AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.

ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien :
cabout @ sancerre.ac - idf . jussieu.fr.

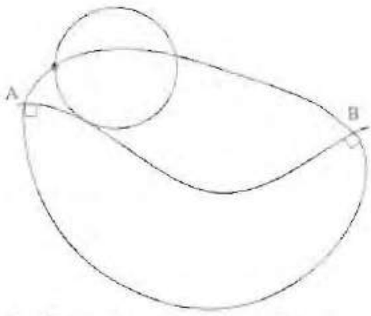
Nouveaux avis de recherche

Avis de recherche n° 63 de Claude Frasnay (Toulouse):

Les sommes $S^n_m = e^{-n}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{n^k}{k!}$ suscitent deux suites (S^n_n) et (S^n_{n+1}) adjacentes de limite $\frac{1}{2}$. Quelles sont les parties principales de $\frac{1}{2} - S^n_n$ et $S^n_{n+1} - \frac{1}{2}$?

Avis de recherche n° 64 d'A.V. 54 .

Notre collègue a découvert le joli résultat suivant : si l'on fait rouler sans glisser un cercle de longueur l le long d'un segment de courbe de longueur l, d'un côté puis de l'autre (voir figure), la courbe roulette obtenue a une aire égale à 6 fois celle du cercle générateur (ce qui généralise la propriété de l'arche de cycloïde d'avoir une aire égale à trois fois celle de son cercle générateur). Cette propriété est-elle connue ?



Avis de recherche n° 65 de Géry HUVENT (Hem)

Le dictionnaire des Mathématiques de A. Bouvier et M. George précise que les matrices magiques ont été utilisées dans les métiers à tisser. Pourrait-on avoir des renseignements plus complets ?

Avis de recherche n° 66 de Francis LANZ (Paris)

Un ami (professeur de lettres) a observé différentes boussoles allemandes sur lesquelles on peut voir plusieurs types de graduations :

	N	E
Grad (°)	0	90
Neugrad (gr)	0	100
A ‰ (sic)	0	1600
Strich (')	0	1600

C'est à en perdre le Nord ! Quel ex-artilleur ou ex-marin pourra nous aider à le retrouver ?

Avis de recherche n° 67 de Claude Morin (lycée Gay Lussac, Limoges)

On abat une à une les cartes (battues) d'un jeu de 32 cartes en disant successivement : "as, roi, dame, ..., sept, as, roi, ..." sans tenir compte des couleurs ; quelle est la probabilité de ne jamais tomber juste ?

Avis de recherche n° 68 de Christine MEULIEN (lycée J. Moulin, Torcy) **Cherche des ouvrages publiant les formules :**

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 4\sin(60° + x)\sin(60° - x) \\ \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos(60° + x)\cos(60° - x) \\ \dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \dfrac{\tan(60° - x)}{\tan(30° - x)} \end{array}\right.$$ **, ainsi que**

$$\frac{\tan 24°}{\tan 6°} = \frac{\tan 42°}{\tan 12°} = \frac{\tan 54°}{\tan 18°} = \frac{\tan 72°}{\tan 36°} = \frac{\tan 78°}{\tan 48°} = \frac{\tan 84°}{\tan 66°} = 2 + \sqrt{5}\,.$$

NDLR :

On peut généraliser les trois premières formules en factorisant les polynômes de Tchebychev, définis par $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Prenons n impair ($=2p+1$) et remarquons qu'alors $T_n\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0$. On en déduit $T_n = 2^{n-1} X \prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - \sin^2\frac{k\pi}{n}\right)$, d'où, en utilisant : $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b)$

$$\frac{\cos nx}{\cos x} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{k\pi}{n}+x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}-x\right)$$

On en déduit, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$:

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{p}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}-x\right)$$

En passant, faisons tendre x vers 0 :

$$\prod_{k=1}^{p}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^p}$$

Puis, en effectuant le quotient des deux premières relations :

$$\frac{\tan nx}{\tan x} = \prod_{k=1}^{p}\tan\left(\frac{k\pi}{n}+x\right)\tan\left(\frac{k\pi}{n}-x\right)$$

Je laisse au lecteur le plaisir (ou le courage !) de regarder ce qui se passe pour n pair.

RÉPONSES AUX ANCIENS AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n° 40 sur la perspective cavalière.

Le dictionnaire publié par le CNRS et intitulé : "*Trésors de la langue française*" attribue tout simplement les expressions «vue cavalière» et «perspective cavalière» à la vue plongeante qu'a un cavalier depuis son cheval. En fait ceci ne contredit pas l'origine des cavaliers-fortifications qui avait été avancée dans le *Bulletin* 403 car cette dernière appellation a été donnée également par référence à la position élevée du cavalier sur son cheval.

Avis de recherche n° 49 sur l'origine du mot affine.

J.P. FRIEDELMEYER (Strasbourg) et Grégoire PÉCOU (Île Tudy) ont envoyé un texte d'EULER intitulé : "*de la similitude et de l'affinité des courbes*" tiré de "*introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748, traduction française de J.B. LABEY". EULER écrit que lorsqu'on change x en ax et y en by, les courbes sont semblables si $a = b$, qu'elle ne le sont plus si $a \neq b$, mais "*qu'elles ont entre elles de l'affinité*".

Remarquons qu'EULER ne dit jamais que les courbes sont "affines", mais "*qu'elles ont de l'affinité*". Qui donc est passé à l'adjectif affine, employé de plus ainsi au masculin ?
NDLR : je souhaiterais régler le sort d'affine avant de passer à affixe....

Avis de recherche n° 54
Peut-on construire la parallèle à une droite donnée passant par un point donné uniquement à la règle ?

A ce jour, 7 collègues, Alain BESSON (Saint Julien en Genevois), Rudolf BKOUCHE (Lille), Edgar DELPLANCHE (Créteil), Louis GERMONI (Six Fours les Plages), Grégoire PÉCOU (Île Tudy), Pierre RENFER (Ostwald), Pierre SAMUEL (Bourg-la-Reine) ont envoyé une contribution répondant par la négative à cette question.

→ *Voici la réponse de Pierre RENFER.*

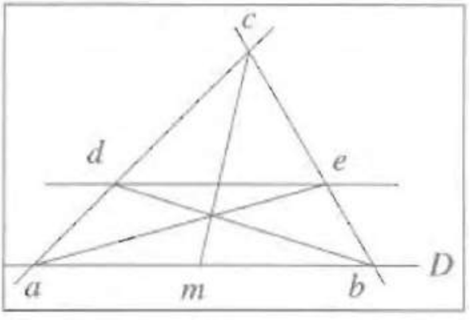
Supposons qu'on puisse construire, à la règle seule, la parallèle à une droite donnée, passant par un point donné. On pourrait alors construire à partir de trois points A, B, C le quatrième point D tel que A,B,C,D en A, B, C, E on obtiendrait E par la même construction, puisque les homographies conservent les alignements. Voila une belle absurdité !

→ *Et voici la contribution de Pierre SAMUEL.*

Les constructions utilisant seulement la règle, dont les étapes consistent à tracer la droite passant par deux points déjà construits, à prendre le point d'intersection de deux droites déjà construites ou à introduire des points ou des droites auxiliaires, sont conservées par les transformations projectives. Elles ne peuvent donc aboutir qu'à des points ou des droites définis par des propriétés projectives. L'exemple classique est la construction du "quatrième harmonique" c'est-à-dire étant donnés 3 points a, b, c distincts d'une droite D, du point d de D tel que (a, b, c, d) soit une division harmonique. Ainsi, supposons qu'il y ait une construction $\underline{C}$ permettant de tracer la droite E parallèle à une droite donnée D et passant par un point donné a. On plonge alors le plan affine dans sa clôture projective P, on choisit une transformation projective u qui "bouge" la droite à l'infini I de P et on applique la construction $u(C)$ à la droite $u(D)$ et au point $u(a)$: elle aboutit à la droite $u(E)$. Mais celle-ci, qui joint les points $u(a)$ et $u(D \cap I) = u(D) \cap u(I)$, n'est en général pas parallèle à $u(D)$ car elle la coupe au point à distance finie $u(D) \cap u(I)$. On doit cependant remarquer que $u(D)$ et $u(E)$ sont parallèles dans le plan affine $P - u(I)$ qui n'est pas celui qui est considéré. Je ne pense donc pas qu'une telle construction $\underline{C}$ "à la règle" existe.

Comme une construction $\underline{C}$ doit se faire sur une feuille, il vaut mieux que la construction $u(C)$ ne mette pas en jeu des points très éloignés ou transforme des segments en réunions de demi-droites disjointes (cas où la droite F que u envoie à l'infini coupe ces segments). On choisit donc la transformation projective u proche de la transformation identique : ainsi F devra laisser d'un même coté tous les points (en nombre fini) intervenant dans la construction $\underline{C}$ et être assez éloignée d'eux. C'est possible.

Comme la notion de milieu n'est pas une notion projective il ne semble pas possible de construire un milieu avec la règle seule. D'ailleurs la construction d'un milieu et celle d'une parallèle se ramènent facilement l'une à l'autre : en effet (voir figure), "(de) parallèle à D" équivaut à "m milieu de (ab)". Louis GERMONI signale le chapitre consacré à la règle seule dans J.C. CARRÈGA, théorie des corps, la règle et le compas, Hermann, 1981. On y trouve les deux résultats suivants : il est possible de construire à la règle seule la droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné si l'on dispose d'une autre droite parallèle à la première ou bien de deux couples de droites parallèles.



Avis de recherche n° 56
Pourquoi un coefficient de corrélation est-il réputé "bon" lorsqu'il est supérieur à $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

→ *Réponse de Jean MOREAU de Saint MARTIN (Paris).*

Une amorce d'explication serait la réduction d'écart-type obtenue par la prise en compte de la régression (linéaire) : si s est l'écart-type de y, $s\sqrt{1-r^2}$ est l'écart-type du résidu aléatoire $y-ax-b$ pour le meilleur ajustement. Ainsi, comme $r > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-r^2} < \frac{1}{2}$, la liaison serait réputée "bonne" si elle réduit l'écart-type de plus de moitié. Cela n'enlève rien au caractère conventionnel de ce choix...

Je rapproche cette question de l'affirmation : "On montre que si n est assez grand, le taux de probabilité de la liaison (x,y) est $1 - \sqrt{1-r^2}$. Cette probabilité est supérieure à 50 chances sur 100 quand $r > \sqrt{3}/2$."

Cette affirmation pose deux questions: est-elle vraie ? que veut-elle dire au juste ?

Elle m'a laissé très perplexe quand je l'ai lue, il y a un quart de siècle, dans un texte de vulgarisation (*Statistique et probabilité*, par P. PACÉ et R. CLUZEL ; aide-mémoire Technor, Delagrave 1968). Je n'ai rien vu de tel dans les ouvrages de statistique "sérieux".

Ce qui ressort des ouvrages sérieux, c'est que si n (taille d'échantillon) est grand, le coefficient de corrélation observé reflète fidèlement (à $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ près, disons ; cf. les procédés tels que la transformation-Z de Fisher...) le coefficient de corrélation de la population origine. Dès lors, un coefficient de corrélation même modeste peut être très significatif, car il est trop improbable de l'obtenir dans l'hypothèse d'indépendance des variables : $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ suit la loi de Student à $(n-2)$ d.d.l. dans cette hypothèse, si les variables sont gaussiennes.

L'affirmation citée est donc fausse si on la prend au sens strict et général (et que faire d'autre en l'absence de précision sur les hypothèses dans lesquelles on l'a établie?). Si on la comprend comme s'appliquant à l'existence d'une "bonne" liaison, cela renvoie à la question de M. ROYER !

Évoquer une probabilité qui ne dépend pas de n (sous réserve qu'il soit grand), c'est peut-être sous-entendre que cette probabilité est inhérente au schéma de production des variables aléatoires. Par exemple, il y a corrélation entre le sexe de jumeaux : sexe identique pour les vrais jumeaux, sexe indépendant pour les faux jumeaux, et cette corrélation dépend de la proportion de vrais jumeaux parmi les couples de jumeaux. De même, au lieu de la classique répartition gaussienne à deux dimensions, on peut imaginer de combiner deux sous-populations, l'une où les deux dimensions sont indépendantes, l'autre où elles sont liées fonctionnellement (fonction affine), la "probabilité de liaison" gouvernant le tirage au hasard dans l'une ou l'autre sous-population. Alors le coefficient de corrélation donne une indication sur la probabilité de liaison : mais pour n assez grand, la probabilité est proche de $|r|$, et non de $1-\sqrt{1-r^2}$. Si l'affirmation précitée a une justification, je ne vois pas laquelle.

Autres réponses : Jean-Marie GROIZARD (La Tour Landry) et Gilbert MAHEU (Vitry le François).

Avis de recherche n° 57 sur des approximation de π.

Philippe DELEHAM part de l'approximation de π :

$x = 600 \sin^3 10° = 600 \sin^3 \frac{\pi}{18}$ $(x - \pi = 0{,}000087\ldots)$ qu'il pense être une coïncidence numérique du même genre que :

$\pi^4 + \pi^5 \approx e^6$, $\sqrt{51} + \sqrt{12} - \sqrt{13} \approx 7$ ou $\frac{\varphi^{78}}{10^{16}} \approx 2$ (φ nombre d'or)

P. DELEHAM a bien montré, en utilisant le polynôme $X^3 - 3X + 1$ que :

$$x = 600 \sin^3 \frac{\pi}{18} = 100 \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}\left(3 - 8\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}\right)^2 = \frac{25}{\left(2\cos\frac{\pi}{9}+1\right)^2 - \frac{1}{3}}$$

D'autre part, partant de l'approximation $\pi = 600 \sin^3 \frac{\pi}{18}$ et de la formule de MASKELYNE $\sin^3 x \approx x^3 \cos x$ $(\sin^3 x - x^3 \cos x = O(x^7))$, il obtient $\pi^2 \approx \frac{18^3}{600\cos\frac{\pi}{18}} = \frac{9{,}72}{\cos\frac{\pi}{18}}$ et remarque que $y = \sqrt{\frac{9{,}72}{\cos\frac{\pi}{18}}}$ est une meilleure approximation de π que x $(y - \pi = 0{,}000054)$.

Avis de recherche n° 58 : que répondre aux élèves qui demandent pourquoi, dans une réflexion, la gauche et la droite sont inversées, alors que le haut et le bas ne le sont pas ?

Cet question a suscité un courrier abondant de Miguel AMENGUAL (Majorque, Espagne), Pierre BARNOUIN (Cabris), Raymond GINOUILLAC (Albi), Jean LEFORT (Wintzenheim), François LO JACOMO (Paris), Philippe LOMBARD (IREM de Lorraine), Annie VIALA (São Paulo) et André VIRICEL (Villers les Nancy). La synthèse fera l'objet d'un article du *Bulletin*.

Avis de recherche n° 61 d'un représentation du groupe de Klein où les trois éléments non neutres jouent des rôles symétriques.

G. BOUVIER (Grenoble) et Claude MORIN proposent :

1) le sous-groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$: $\{id, s_{Ox}, s_{Oy}, s_{Oz}\}$.

2) le sous-groupe de S_4 : {id, (1,2)o(3,4), (1,3)o(2,4), (1,4)o(2,3)}.

NDLR : je me demande encore comment je n'y ai pas pensé ... De 1), je déduis bien évidemment le sous-groupe de

$M_3(\mathbb{R})$: $\left\{ I_3, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, ou encore le sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$: {(0,0,0),(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)}.

A ce propos, G. Bouvier pose la question : y a-t-il des liens entre le groupe et la bouteille de Klein ?