mathcal{A}(MBC) = \frac{1}{2}a\overline{\alpha M}\ ,\ \mathcal{A}(MCA) = \frac{1}{2}b\,\overline{\beta M}\ ,\ \mathcal{A}(MAB) = \frac{1}{2}c\,\overline{\gamma M}$$

et des expressions analogues avec le point M'.

Par ailleurs, les propriétés de l'isogonalité et ces conventions de signe entraînent, pour ces deux points inverses M et M', les égalités :

$$\overline{\alpha M}\,.\,\overline{\alpha' M'} = \overline{\beta M}\,.\,\overline{\beta' M'} = \overline{\gamma M}\,.\,\overline{\gamma' M'}$$

(Si dans un produit l'un des facteurs est nul, il en est de même dans les autres, sinon on a:

$$\frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\beta M}} = \frac{\overline{\beta' M'}}{\overline{\alpha' M'}} \text{ et } \frac{\overline{\beta M}}{\overline{\gamma M}} = \frac{\overline{\gamma' M'}}{\overline{\beta' M'}}\ )$$

Il en résulte que si les coordonnées barycentriques de M et M' par rapport à A, B, C sont respectivement (u, v, w) et (u', v', w'), on a:

$$\frac{uu'}{a^2} = \frac{vv'}{b^2} = \frac{ww'}{c^2}.$$

Ce système homogène en u', v', w' admet pour solution :
$u' = a^2vw$, $v' = b^2wu$, $w' = c^2uw$ ou, sii u, v, w sont tous non nuls :

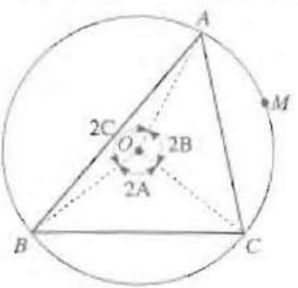
$u' = \frac{a^2}{u}$, $v' = \frac{b^2}{v}$, $w' = \frac{c^2}{w}$, d'où la dénomination "points inverses".

Ainsi: *Si le point M' n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC et a pour coo'rdonnées barycentriques (u, v, w) par rapport à A, B, C, celles de son inverse M' par rapport à ce même triangle sont (a^2vw, b^2wu, c^2uv) ou, si $uvw \neq 0$.*

Exemples :

- Les coordonnées barycentriques du point de Lemoine sont (a^2, b^2, c^2).
- Celles des centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits (points invariants dans l'inversion triangulaire), devant vérifier $u^2 = a^2$, $v^2 = b^2$, $w^2 = c^2$, sont de la forme $\varepsilon_1 a$, $\varepsilon_2 b$, $\varepsilon_3 c$ où les ε_i valent tous 1 pour le centre du cercle inscrit et deux valent 1 et un (–1) pour les centres des cercles exinscrits.
- Celles de l'orthocentre, inverse du centre du cercle circonscrit, sont proportionnelles à $\frac{a^2}{\sin 2A}$, $\frac{b^2}{\sin 2B}$, $\frac{c^2}{\sin 2C}$ et peuvent donc, pour un triangle non rectangle, être choisies égales à $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$.

Remarque : autre explication du fait que l'inverse du point M n'existe que si et seulement si M n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC.



Le point M étant le barycentre de (A, u), (B, v), (C, w) et $\mathscr{C}(O, R)$ le cercle circonscrit au triangle ABC, on a :

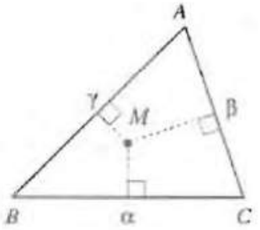
$$(u + v + w)\overrightarrow{OM} = u\,\overrightarrow{OA} + v\,\overrightarrow{OB} + w\,\overrightarrow{OC}$$

Par élévation au carré scalaire, il vient : $(u + v + w)^2OM^2 = R^2(u^2 + v^2 + w^2)$ $+ 2R^2(vw\cos 2A + wu\cos 2B + uv\cos 2C)$.

Le point M appartient au cercle circonscrit si et seulement si $OM^2 = R^2$, ce qui conduit, compte tenu des formules $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ... et $a/\sin A = 2R$...à la relation :

$$\boxed{a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0}$$

Cette égalité est l'équation barycentrique du cercle $\mathscr{C}$. Elle permet de voir que si $M(u, v, w)$ appartient à $\mathscr{C}$ les points (A, a^2vw), (B, b^2wu), (C, c^2uv) n'ont pas de barycentre.



2.3 - Application à un problème de maximum

u, v, w, a, b, c étant six nombres quelconques, une simple vérification permet de montrer que :

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$(u+v+w)^2+\left(\frac{ub}{a}-\frac{va}{b}\right)^2+\left(\frac{vc}{b}-\frac{wb}{c}\right)^2$$

$$+\left(\frac{wa}{c}-\frac{uc}{a}\right)^2$$

Le point M étant le barycentre de $A(u)$, $B(v)$, $C(w)$, avec $u = \mathcal{A}(MBC)$, $v = \mathcal{A}(MCA)$ et $w = \mathcal{A}(MBA)$ [d'où $u + v + w = S = \mathcal{A}(ABC)$] et α, β, γ, les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA), (AB), alors

$$\frac{u^2}{a^2}=\frac{1}{4}M\alpha^2,\ \frac{v^2}{b^2}=\frac{1}{4}M\beta^2,\ \frac{w^2}{c^2}=\frac{1}{4}M\gamma^2$$

d'où

$$\frac{1}{4}\left(M\alpha^2+M\beta^2+M\gamma^2\right)=$$

$$\left[S^2+\left(\frac{ub}{a}-\frac{va}{b}\right)^2+\left(\frac{vc}{b}-\frac{wb}{c}\right)^2+\left(\frac{wa}{c}-\frac{uc}{a}\right)^2\right]\times\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

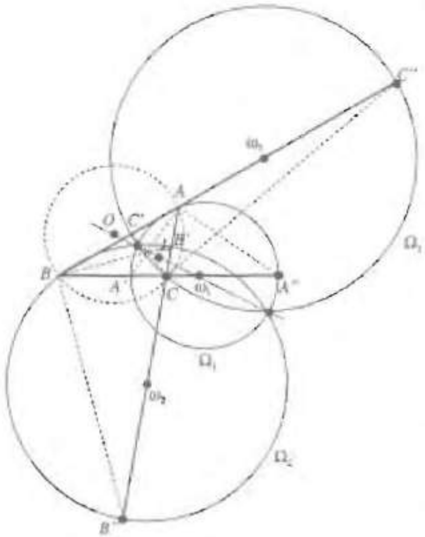
Le second membre et donc le premier est minimum lordsque les trois derniers carrés sont nuls, c'est-à-dire lorsque u, v, w sont respectivement proportionnels à a^2, b^2, c^2, et dans ce cas, $M = L$.

La somme des carrés des distances d'un point aux trois côtés d'un triangle est minimum lorsque ce point est le point de Lemoine de ce triangle.

3 - Les cercles d'Apollonius

Pour un triangle ABC (supposé non isocèle), ce sont les trois cercles Ω_1, Ω_2, Ω_3 ayant respectivement pour extrémités des diamètres les pieds A', A'', B', B'', C', C'' sur le côté opposé des bissectrices intérieures et extérieures des trois angles du triangle.

Comme le cercle circonscrit (Γ) à ABC coupe harmoniquement les diamètres respectifs $[A'A'']$, $[B'B'']$, $[C'C'']$ de chacun de ces trois cercles, (Γ) est orthogonal à ces trois cercles et, par suite, le centre O de (Γ) a une même



puissance (positive) par rapport à chacun d'eux.

Considérons maintenant le centre ω_1 de Ω_1. Ce point ω_1 est le barycentre de (B, b^2), $(C, -c^2)$. On en déduit, avec $AB = a$, que

$$\omega_1 B^2 = \frac{a^2c^4}{\left(b^2 - c^2\right)^2}$$

et que

$$\omega_1 C^2 = \frac{a^2b^4}{\left(b^2 - c^2\right)^2}.$$

Mais ω_1 est aussi le barycentre de $(A, 0)$, (B, b^2), $(C, -c^2)$ et la "relation (barycentrique) de LEIBNIZ" conduit alors avec les deux valeurs précédentes, à l'expression : $\omega_1 A^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{\left(b^2 - c^2\right)^2}$.

De plus, le point de LEMOINE L étant le barycentre de (A, a^2), (B, b^2), (C, c^2), on a (les sommations portant sur a, b, c et A, B, C):

$$\Sigma a^2\omega_1A^2 = (\Sigma a^2)\omega_1L^2 + \Sigma a^2\, LA^2.$$

Il en résulte, avec les valeurs précédentes :

$$\left(\Sigma a^2\right)\omega_1 L^2 + \Sigma a^2 LA^2 = \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)a^2b^2c^2}{\left(b^2 - c^2\right)^2}$$

Or, en développant le carré scalaire de l'égalité $\Sigma a^2\,\overrightarrow{LA} = \vec{0}$ et en tenant compte des relations $2\overrightarrow{LA}\cdot\overrightarrow{LB} = LA^2 + LB^2 - AB^2$ … on obtient, après manipulation, $\sum a^2 LA^2 = \dfrac{3a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

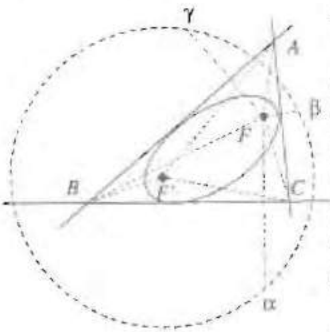
De tout cela découle la valeur de ω_1L^2 et enfin:

$$\omega_1 L^2 - \omega_1 A^2 = \frac{-3a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \Omega_1(L).$$

Cette expression étant symétrique en a, b, c le point L a donc une même puissance (négative) par rapport aux trois cercles Ω_1, Ω_2, Ω_3. Ainsi :

Les trois cercles d'Apollonius d'un triangle appartiennent à un même faisceau (à points de base) dont l'axe radical (appelé axe de Brocard) est la droite (OL) joignant le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine. La droite portant leurs centres est appelée axe de LEMOINE.

4 - Coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle

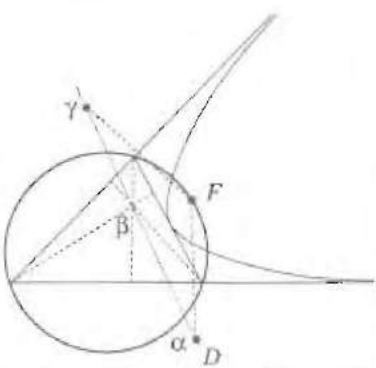


4.1 - Conique à centre

S'il existe une telle conique, de foyers F et F', tangente aux trois côtés du triangle, les symétriques de F (resp F') par rapport à ces trois côtés sont situés sur le cercle directeur relatif à F' (resp F). F et F' sont donc deux points inverses par rapport au triangle considéré (cf. la première phrase en italique du paragraphe 1.1).

Réciproquement, F étant un point du plan non situé sur le cercle circonscrit ni sur l'un des côtés du triangle donné, il existe une conique à centre tangente aux trois côtés dont F est un foyer, l'autre foyer F' étant l'inverse de F par rapport au triangle et le cercle directeur relatif à F' étant le cercle passant par les symétriques de F par rapport aux trois côtés. [Cette conique est une ellipse si F (et aussi F') est intérieur au triangle et une hyperbole sinon].

4.2 - Parabole



On sait (cf. §1.1) que les symétriques d'un point par rapport aux trois côtés d'un triangle sont alignés si et seulement si ce point appartient au cercle circonscrit (Γ) à ce triangle. Par suite, s'il existe une parabole tangente à ces trois côtés, son foyer appartient à (Γ).

Réciproquement, si un point F est sur ce cercle et distinct de chacun des sommets, ses symétriques α, β, γ par rapport aux trois côtés sont alignés sur la droite de Steiner *(D)* de F par rapport à ce triangle et la parabole de foyer F et de directrice *(D)* est tangente aux trois côtés du triangle.

5 - Transformation d'une courbe

5.1 - Remarque générale sur les degrés

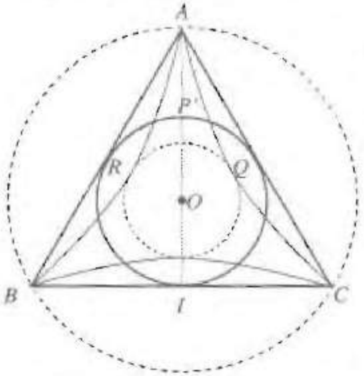
Les coordonnées barycentriques de l'inverse d'un point M étant des fonctions polynomiales du second degré de celles de M, *la transformée par cette inversion d'une courbe algébrique de degré n est donc une courbe de degré 2n.*

Mais il faut se souvenir que si l'un des sommets, par exemple A, du triangle de base est point d'ordre k pour une courbe, l'inverse de cette courbe se décompose et contient le côté opposé (BC) compté k fois.

Ainsi: La transformée d'une droite (L) est une conique (Γ) (passant par les sommets du triangle de base, ces points étant les inverses des points d'intersection de (L) avec les côtés du triangle)..

La transformée d'une conique (Γ) est une quartique (se décomposant en une droite et une cubique si (Γ) passe par l'un des sommets du triangle de base, en deux droites et une conique si (Γ) passe par deux sommets, en quatre droites si (Γ) passe par les trois sommets).

5.2 - Inverse d'une Hypocycloïde à 3 rebroussements H_3 par rapport au triangle (équilatéral) des rebroussements



L'hypocycloïde H_3 de points de rebroussements A, B, C est une courbe de degré 4. Sa transformée (Γ) est donc de degré 8 mais, comme A, B, C sont trois points doubles de H_3, (Γ) comprend les droites (AB), (CA), (AB) toutes trois comptées deux fois; il reste donc, pour compléter (Γ), une conique qui, pour des raisons de symétrie évidentes, est un cercle de même centre O que l'hypocycloïde. Si P est le sommet de H_3 opposé à A, I le milieu de $[BC]$ et P' le point en lequel (AI) recoupe le cercle inscrit dans le triangle ABC, on trouve, avec les valeurs $OP = R$, $OC = 3R$, $PI = R/2$, $P'I = 3R$, que $\tan(CP, CI) = \tan(CA, CP') = \frac{\sqrt{3}}{9}$. **Il en résulte que P'** est l'inverse de P.

L'inverse d'une hypocycloïde à trois rebroussements A, B, C par rapport au triangle équilatéral ABC est le cercle inscrit dans ce triangle.

Bibliographie

J.J.A. MATHIEU : *Géométrie comparée*, Nouvelles Annales mathématiques (1865) pages 393, 481, 592.

M. VIGARIE : *Inversion isogonale*, Journal de Mathématiques Elémentaires (1865).

M. SIMMONS : *Companion to the weekly problem. Papers* (de M.J. MILINE).

... *et tout livre de géométrie de l'ancien temps !* [Notamment : F.G-M : *Exercices de géométrie*.Réédition GABAY].