Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 261 (Jean-Pierre FRIEDELMEYER, 67 - Strasbourg)

Trouver tous les triangles ABC à côtés entiers a, b, c ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$) tels que la médiane issue de A soit égale à l'un des côtés contenant A.

ÉNONCÉ N° 262 (Raymond RAYNAUD, 04 - Digne)

Dans le plan P, les quatre points A, B, A', B' sont les sommets d'un trapèze isocèle $[AB]$ et $[A'B']$ ont la même médiatrice et des longueurs différentes. Trouver l'ensemble $\mathbb{E}$ des points M de P tels que $MA / MA' \leq MB / MB'$.

ÉNONCÉ N° 263 (Philippe DELEHAM, 97 - Ouanjani).

Soit $f(n) = \sin\frac{(n\pi)}{2} + \frac{\sin\frac{(n\pi)}{4}}{2^{n/2}}$ (n entier).

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n\,2^n} = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 244 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Quelle relation lie les polynômes de la variable complexe :

$$\sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{n}{p} C_{n+p-1}^{n-p} (z-1)^p \quad \text{et } (z^n - 1) \text{ ?}$$

SOLUTION de R. JEANNIN (54 - Longwy)

On va montrer que les racines du polynôme de degré n

$$P_n(z) = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} \binom{n+p-1}{n-p} (2z-2)^p, \quad n \geqslant 1,$$

sont les parties réelles des racines du polynôme $z^n - 1$. Plus précisément, $\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n}$ est racine double de P_n si $|\omega_k| < 1$ et racine simple si $|\omega_k| = 1$.

On aura par exemple : $P_4(z) = 16z^2(z-1)(z+1)$ (car il est clair que le coefficient dominant de P_n est 2^n).

Il s'agira essentiellement de démontrer que

$$P_n(z) = 2T_n(z) - 2, \; n \geqslant 1 \qquad (2)$$

avec $T_n(z)$ le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev de première espèce défini par

$$T_0 = 1, \; T_1 = z \text{ et } T_n = 2zT_{n-1} - T_{n-2}, \quad n \geqslant 2 \qquad (3).$$

Rappelons que pour z réel, $|z| \leqslant 1$, on a $T_n(z) = \cos(n \operatorname{Arccos} z)$. La démonstration se décompose en plusieurs lemmes. On utilisera la notation $\displaystyle\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{b\,!}$, avec $b \geqslant 1$. On a $\displaystyle\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$.

Lemme 1 : $\displaystyle\frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p} = \binom{n+p}{2p} + \binom{n+p-1}{2p}$, $n \geqslant p \geqslant 1$.

Preuve :

$$\binom{n+p}{2p} + \binom{n+p-1}{2p} = \frac{(n+p)\ldots(n-p+1) + (n+p-1)\ldots(n-p)}{2p\,!}$$

$$= \frac{(n+p-1)\dots(n-p+1)\left[(n+p)+(n-p)\right]}{2p\,!}$$

$$= \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{2p-1} = \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p}.$$

Ce lemme montre, au passage, que P_n est à coefficients entiers.

Lemme 2 : Le polynôme $\Phi_n(z) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n+p}{2p} z^p$

satisfait la relation de récurrence :

$$\Phi_n = (z+2)\,\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2},\ n \geqslant 2. \quad (4)$$

Preuve : calculons le coefficient a_p de z^p dans le membre de droite. Il s'agit de montrer que $a_p = \binom{n+p}{2p}$. Il est clair que le terme constant et le coefficient dominant de Φ_n sont égaux à 1 pour tout n ; on en déduit facilement que $a_0 = a_n = 1$. Par ailleurs, pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$a_p = \binom{n+p-2}{2p-2} + 2\binom{n+p-1}{2p} - \binom{n+p-2}{2p}$$

$$= \binom{n+p-2}{2p-2} + \binom{n+p-1}{2p} + \binom{n+p-2}{2p-1}$$

$$= \binom{n+p-1}{2p-1} + \binom{n+p-1}{2p} = \binom{n+p}{2p}$$

Par linéarité, il est clair que le polynôme $Q_n = \Phi_n + \Phi_{n-1}$, $n \geqslant 1$, satisfait la récurrence (4), et le lemme 1 montre que :

$$Q_n(z) = 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p} z^p\ .$$

On en déduit que : $Q_n(2z-2) = 2 + P_n(z)$ (5)

Lemme 3 : En posant $R_n(z) = Q_n(2z-2)$, on a $R_n(z) = 2T_n(z)$.

Preuve : Comme $Q_n(z)$ satisfait la récurrence (4), il est clair que $R_n(z) = Q_n(2z-2)$ satisfait à la récurrence (3) des polynômes de Tchebychev. Un calcul facile permet de vérifier que $R_1(z) = 2z = 2T_1(z)$ et que $R_2(z) = 4z^2 - 2 = 2T_2(z)$, ce qui achève la démonstration.

Le lemme 3 et (5) montrent que : $P_n(z) = 2T_n(z) - 2$. Le nombre z est racine de P_n si et seulement si $T_n(z) = 1$. Pour z réel, $|z| \leq 1$, ceci équivaut à $\cos(n \arccos z) = 1$ d'où les $(n/2) + 1$ racines réelles :

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n}\ , \qquad 0 \leq k \leq n/2.$$

Par ailleurs, pour $|z| < 1$, on a $P_n(z) = 2T_n(z) - 2 = 2\cos(n \arccos z) - 2$

et $$P'_n(z) = \frac{2 \sin(n \arccos z)}{\sqrt{1 - z^2}}\ ,$$

donc $P'_n(\omega_k) = 0$, pour $|\omega_k| < 1$ et ω_k est racine double dans ce cas.

En résumé, si $n = 2m$, P_n admet deux racines simples ± 1 et $m - 1$ racines doubles $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$ et si $n = 2m + 1$, ${}_n$ admet une racine simple et m racines doubles $\omega_1, \ldots, \omega_m$.

AUTRES SOLUTIONS

René MANZONI (Le Havre), l'auteur et une solution fausse.

REMARQUE

"La question était assez ouverte" écrit R. André JEANNIN. René MANZONI exprime le résultat sous la forme :

$$\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n = 2 + P_n(z)$$

et Marie Laure CHAILLOUT : $z \neq 0 \Rightarrow (z_n - 1)^2 = z^n P_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$.

ENONCÉ 245 (François LO JACOMO, Paris)

Soient O, H, I trois points d'un plan.

a) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre du cercle inscrit ? Comment construire ce triangle dans les cas particuliers où I *est* situé sur le segment $[OH]$ ou sur sa médiatrice ?

b) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre de l'un des cercles exinscrits?

RÉPONSE

Pour toute la suite du problème, on exclura le cas trivial du triangle équilatéral en supposant O et H distincts, et on définira les point G, O', H', J et J' par : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OH'} = -\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{IJ'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JI}$.

Si le triangle ABC existe, G est son centre de gravité et O' le centre de son cercle d'Euler. La donnée de O, H, I équivaut à la donnée de G, I, J, il est donc équivalent de rechercher la condition que doit vérifier I par rapport aux points alignés O, H, H', G, O' ou la condition que doit vérifier G par rapport aux points alignés I, J, J', H'.

⇨ **(a)** Il existe un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre du cercle inscrit si et seulement si I est distinct de O' et intérieur au cercle (Γ) de diamètre $[GH]$ ou, ce qui revient au même, si G est distinct de J' et intérieur au cercle de diamètre $[IJ]$. Le triangle solution, s'il existe, est unique.

Si I est situé sur le segment $]OH[$, donc sur $]GO'[\cup]O'H[$, appelons K_0 le symétrique de H par rapport à I. La perpendiculaire en K_0 à (OH) coupe en K_1 et K_2 le cercle de centre O passant par I. Les tangentes à ce cercle en K_1 et K_2 se recoupent sur (OH) en J_A, pied de la polaire de K_0 par rapport audit cercle. Le cercle de centre O passant par J_A recoupe (OH) en A et coupe en B et C la médiatrice de $[HJ_A]$. ABC est le triangle cherché, et il est isocèle. Lorsque I varie, A décrit $]-\infty, H'[\cup]G, +\infty[$ et B et C parcourent l'hyperbole de foyer O, de sommets G et H et d'excentricité 2, à l'exclusion des sommets G et H. Lorsque $I \to O'$, le triangle tend vers un triangle équilatéral de dimension infinie.(*figure 1*)

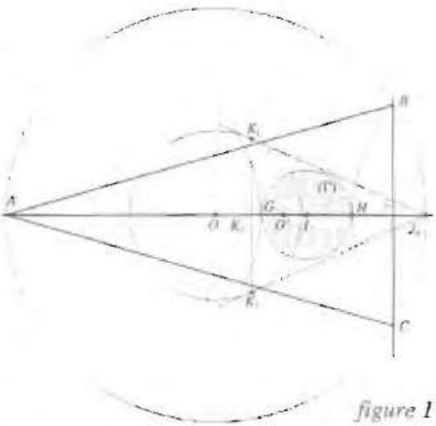


figure 1

Si I est situé sur la médiatrice de $[OH]$, que nous appellerons Δ, donc sur $]J_1O'[\cup]O'J_2[$, J_1 et J_2 étant les intersections du cercle (Γ) avec Δ, la médiatrice de $[OI]$ coupe Δ en J_A. Le cercle de centre O passant par J_A recoupe Δ en A et coupe

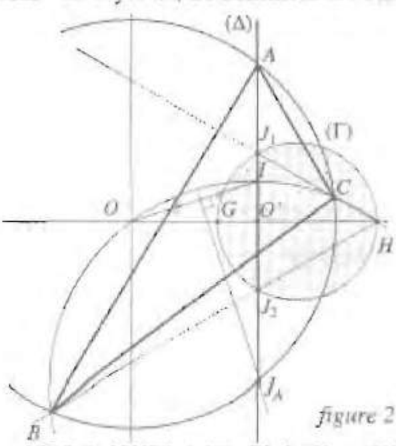


figure 2

en B et C le cercle de centre J_A passant par O, I et H. ABC est le triangle cherché, et l'angle $\widehat{A}$ vaut $\pi/3$. Lorsque I varie, B et C parcourent partiellement les droites (HJ_1) et (HJ_2). La construction ci-dessus, pour I extérieur à $[J_1J_2]$, donne le triangle ABC dont I est le centre du cercle exinscrit. *(figure 2)*

➪ **(b)** Il existe un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre d'un des cercles exinscrits si et seulement si G est extérieur au cercle de diamètre $[IJ]$ et intérieur à la parabole de sommet I et de foyer J'

Le triangle solution, s'il existe est unique.

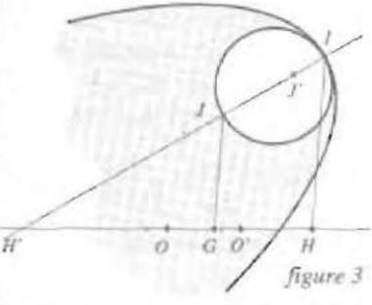


figure 3

Le cercle et la parabole sont tangents en I, mais non osculateurs. Si G était sur le cercle ou sur la parabole, le triangle serait dégénéré (un angle nul) et si G était en I, le triangle aurait deux angles nuls. Il convient également d'exclure le cas où G (donc également O, H et O') serait confondu avec H', et où le triangle serait équilatéral.

COMMENTAIRE ET DÉMONSTRATIONS

«La première partie de votre énoncé relatif à O, I, H est connu dans la littérature sous l'appellation de "Problème d'EULER" (cf. *Mémoires de Petersbourg*, t.XI, 1765). Le problème a été repris par Terquem dans les *Nouvelles Annales*, t.1, 1842 : Considérations sur le triangle rectiligne d'après EULER. La question a aussi été considérée par LEMOINE vers 1870» m'écrit Philippe DELEHAM (Reims - mars 1995). J'ai trouvé le texte d'EULER dans ses œuvres complètes, et je remercie Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Michel GUILLEMOT de m'avoir procuré les textes de TERQUEM et LEMOINE. Je prie les lecteurs de m'excuser de m'être attribué la paternité d'un problème aussi classique, mais c'était en toute bonne foi.

L'article d'EULER, intitulé : *Solution facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum* (solution simple de certains des problèmes géométriques les plus difficiles) dit, entre autre, dans l'introduction :

> 3. Problemata autem haec solutu esse difficillima mox experietur, quicunque ea fuerit aggressus, cum vix perspiciatur, cuiusmodi quantitates incognitas in calculum introduci oporteat, ut saltem ad aequationes solutionem continentes perveniatur. Totum ergo negotium ad idoneam quantitatum incognitarum electionem reducitur, in quo id imprimis est cavendum, ne in calculos taediossimos et omnino inextricabiles delabamur.

ce qui signifie: «*Mais on ne tarde pas à se rendre compte que la solution de ces problèmes est très difficile, de quelque côté qu'on les attaque, et que l'on a du mal à percevoir quelles quantités inconnues il convient d'introduire dans le calcul rien que pour parvenir aux équations qui renferment les solutions. Tout le travail se ramène donc au choix optimal des quantités inconnues, et c'est ce qui fait l'objet de cet article où l'on ne se perdra pas dans les calculs les plus pénibles et inextricables du monde*».

Dans un repère centré en A et dont l'axe des abscisses passe par B, EULER calcule - avec des notations différentes de celles que j'utilise ici - les six carrés des longueurs : HG^2, HI^2, HO^2, GI^2, GO^2 et IO^2. En appelant a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC et S son aire, il choisit comme nouvelles inconnues: $\frac{(abc)^2}{4S^2}$, $\frac{(abc)}{(a+b+c)}$ et $(a+b+c)^2$, utilisant la formule de HÉRON pour en déduire $ab+bc+ca$. Il trouve notamment:

$$OI^2 = \frac{(abc)^2}{16S^2} - \frac{abc}{(a+b+c)} \quad \text{(relation d'EULER)}.$$

En éliminant $(a+b+c)^2$, il remarque que: $\frac{(abc)^2}{4S^2} = -\frac{4OI^4}{3OG^2+6GI^2-2IO^2}$

et parvient à calculer les autres inconnues par combinaisons linéaires, donc à trouver les coefficients de l'équation admettant a, b, c pour racines. Il conclut par un exemple de résolution effective: le tout prend une vingtaine de pages… en latin.

C'est vraisemblablement en approfondissant l'égalité ci-dessus que Karl Wilhelm FEUERBACH, dans son ouvrage intitulé: *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung* (Propriétés de quelques points remarquables du triangle rectiligne et de plusieurs lignes et figures qu'ils déterminent. Traité d'analyse et de trigonométrie, ouvrage publié à Nuremberg en 1822 et que je n'ai pas réussi à consulter) a calculé la distance du centre O' du cercle d'Euler aux quatre centres I, I_A, I_B, I_C des cercles inscrit et exinscrits, démontrant ainsi son fameux théorème.

Fondateur des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale, TERQUEM consacre 13 pages à “notre” problème dans le tome premier de cette revue en 1842. Il rappelle les calculs d'Euler, signalant que c'est par ces calculs qu'Euler a prouvé l'alignement de O, G et H (droite d'EULER). Ses notations sont à peine plus modernes de celles d'Euler, mais il introduit le rayon R du cercle circonscrit, attribuant à Legendre la relation $R = \frac{abc}{4S}$ (nécessaire pour écrire sous la forme que nous connaissons la relation d'EULER $OI^2 = R^2 - 2Rr$). L'expression de $2Rr$ en fonction des longueurs des côtés du triangle GHI lui permet d'affirmer que l'angle en I, dans ce triangle, est «essentiellement obtus», en d'autres termes, que I est intérieur au cercle de diamètre $[GH]$. Mais il ne se pose pas la question si cette condition nécessaire est ou non suffisante. En simplifiant une équation du sixième degré, il prouve que I appartient à la droite d'EULER si et seulement si le triangle est isocèle. Il redémontre le théorème de FEUERBACH, qu'il généralise à un triangle inscrit dans une conique, en construisant une conique des 9 points semblable à la conique circonscrite et tangente à une troisième conique, elle aussi semblable à la première et tangente aux trois côtés du triangle.

L'article ouvre des perspectives vers le cas des cercles exinscrits, dont il attribue la dénomination à Simon L'HUILLIER (1812). En prouvant que la connaissance des longueurs des trois bissectrices intérieures permet de déterminer analytiquement la longueur des côtés, il écrit: «L'élimination mène à une équation très élevée, parce qu'elle renferme probablement aussi les solutions pour les bissectrices extérieures». Il montre un certain nombre de relations devenues classiques entre les rayons des cercles inscrit et exinscrits -relations que nous redémontrerons plus loin-, prouvant que la connaissance des trois rayons des cercles exinscrits suffit à déterminer r, R et S, donc l'équation admettant pour racines a, b, c. Le tout s'inscrit dans l'optique "résolution des triangles" ou comment *trois* "quantités" peuvent déterminer complètement les *côtés* d'un triangle. Mais il conçoit que, pour des raisons d'homogénéité, si ces trois quantités varient proportionnellement, les trois côtés du triangle varient dans la même proportion (il suffit de changer l'unité sans changer le triangle pour que ce soit évident). La véritable hypothèse à prendre en compte -mais il ne va pas jusque là- se résume à *deux* réels, et non pas trois.

Dans ces mêmes *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1855, Jules VIEILLE revient sur le cas du triangle isocèle, le premier de nos cas particuliers (le second a-t-il été abordé quelque part?). Il calcule explicitement les longueurs des côtés du triangle solution, dans ce cas particulier, prouvant que le triangle est constructible mais sans chercher à optimiser ladite construction.

L'article d'Émile LEMOINE, Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle ABC (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870) est bref (5 pages), et ses notations plus proches des nôtres. Il ne porte pas fondamentalement sur le problème d'Euler, mais démontre les relations : $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ (qui nous sera utile $IH^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ (à l'aide du théorème de FEUERBACH, du théorème de la médiane et de la relation d'EULER), $IG^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 6r(2R - r)\right)$ (à l'aide d'une généralisation du théorème de la médiane), en concluant par la remarque : $OI^2 = 2R.O'I$ qui nous servira. L'intérêt est qu'il généralise chacun de ces résultats aux centres et rayons des cercles *exinscrits* (en remplaçant r et I par $-r_A$ et I_A), et cite, pour conclure, l'expression *Problème d'Euler* pour désigner la résolution d'un triangle dont on connaît O, I et H, signalant que le problème serait identique en remplaçant I par I_A. Sans chercher de condition pour que le triangle existe, il montre que l'on peut facilement calculer $R = \frac{OI^2}{2O'I}$ et $r = \frac{R}{2} - O'I$, donc tracer les cercles inscrit et circonscrit et surtout la conique de cercle principal le cercle d'Euler et de foyers O et H, qui est tangente aux trois côtés du triangle. Les côtés du triangle sont à rechercher parmi les tangentes communes à cette conique et au cercle inscrit, mais...combien y a-t-il de tangentes communes ? (question qu'il n'aborde pas).

Je n'ai pas d'autre référence. Mais j'ai reçu sept réponses de lecteurs (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles ; Edgard DELPLANCHE, Créteil; René MANZONI, Le Havre;Omarjee MOUBINOOL, Paris; Charles NOTARI, Montaut; Marguerite PONCHAUX, Lille ; Pierre RENFER, Ostwald), plus ou moins complètes, mais qui, dans leur ensemble, couvrent assez bien tous les aspects du problème. Les constructions de Marguerite PONCHAUX, dans les deux cas particuliers, sont identiques à celles que je propose, la condition, dans le cas du cercle inscrit, n'a pas posé de gros problèmes, mais pour la seconde condition (cercle exinscrit), Marie-Laure CHAILLOUT l'exprime ainsi : $4OI^2 - IH^2 > \frac{3(9OI^2 - 4O'I^2)(4O'I^2 - OI^2)}{16OI^2} > 0$ (ce qui équivaut bien à la condition que je propose), Edgard DELPLANCHE décrit géométriquement l'ensemble solution dans sa globalité dans un repère différent du mien, tandis que René MANZONI et Pierre RENFER montrent comment, pour un point donné I, prouver qu'il appartient ou non audit ensemble.

Tout le monde part de la relation d'EULER et du théorème de FEUERBACH, devenus classiques même si, historiquement, ils sont issus de ce problème. La conique de foyers O et H, de cercle principal le cercle d'EULER et tangente aux trois côtés du triangle est aussi souvent invoquée, elle permet pour le moins de prouver l'unicité du triangle solution (cette conique et le cercle inscrit n'ont pas plus de quatre tangentes communes), elle explique aussi la constructibilité dans les deux cas particuliers : si I est sur un des axes de symétrie de la conique, deux des trois côtés, tangents à la conique et au cercle inscrit de centre I, se coupent sur cet axe de symétrie. Mais si I est sur le grand axe, la conique et le cercle inscrit sont tangents au point de Feuerbach, il n'y a que trois tangentes communes (triangle isocèle) alors qu'il y en a quatre si I est sur le petit axe.

On peut aussi, lorsque I est sur (OH), remarquer que (AI), (BI) et (CI) doivent être bissectrices de $\widehat{OAH}$, $\widehat{OBH}$ et $\widehat{OCH}$, ce qui entraînerait, si aucun des points A, B, C n'était sur (OH), que $\frac{OA}{HA}=\frac{OB}{HB}=\frac{OC}{HC}=\frac{OI}{HI}$ donc que le cercle d'Apollonius couperait en trois points A, B, C le cercle circonscrit.

Le fait que, si la relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$ est vérifiée, il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle de centre O et de rayon R et circonscrits au cercle de centre I et de rayon r, est bien connu depuis PONCELET, TERQUEM le mentionne dans son article de 1842, recommandant à ses lecteurs «le chapitre III de la Section IV des Propriétés projectives des figures, trésor précieux de propriétés de l'espace que l'analyse n'a pas encore explorées». L'un de ces triangles admet-il H pour orthocentre ? Marguerite PONCHAUX remarque que les pieds des hauteurs du triangle ABC appartiennent, certes, au cercle d'Euler, mais aussi à un limaçon de Pascal, podaire du cercle inscrit (de centre I et de rayon r) par rapport à H ; il suffit donc d'étudier l'intersection de ces deux courbes. On peut aussi, comme Pierre RENFER, faire appel à la topologie: l'application qui, à un triangle de notre famille, associe son orthocentre est continue et injective, l'orthocentre décrit un cercle lorsque l'on fait tourner le triangle, il le décrit donc totalement. Cela marche moins bien dans le cas du cercle exinscrit où H ne décrit qu'un arc de cercle.

LE PIVOT DU TRIANGLE

Mais je ne peux résister à l'envie de vous présenter la méthode algébrique que j'ai moi-même concoctée, qui semble originale au vu de tout ceci.

et montre l'étude du triangle sous un jour inhabituel. Ce n'est peut-être pas la plus rapide, si l'on en juge à la longueur du présent texte, mais elle ne présuppose quasiment aucune connaissance, permettant au contraire de retrouver un certain nombre de résultats classiques, et elle ouvre certaines perspectives que je n'ai pas toutes explorées.

Méthode algébrique ? Oui-da ! Car enfin, notre hypothèse, c'est un triangle OIH, dont seule est pertinente la forme, que l'on peut caractériser par *deux* réels. Nos inconnues, trois points A, B, C, la position de chacun d'eux par rapport au triangle hypothèse tenant en *deux* réels. Et l'hypothèse est *fonction symétrique* des trois inconnues. N'y a-t-il pas là tous les ingrédients pour une équation du troisième degré *à coefficients complexes* ?

Soit ABC un triangle, α, β, γ les affixes de A, B, C dans un plan des complexes choisi de telle sorte que O ait pour affixe 0 et H pour affixe 1. Le choix du repère optimal constitue, d'ailleurs, la première difficulté du problème, et celui-ci présente plus d'un avantage : d'abord, les affixes α, β, γ de A, B, C ont même module $R = |\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, ensuite le centre de gravité G du triangle ABC étant au tiers de $[OH]$, on a : $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

On peut même écrire plus précisément, en appelant A, B, C les angles du triangle : $\beta = \alpha e^{2iC}$, $\gamma = \beta e^{2iA}$, $\alpha = \gamma e^{2iB}$

donc : $$\alpha = \frac{1}{1 + e^{2iC} + e^{-2iB}}$$

$$\beta = \frac{1}{1 + e^{2iA} + e^{-2iC}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\gamma = \frac{1}{1 + e^{2iB} + e^{-2iA}}$$

ce qui entraîne $R = \dfrac{1}{\left|1 + e^{2iC} + e^{-2iB}\right|} = \dfrac{1}{\left|1 + e^{2iA} + e^{-2iC}\right|} = \dfrac{1}{\left|1 + e^{2iB} + e^{-2iA}\right|}$

Cela revient à dire : $OH^2 = R^2\left(3 + 2\cos 2A + 2\cos 2B + 2\cos 2C\right)$ **(2)**

et l'on peut présenter cela sous deux formes :

- Soit en utilisant une des multiples variantes de l'identité :

$$\sin(u + v + w) = \sin u + \sin v + \sin w - 4\sin\frac{u + v}{2}\sin\frac{v + w}{2}\sin\frac{w + u}{2}$$

$$OH^2 = R^2\,(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

relation qui n'a qu'un intérêt anecdotique : je l'avais trouvée un peu par hasard en janvier 1995, en calculant la puissance de H par rapport au cercle circonscrit, et c'est elle qui m'a conduit au présent problème.

Mais la relation (**2**) peut aussi s'écrire, et cela nous sera autrement plus utile :

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \quad \textbf{(3)}$$

car a = $BC = 2R\sin A, \ldots$

Cette relation (**3**) n'est pas nouvelle mais LEMOINE utilise deux lemmes pour la démontrer. Elle résulte classiquement de la relation beaucoup plus générale :

$$MG^2 = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \qquad \textbf{(4)}$$

Conséquence immédiate de

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2 = 3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right)$$

et donc valable pour n'importe quel point M.

D'ailleurs, l'utilisation des nombres complexes pour ce type de problèmes n'est pas sans précédent : Jacques BOUTELOUP (Rouen) m'a transmis un article de Jos. E. HOFMANN (1958) paru dans la revue suisse *l'Enseignement mathématique* : Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene «Vers une géométrie élémentaire du triangle dans le plan complexe» qui, par des calculs élémentaires comparables aux miens, redémontre bon nombre de propriétés classiques, incluant les propriétés du cercle d'EULER (FEUERBACH-KREIS), la relation d'Euler (Bezeihung von CHAPPLE-EULER, faisant référence à un texte de W. CHAPPLE de 1746), etc. Mais il se donne d'abord un plan des complexes, puis un triangle inscrit dans le cercle unité. C'est particulièrement efficace pour démontrer, par exemple, le théorème de MORLEY : si l'on appelle α^3, β^3 et γ^3 les affixes des sommets du triangle avec $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, il est facile de déterminer l'équation de toutes les trissectrices (la droite joignant, par exemple, α^3 et $\beta\gamma^2$ ayant pour équation :

$z + \alpha^3\left(\beta\gamma^2\right)\bar{z} = \alpha^3 + \beta\gamma^2$), et par là de prouver que les intersections u, v, w vérifient bien : $u + vj + wj^2 = 0$. Toutefois, ce qu'HOFMANN ne fait pas, c'est de caractériser un triangle par *un et un seul* nombre complexe, ce qui suppose que le plan des complexes servant de repère soit choisi *en fonction* du triangle.

Dans le plan que nous avons défini, posons en effet :

$$\boxed{w = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}$$

C'est ce nombre complexe w qui, étant donné le rôle central qu'il jouera dans toute la suite du problème, sera appelé désormais le **pivot** du triangle - tout comme le point W dont il est l'affixe.

Car. $w = \alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = \alpha\beta\gamma\left(\frac{\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}}{R^2}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2}$

d'où l'on déduit que $|w| = R$, donc que $\alpha\beta\gamma = w^2\overline{w}$. En d'autres termes, α, β et γ sont les trois racines du polynôme :

$$\boxed{P_0(z) = z^3 - z^2 + wz - w^2\overline{w}}$$

Pourquoi cette notation $P_0(z)$? Il est clair que ce polynôme est fonction d'un paramètre w, mais tous les polynômes que nous manipulerons à partir de maintenant seront fonction d'un paramètre, et souvent de w, cela peut donc rester sous-entendu. Par contre, nous allons introduire un certain nombre de polynômes différents, dont plusieurs joueront un rôle important. Il m'a donc semblé important de les numéroter systématiquement et de numéroter leurs coefficients en conséquence. L'optimisation des notations est, là encore, un problème délicat.

Autre remarque: le point W est un point remarquable du triangle, fonction symétrique des trois sommets, appartenant au cercle circonscrit. Mais sa caractérisation géométrique était pour moi une énigme : W est l'intersection des trois symétriques de la droite d'EULER par rapport aux côtés du triangle. C'est donc également le foyer de la parabole tangente aux trois côtés du triangle et admettant pour directrice la droite d'EULER. C'est aussi l'isogonal du point à l'infini d'une perpendiculaire à la droite d'EULER, et l'isogonal du point à l'infini de la droite EULER a pour affixe $-w$.

Jacques BOUTELOUP démontre cela à partir des propriétés des droites de SIMSON, et les propriétés classiques de la parabole montrent que ces caractérisations sont équivalentes. Mais chacune d'elles peut se trouver algébriquement et indépendamment par un calcul élémentaire.

Par exemple, la première caractérisation signifie que le symétrique de W par rapport à l'un quelconque des côtés du triangle est sur la droite d'EULER, donc a une affixe réelle. Or, si $w = \alpha + z(\beta - \alpha)$, le symétrique de W par rapport à (AB) a pour affixe: $\alpha + \overline{z}(\beta - \alpha) = \alpha + \left(\frac{\overline{w} - \overline{\alpha}}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}\right)(\beta - \alpha) = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{w}$,

car $(\overline{\alpha} + \overline{\beta})\alpha\beta = -R^2(\beta - \alpha)$.

Et $\alpha + \beta = 1 - \gamma = 1 - \frac{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}{\overline{w}}$ car $\gamma\overline{w} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}(\gamma + \alpha + \beta)$.

Je laisse le soin au lecteur de prouver, par des calculs similaires, les deux autres caractérisations.

En outre, en s'appuyant sur la solution par Charles Notari de l'énoncé n° 167, Jacques Bouteloup signale que, si les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit à ABC coupent en A_1, B_1, C_1 les côtés opposés (BC), (CA) et (AB) respectivement, W est le point commun aux quatre cercles circonscrits à ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 et A_1B_1C.

En fait, la seule difficulté de cette approche est d'abandonner la notion *physique* de triangle caractérisé par trois *longueurs* soumises à des contraintes d'homogénéité ou, pour le moins, caractérisé par des *grandeurs mesurables*, pour ne plus y voir que des *nombres*, objets abstraits d'un calcul formel. C'est l'antagonisme entre *triangle* et *équation* qui a fait de ce problème d'EULER un problème difficile. Le fait que si α, β et γ sont les affixes des sommets du triangle, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ soit l'affixe d'un point remarquable W, suffit à réconcilier les deux. On y perd en intuition visuelle, nécessaire à la découverte de résultats nouveaux. On y gagne, en revanche, pour la vérification calculatoire de résultats connus.

A la réflexion, w ne représente ni une grandeur, ni un point, mais le *pivot* du triangle. Dès lors qu'on disposera d'*informations* suffisantes pour calculer w, qu'il s'agisse des trois points O, H, I, de trois autrespoints remarquables, ou de n'importe quelles "quantités" liées au triangle, cette équation abstraite $P_0(z) = 0$, dont ni les coefficients ni les racines ne sont des grandeurs mesurables, nous fournira un et un seul triangle solution.

Seulement voilà : n'importe quel nombre ne peut pas être pivot d'un triangle ! Le seul fait que $|w| = R$ impose que $|w| > 1/3$, car G est nécessairement intérieur au cercle circonscrit. La valeur limite $w = 1/3$ jouera d'ailleurs un grand rôle par la suite, c'est la seule valeur pour laquelle le polynôme P_0 admet une racine triple. Mais, à quoi reconnaît-on les w pivots des w non pivots ? Au simple fait que les trois racines, distinctes, sont ou non de même module $R = |w|$. Il est clair que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que O soit le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les racines, c'est également une condition nécessaire et suffisante pour que H soit l'orthocentre de ce même triangle, puisque son centre de gravité est toujours G, indépendamment de toute condition. En définitive, les pivots ne sont rien d'autre que les valeurs de w pour lesquelles les trois racines de l'équation forment un triangle admettant O pour centre du cercle circonscrit et H pour orthocentre. Signalons que, dans toute la suite du problème, R désignera toujours le module de w, même dans le cas où w n'est pas pivot, donc où les racines n'ont pas pour module R.

Il peut sembler surprenant que pour une telle infinité de valeurs du paramètre w, les trois racines d'une équation aussi simple aient même module. Mais cela tient au fait que, si z est une racine non nulle de P_0, alors $\frac{R^2}{\overline{z}}$ est lui aussi racine.

En effet, $P_0\left(\frac{w\overline{w}}{\overline{z}}\right) = -\frac{w^2\overline{w}}{\overline{z}^3}\overline{P_0(z)}$.

Donc, si l'on exclut le cas trivial où $R = w = 0$, soit les trois racines α, β, et γ ont même module et vérifient $\frac{R^2}{\overline{\alpha}} = \alpha$, $\frac{R^2}{\overline{\beta}} = \beta$, $\frac{R^2}{\overline{\gamma}} = \gamma$, soit l'une d'elles au moins, par exemple α, n'a pas pour module R, auquel cas $\frac{R^2}{\overline{\alpha}} \neq \alpha$, donc $\frac{R^2}{\overline{\alpha}}$ est l'une des deux autres racines, par exemple β, qui n'a pas non plus pour module R, la troisième racine γ ayant, elle, pour module R car $|\alpha\beta\gamma| = R^3$. En particulier, dans ce second cas, les trois racines sont nécessairement distinctes.

Dans ce second cas, α/β est un réel, strictement positif et différent de 1, β/γ et γ/α sont des complexes conjugués (éventuellement des réels égaux), alors que dans le premier, α/β, β/γ et γ/α sont des complexes de module 1 (éventuellement égaux à ± 1). Donc, si α, β, γ ont même module, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$ sont trois réels appartenant à $[-2, 2]$, alors qu'en cas contraire, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ est un réel strictement supérieur à 2, $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$ étant deux complexes conjugués ou deux réels égaux. Le polynôme :

$$P_1(z) = \left(z - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)\right)$$

est donc dans tous les cas un polynôme à coefficients réels, et il change une et une seule fois de signe sur $]2, +\infty[$ si les racines α, β et γ *n'ont pas* même module, alors qu'il ne change pas de signe sur $]2, +\infty[$ si elles ont même module.

En d'autres termes, l'équation $P_0(z) = 0$ admet trois racines de même module si et seulement si $P_1(2) \geqslant 0$. Or,

$$P_1(2) = -\left(\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}\frac{(\beta-\gamma)^2}{\beta\gamma}\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\gamma\alpha}\right) = -\left(\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\right)^2 \quad \textbf{(5)}$$

$$= -\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right)^2$$

$$= 4\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)-\left((\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3\right)^2$$

On sait que $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{R^2}$. Par ailleurs,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right) = 3+\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)+\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma},$$

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{\alpha\beta\gamma} - 3(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+3$$

et de même

$$\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right) = \alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^3 - 3(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+3$$

Donc : $P_1(2) = 27 - \frac{18}{R^2} + 4\frac{(w+\bar{w})}{R^4} - \frac{1}{R^4}$

Dès lors, la condition nécessaire et suffisante pour que les trois racines de P_0 aient même module peut s'écrire :

$$\boxed{27\,R^4 - 18\,R^2 + 4\,(w+\bar{w}) - 1 \geqslant 0}$$

Ou encore : $(9R^2-1)^2 \geqslant 4\,|3w-1|^2$.

Si l'on pose $w = \frac{1+\rho\, e^{it}}{3}$ (donc $R^2 = \frac{1+\rho^2+2\rho\cos t}{9}$) cette inégalilté est vérifiée : si $\rho = 0$, si $\rho + 2\cos t \geqslant 2$ ou si $\rho + 2\cos t \leqslant -2$, ce dernier cas étant à exclure si $\rho > 0$. W doit donc être à l'extérieur ou sur un limaçon de Pascal que nous appellerons $(\mathcal{L})$, inverse de la parabole de foyer G et de sommet O' dans l'inversion de pôle G qui transforme O en H. Il est tangent à la médiatrice (Δ) de $[OH]$ en deux points J_1 et J_2 appartenant également au cercle (Γ) de diamètre $[GH]$. Si $\rho = 0$, $w = 1/3$, on se trouve au point de rebroussement de $(\mathscr{L})$ et l'équation admet 1/3 pour racine triple.

D'ailleurs, que représente au juste cette frontière ? Tout simplement le lieu des points W pour lesquels le polynôme P_0 admet une racine double. C'est clair, par exemple, sur la relation (5). Cette frontière est donc à exclure de notre ensemble des pivots, car les trois racines de l'équation ne forment plus un triangle.

On aurait donc trouvé ce même lieu en calculant, par la méthode de Cardan, le discriminant du polynôme P_0 :

$$4\left(w - \frac{1}{3}\right)^3 + 27\left(-w^2\overline{w} - \frac{2}{27} + \frac{w}{3}\right)^2 = w^2\left(27w^2\overline{w}^2 - 18\, w\overline{w}\, 4\,(w + \overline{w}) - 1\right)$$

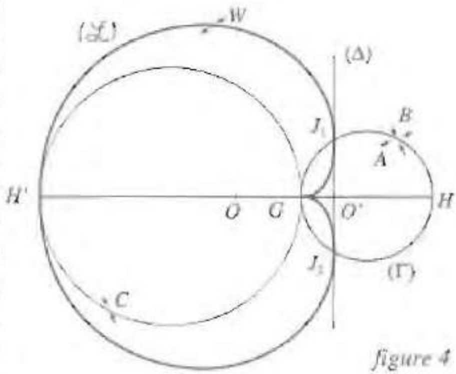


figure 4

le w^2 n'étant là que pour nous rappeler qu'en un point isolé, $w = 0$, que nous avons exclu - et que nous continuerons d'exclure tout au long du problème , il y a également une racine double. Mais en outre, et c'est autrement plus intéressant, ce lieu frontière est inclus dans l'ensemble des w pour lesquels les trois racines ont même module. Si $\alpha = \beta$, $\gamma = 1 - 2\alpha$, donc la racine double appartient au cercle : $|\alpha| = |1 - 2\alpha|$, lieu des points A tels que $AO = 2AO'$, donc au cercle (Γ) de diamètre $[GH]$. La troisième racine appartient, elle, au cercle de diamètre $[GH']$. Et $w = \alpha\beta + \beta\gamma + \beta\alpha = \alpha(2 - 3\alpha)$ soit, si l'on pose $\alpha = \dfrac{2 - e^{it}}{3}$,

$w = e^{it}\left(\dfrac{2 - e^{it}}{3}\right)$ ce qui correspond bien au limaçon de Pascal précédemment trouvé. En outre, $1 - 3w = (1 - 3\alpha)^2$, le paramètre t est donc le même que précédemment.

Rien d'étonnant que ce soit précisément en ce lieu des w pour lesquels P_0 admet une racine double que se situe la frontière entre les pivots et les non-pivots, car, comment passerait-on de $\dfrac{R^2}{\overline{\alpha}} = \alpha$ à $\dfrac{R^2}{\overline{\alpha}} = \beta$ en un point où α serait différent de β ? C'est également en ce lieu, et en ce lieu seulement, que l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle des racines cessent d'être des fonctions continues de w. Lorsque w atteint cette frontière, $A = B$ et le centre du cercle circonscrit se perd sur la médiatrice de $[AC]$ qui passe par O.Si W pénètre le limaçon, C continue sur sa lancée, pénétrant lui aussi dans sa zone interdite– le disque de diamètre $[GH']$ - , tandis que les deux racines A et B qui se sont percutées, rebondissent perpendiculairement, appartenant non plus à un même cercle de centre O, mais à une même droite passant par O, ce qui rejette le centre du cercle circonscrit au triangle ABC diamétralement à l'opposé de O sur le cercle passant par C, O et le mileu de $[AB]$. Et l'une de ces racines va rejoindre C en O lorsque w tend vers 0.

Pourquoi le disque de diamètre $[GH']$ est-il une zone interdite pour C (ou n'importe quel sommet du triangle ABC)? Simplement parce que c'est le lieu des points C tels que $CH > 2CO$. Or, l'étude des angles d'un des triangles ACH ou BCH montre instantanément que $CH = 2R\cos C$. Mais ce résultat élémentaire m'a suggéré un exercice qui, hors contexte, peut sembler difficile. C étant extérieur au cercle de diamètre $[GH']$, l'angle $\widehat{GCH'}$ est aigu, ce qui entraîne que G et H' sont du même côté de la perpendiculaire en C à (GC). Or, ceci est tout autant valable pour les deux autres perpendiculaires (en A à (GA) et en B à (GB)) ; ces trois perpendiculaires forment un triangle dont G est point de Lemoine (isobarycentre de ses projections orthogonales sur les côtés). G est donc intérieur audit triangle, tout comme H'. D'où l'énoncé, en changeant radicalement les notations :

Soit ABC un triangle quelconque, K son point de Lemoine, A', B', C' les projections orthogonales de K sur les côtés du triangle, Ω le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. Montrer que le point M défini par $\overrightarrow{KM} = 4\overrightarrow{K\Omega}$ est intérieur au triangle ABC.

figure 5

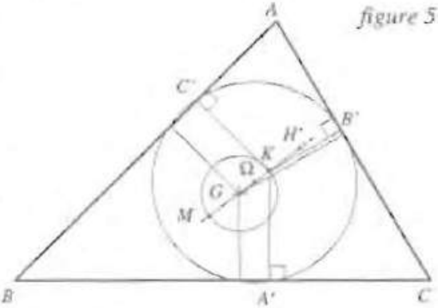


Figure 5 : H' orthocentre de $A'B'C'$ vérifie :

$$H'A' = 2\Omega A'|\cos A'|$$

donc en particulier $H'A' < 2\Omega A'$. Donc A' est extérieur au cercle de diamètre $[MK]$ et $\widehat{MA'K}$ est aigu.

Pour utiliser ce qui précède, il faut bien se convaincre que les triangles ABC que nous étudions, représentent bien **tous** les triangles possibles, à l'exclusion des triangles équilatéraux ; nous nous contentons d'adapter le repère au triangle. Néanmoins, Marie Laure CHAILLOUT a fourni une résolution directe de l'exercice ci-dessus. Le centre de gravité G de ABC est isogonal de K, et les projections orthogonales de ces deux points sur les côtés sont sur un même cercle de centre le milieu de $[GK]$. D'ailleurs, l'ellipse de foyers G et H admettant ce cercle pour cercle principal est tangente aux trois côtés du triangle, rappelle Jacques BOUTELOUP. Ω étant le milieu de $[GK]$, il suffit de prouver que le symétrique de K par rapport à G est intérieur au triangle, ce qu'on peut faire au moyen des coordonnées barycentriques ...ou, comme Edgard DELPLANCHE, en écrivant l'équation barycentrique de l'ellipse et en prouvant que M est intérieur à l'ellipse.

En conclusion, et pour revenir à notre limaçon de Pascal, w est pivot d'un triangle, ce qui signifie que les trois racines de P_0 sont les affixes des sommets d'un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre, si et seulement si W est à l'extérieur du limaçon de Pascal ($\mathscr{L}$), ce qui peut s'écrire indifféremment :

$$\left.\begin{array}{ll} & 27R^4 - 18R^2 + 4(w + \overline{w}) - 1 > 0 \\ \text{ou :} & (9R^2 - 1)^2 > 4|3w - 1|^2 \\ \text{ou même} & 9R^2 - 1 > 2|3w - 1| \\ \text{en posant} & R = |w|. \end{array}\right\} \quad \mathbf{(6)}$$

D'aucuns objecteront que, quel que puisse être l'intérêt théorique de cette approche billaroïde, par exemple pour résoudre l'énoncé 245 des problèmes de l'APMEP, en pratique, pour ce qui est du problème d'Euler et de la résolution effective d'un triangle dont on conaît trois points remarquables, il serait plus commode de disposer d'une équation *à coefficients réels*.

Objection retenue. Considérons donc le polynôme à coefficients réels :

$$P_0(z)\overline{P_0}(z) = z^6 - 2z^5 + (w + \overline{w} + 1)z^4 - (w + \overline{w})(1 + R^2)z^3$$
$$+ (w + \overline{w} + 1)R^2z^2 - 2R^4z + R^6$$

Dans la mesure où les racines α, β, γ de P_0 ont toutes trois pour module R, ce polynôme peut s'écrire :

$$P_0(z)\overline{P_0}(z) = \left(z^2 + R^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z\right)\left(z^2 + R^2 - (\beta + \overline{\beta})z\right)\left(z^2 + R^2 - (\gamma + \overline{\gamma})z\right)$$
$$= \left(z^2 + R^2\right)^3 - s_2z\left(z^2 + R^2\right)^2 + p_2z^2\left(z^2 + R^2\right)^2 - q_2z^3$$

en appelant : $\quad P_2(z) = z^3 - s_2z^2 + p_2z - q_2$

le polynôme $\quad P_2(z) = \left(z - (\alpha + \overline{\alpha})\right)\left(z - (\beta + \overline{\beta})\right)\left(z - (\gamma + \overline{\gamma})\right)$.

Une identification rapide montre que

$$P_2(z) = z^3 - 2z^2 + \left(w + \overline{w} + 1 - 3R^2\right)z + \left(4R^2 - \left(1 + R^2\right)(w + \overline{w})\right)$$

Or, $\quad a^2 = |\beta - \gamma|^2 = 4R^2 - |\beta + \gamma|^2 = 4R^2 - |1 - \alpha|^2$

$$= \left(3R^2 - 1\right) + \left(\alpha + \overline{\alpha}\right)$$

Donc le polynôme $P_3(z) = (z - a^2)(z - b^2)(z - c^2)$ peut s'écrire

$$P_3(z) = P_2(z - (3R^2 - 1))$$

soit

$$P_3(z) = z^3 - \left(9R^2 - 1\right) z^2 + \left(27R^4 - 9R^2 + 4\,(w + \overline{w})\right) z \qquad \textbf{(7)}$$
$$- R^2\left(27R^4 - 18R^2 + 4\,(w + \overline{w}) - 1\right)$$

On retrouve là, et ce n'est pas une surprise, la relation **(3)** : $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - 1$. On retrouve aussi $a^2 b^2 c^2 = R^6 P_1(2)$. D'après la relation **(5)**, il est clair qu'on devait avoir $a^2 b^2 c^2 = R^6 |P_1(2)|$, mais en outre nous sommes dans le cas où α, β, γ ont même module, donc où $P_1(2) \geqslant 0$. Si l'on se souvient que l'aire du triangle $S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \frac{abc}{4R}$, on a même plus précisément: $16S^2 = 27R^4 - 18R^2 + 4\,(w + \overline{w}) - 1$ **(8)**.

Et comme, d'autre part :

$$27R^4 - 18R^2 + 4\,(w + \overline{w}) - 1 = 4\left(27R^4 - 9R^2 + (w + \overline{w})\right) - \left(9R^2 - 1\right)^2$$

on peut même en déduire de la formule de Héron, car $27R^4 - 9R^2 + (w + \overline{w}) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ d'après **(7)**. En définitive, la seule originalité de cette relation **(7)**, c'est le pivot w, ce nombre *complexe* que l'on pourra calculer à partir du triangle OIH et qui permet de calculer non seulement R, mais aussi S, l'intermédiaire fondamental du problème d'Euler.

Notons au passage que

$$|3w - 1|^2 = \frac{1}{4}\left(\left(9R^2 - 1\right)^2 - 48S^2\right) = a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2.$$

Remarquons également que c'est seulement lorsque α, β, et γ ont même module, donc lorsque $27R^4 - 18R^2 + 4\,(w + \overline{w}) - 1 \geqslant 0$, que ce polynôme P_3 admet pour racine les carrés des longueurs des côtés du triangle ABC. Si la condition n'est pas satisfaite, le coefficient constant q'_3 n'est guère modifié : d'après **(5)**, il reste égal à $q'_3 = R^2\left|27R^4 - 18R^2 + 4(w + \overline{w}) - 1\right|$

Mais le coefficient s'_3, par exemple, n'est plus du tout égal à $(9R^2 - 1)$, mais à $3\left(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma}\right) - 1$.

Comme on a alors $\alpha\overline{\beta} = \overline{\alpha}\beta = \gamma\overline{\gamma} = R^2$, cela peut s'écrire :

$3R^2\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) + \left(3R^2 - 1\right)$ où $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$ est la racine simple réelle de P_1 ; nous avons calculé, en **(5)**, la valeur $P_1(2)$, nous pouvons plus facilement encore, à l'aide de :

$$\frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\beta^2 + \gamma^2\right)\left(\gamma^2 + \alpha^2\right)}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) - 1 \cdot$$

calculer $P_1(0) = 1 - \dfrac{4}{R^2} + \dfrac{2(w + \overline{w})}{R^4} - \dfrac{1}{R^4}$ et, de manière analogue :

$$P_1(-2) = -\left(\frac{1}{R^2} - 1\right)^2$$

Donc :

$$P_1(z) = z^3 + \left(3 - \frac{1}{R^2}\right)z^2 + \left(3 - \frac{5}{R^2} + \frac{w + \overline{w}}{R^4}\right)z + \left(1 - \frac{4}{R^2} + \frac{2(w + \overline{w})}{R^4} - \frac{1}{R^4}\right)$$

Si $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$ est la racine simple réelle du ce polynôme P_1,

$3R^2\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) + \left(3R^2 - 1\right)$ est la racine simple réelle du polynôme :

$$s^3 - 3\rho^2 s - 2\rho^2(2\sin^2 t - \rho\cos t)$$

et posant $w = \dfrac{1 + \rho e^{it}}{3}$. Ce n'est pas impossible à résoudre ! On voit facilement que $(-\rho)$ est racine double si w est sur le limaçon $(\mathcal{L})$ $(\rho = 2 - 2\cos t)$ ou, si w est réel inférieur à 1/3 $(\cos t = -1)$, et que c'est bien pour w non réel intérieur au limaçon que ce polynôme admet une seule racine réelle ; mais cette racine n'est qu'un des coefficients de l'équation dont les racines sont les carrés des longueurs des côtés du triangle ! Nous avons eu beaucoup de chance que, dans le cas où w est pivot, cela se simplifie si bien, car dès lors que l'on mélange des complexes et leurs conjugués dans une même équation, on peut vite arriver à des calculs prohibitifs…

Par ailleurs, la relation **(7)** montre clairement que, pour que P_3 admette trois racines qui soient les carrés des longueurs des côtés d'un triangle, il est *nécessaire* que $27R^4 - 18R^2 + 4(w + \overline{w}) - 1 > 0$, donc que w soit extérieur à $(\mathscr{L})$. Mais est-ce suffisant? Peut-on affirmer, lorsque cette condition est remplie, que le polynôme P_3 admet trois racines strictement positives dont les racines carrées vérifient l'inégalité triangulaire?

Paradoxalement, cette seconde condition est plus facile à vérifier que la première. Car si a, b, c sont trois réels strictement positifs, trois au moins des quatre réels: $a + b + c$, $a + b - c$, $a - b + c$, $-a + b + c$ sont strictement positifs. Il suffit donc, pour que l'inégalité triangulaire soit vérifiée (les trois points A, B et C étant non alignés), que le produit des quatre soit strictement positif, ce qui équivaut bien à la condition **(6)**

$$27R^4 - 18R^2 + 4(w + \overline{w}) - 1 > 0.$$

Quant aux trois racines positives, il suffit d'écrire

$$P_3(z) = z^3 - sz^2 + \left(\frac{s^2 - \rho^2}{3}\right)z - \left(\frac{s+1}{9}\right)\left(\frac{s^2 - 4\rho^2}{3}\right)$$

en posant $s = 9R^2 - 1$ et $\rho = |3w - 1|$ pour constater que

$$P'_3(z) = 3\left(z - \frac{s+\rho}{3}\right)\left(z - \frac{s-\rho}{3}\right).$$

En 0, P_3 est négatif si $27R^4 - 18R^2 + 4(w + \overline{w}) - 1 > 0$.

Au maximum local $\frac{s-\rho}{3}$, on a:

$$P_3\left(\frac{s-\rho}{3}\right) = \left(\frac{s-\rho}{3}\right)^2\left(\frac{s+2\rho}{3}\right) - \left(\frac{s+1}{9}\right)\left(\frac{s^2-4\rho^2}{3}\right) = \frac{(s+2\rho)\left(2\rho - (s-\rho^2)\right)}{27}$$

et de même $P_3\left(\frac{s+\rho}{3}\right) = \frac{(s-2\rho)\left(-2\rho - (s-\rho^2)\right)}{27}$

Or, $s - \rho^2 = (3w - 1) + (3\overline{w} - 1)$ donc $|s - \rho^2| \leqslant 2\rho$ pour tout w, l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour w *réel*.

$s + 2\rho$ est toujours positif, nul seulement pour $w = 1/3$, tandis que, d'après **(6)**, $s - 2\rho > 0$ équivaut à w pivot (extérieur à $(\mathscr{L})$).

En résumé, le polynôme P_3 admet une racine double dans deux cas :
1) Si w est réel : $P_3(z) = (z - w(3w-1))^2\,(z - (w+1)(3w-1))$ (si w est extérieur à $(\mathscr{L})$, donc à $[-1\ ,\ 1/3]$, le triangle ABC est alors isocèle, mais la racine double persiste si w inférieur à $[-1\ ,\ 1/3]$, auquel cas, elle n'a plus aucun rapport avec les carrés des côtés des longueurs des côtés de ABC, et la troisième racine est négative).
2) Si w est sur $(\mathscr{L})$: $P_3(z) = z(z - |3w-1|)^2$ (le triangle est dégénéré : deux sommets confondus).

Il admet trois racines réelles positives distinctes si w est extérieur à $(\mathscr{L})$ et non réel, il admet une seule racine réelle (négative) si w est intérieur à $(\mathscr{L})$ et non réel. La condition **(6)** est donc bien nécessaire et suffisante pour que les trois racines de P_3 soient les carrés des longueurs des côtés d'un triangle.

Mais ce polynôme P_3, ce n'est pas le polynôme $P_4(z) = z^3 - s_4 z + p_4 z - q_4$, celui qu'EULER avait trouvé et dont les racines étaient, non pas a^2, b^2 et c^2, mais a, b, c… Peut-on déduire P_4 de P_3 ? Malheureusement non ! et nous verrons plus loin pourquoi… il est même assez difficile de déduire P_3 de P_4.

Toutefois, on peut déterminer P_4 par une démonstration *géométrique* relativement simple. Nous supposerons, une fois de plus, que R est connu, et nous exclurons le cas du triangle isocèle - qui ne pose guère de problème dans la mesure où R est connu.

La démonstration géométrique de la relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$ est classique : elle revient à calculer la puissance de I par rapport au cercle circonscrit à ABC. Les bissectrices (BI) et (BI_A), tout comme (CI) et (CI_A), étant perpendiculaire, B et C sont sur le cercle de diamètre $[II_A]$, dont le centre J_A appartient donc à la médiatrice de $[BC]$. Or, cette médiatrice, tout comme la bissectrice intérieure (II_A) de l'angle en A, coupe le cercle circonscrit à ABC au milieu de l'arc BC ne contenant pas A : c'est donc nécessairement là que doit se trouver J_A (le milieu de l'autre arc BC étant, par un raisonnement analogue, le milieu de $[I_B I_C]$). On a donc :

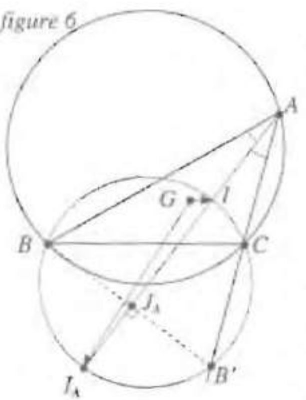
$$J_A I = J_A I_A = J_A B = J_A C = 2R \sin\frac{\widehat{A}}{2}$$

Par ailleurs, $r = IA \sin\frac{\widehat{A}}{2}$ d'où $\overline{IA}.\overline{IJ_A} = -2\,Rr = OI^2 - R^2$ et l'on prouve pareillement que $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$.

Comme la surface S du triangle vaut : $S = \dfrac{abc}{4R} = r\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$, on a:

$q_4 = abc = 2Rr(a + b + c) = (R^2 - OI^2)(a + b + c)$, et comme, en outre, $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2$, il suffira de déterminer : $p_4 = ab + bc + ca$ pour en déduire : $(a + b + c)^2$, donc $s_4 = (a + b + c)$, donc $q_4 = abc$, donc le polynôme P_4.

figure 6



Intéressons-nous, pour ce faire, à la puissance de G par rapport au cercle de centre J_A passant par B, I, C. Elle vaut, par définition : $GJ_A^2 - J_AI^2 = \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GI_A}$.

Mais, d'après la relation (4),

$$GJ_A^2 = \frac{J_AA^2 + J_AB^2 + J_AC^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GI_A} = \frac{J_AA^2 - J_AI^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

puisque $J_AB = J_AC = J_AI$.

Or, $J_AA^2 - J_AI^2$ est la puissance de A par rapport à ce même cercle, et elle vaut donc bc dans la mesure où le symétrique B' de B par rapport à la bissectrice (AJ_A) appartient au cercle de centre J_A et à la droite (AC). On a donc :

$$bc = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 3\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GI_A}$$

et si l'on applique ce même résultat à I_B et I_C,

$$ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 + 3\overrightarrow{GI}\left(\overrightarrow{GI_A} + \overrightarrow{GI_B} + \overrightarrow{GI_C}\right).$$

Or, nous avons été 40 à le trouver en réponse à l'énoncé 136 de la présente rubrique, mais cela résulte immédiatement du début de notre démonstration : O est l'isobarycentre de I, I_A, I_B et I_C, de sorte que :

$$ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 + 3\overrightarrow{GI}\left(4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GI}\right)$$

et l'on peut écrire cela : ou bien

$$3\overrightarrow{GI}\left(4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GI}\right) = 6\left(GI^2 + GO^2 - \left(\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GO}\right)^2\right) - 3GI^2$$

ce qui donne les coefficients trouvés par Euler, notamment :

$$(a+b+c)^2 = 27R^2 - 12OI^2 - 15OG^2 + 6GI^2$$

ou encore : $$3\overrightarrow{GI}\left(4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GI}\right) = \left(3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH}\right)\left(-\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH}\right)$$

$$= OH^2 - 3OI^2 - 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OH}$$

ce qui donne, dans notre plan des complexes, en appelant u l'affixe de I :

$$p_4 = ab + bc + ca = 9R^2 - 3u\bar{u} - (u + \bar{u})$$

donc : $s_4^2 = (a+b+c)^2 = 27R^2 - 6u\bar{u} - 2(u+\bar{u}) - 1$ **(9)**

sans oublier que $q_4 = \left(R^2 - u\bar{u}\right) s_4$.

Il est intéressant de noter qu'une étude identique de la puissance de G par rapport au cercle de diamètre $[I_B I_C]$ nous aurait conduits à :

$$-bc = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3\overrightarrow{GI_B}\overrightarrow{GI_C}$$

Si bien qu'en posant :

$$x = \frac{3}{4}\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{H'I} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{GI}\left(4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GI}\right)$$

$$x_A = \frac{3}{4}\overrightarrow{GI_A}.\overrightarrow{H'I_A},\ x_B = \frac{3}{4}\overrightarrow{GI_B}.\overrightarrow{H'I_B},\ x_C = \frac{3}{4}\overrightarrow{GI_C}.\overrightarrow{H'I_C}$$

on a : $$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= x + x_A + x_B + x_C \\ -bc &= x + x_A - x_B - x_C \\ -ca &= x - x_A + x_B - x_C \\ -ab &= x - x_A - x_B + x_C \end{aligned}$$

x, x_A, x_B, x_C étant strictement positifs.

LE CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT

Mais il est grand temps d'aborder la seconde partie de notre démonstration: le calcul de w à partir du triangle OIH, donc à partir de l'affixe u de I dans notre plan des complexes.

Comme chacun sait, l'étude des angles du triangle AIB ou du triangle AIC prouve que $IA = 4R \sin\frac{\widehat{B}}{2} \sin\frac{\widehat{C}}{2}$, et si l'on étudie en outre l'angle

$\widehat{OAB}$ ou $\widehat{OAC}$, on a : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}) = \dfrac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2}$, ce qui peut s'écrire complexement : $u - \alpha = -4\alpha \sin\dfrac{B}{2} \sin\dfrac{C}{2} e^{i\left(\frac{C-B}{2}\right)}$ soit :

$$u = \alpha\left(e^{iC} + e^{-iB} - e^{i(C-B)}\right) = \alpha e^{i(C-B)}\left(e^{iB} + e^{-iC} - 1\right)$$

$$u^2 = \alpha^2 e^{2i(C-B)}\left(e^{2iB} + e^{-2iC} + 1 - 2\left(e^{-iC} + e^{iB} - e^{i(B-C)}\right)\right)$$

En se rappelant les relations **(1)**, on a donc :

$$u^2 = \beta\gamma\left(\frac{1 - 2\overline{u}}{\overline{\alpha}}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2}(1 - 2\overline{u}) = w(1 - 2\overline{u})$$

ce qui entraîne : $$\boxed{w = \frac{u^2}{1 - 2\overline{u}}} \quad \textbf{(10)}$$

sous réserve que $u \neq 1/2$.

Et voilà qui est fait ! Si l'on s'en tient aux modules, nous retrouvons là le théorème de Feuerbach : connaisant la relation d'Euler $|u|^2 = R^2 - 2Rr$ et sachant que $|w| = R$, on a bien $|1 - 2u| = R - 2r$ donc $O'I = \dfrac{R}{2} - r$. Mais nous avons bien plus que cette égalité de modules, nous avons w, nombre complexe, le pivot du triangle, qui permet de calculer les coefficients des polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 (mais pas P_4 !), en tout cas plus qu'il n'en faut pour résoudre explicitement notre triangle ABC.

Reste à trouver une condition portant sur u pour que $w = \dfrac{u^2}{1 - 2\overline{u}}$ soit bien le pivot d'un triangle (il suffit de substituer cette expression dans l'une des inégalités **(6)**…) et à s'assurer que u est bien l'affixe du centre du cercle inscrit dans le triangle ainsi déterminé ! Car enfin, n'existe-t-il pas plusieurs racines distinctes à l'équation **(10)** $\dfrac{u^2}{1 - 2\overline{u}} = w$?

NDLR-Nous ne publions, dans ce numéro, que la solution du problème 244 et la première partie de celle du 245. Ce travail si remarquable mérite d'être publié intégralement, mais, pour des raisons de place, nous sommes obligés de le faire sur deux numéros. La suite de cette démonstration paraîtra donc dans le n°409.