# La quadrature du rectangle

**Jean Barbé et Renaud Palisse**
Paris

## I - Différences successives

Soient deux réels $y_0 > x_0 > 0$, on définit deux suites par les relations suivantes :
$x_{n+1} = \min(x_n, y_n - x_n)$, et $y_{n+1} = \max(x_n, y_n - x_n)$ : si $R_N$ désigne un rectangle de largeur $x_n$ et de longueur $y_n$, $R_{N+1}$ est obtenu en découpant dans $R_N$ un carré de côté $x_n$…

Les suites $(x_n, y_n)$ et $(y_n)$ sont décroissantes et à valeurs positives, donc elles convergent, respectivement vers $x$ et $y$ ; comme $x_{n+1} + y_{n+1} = y_n$, on a $x + y = y$, donc $x = 0$. Comme $x_{n+1} + y_{n+1} = (y_n, - x_n)x_n$, on a :

$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k - \sum_{k=0}^{n} x_k^2$ ; d'où $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = x_0 y_0 - x_{n+1} y_{n+1}$, identité dont dont l'interprétation géométrique est évidente et qui donne, en passant à la limite : $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = x_0 y_0$ (1).

De même, comme $x_{n+1} + y_{n+1} = y_n$, on a : $\sum_{k=1}^{n+1} x_k + \sum_{k=1}^{n+1} y_k = \sum_{k=0}^{n} y_k$ ;

d'où $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = y_0 - y_{n+1}$ ;

puis, en passant à la limite, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = y_0 - y$ (2).

L'interprétation géométrique de cette identité est moins évidente ; en outre, on aimerait connaître plus précisément la valeur de $y$...

## II - Une caractérisation de la commensurabilité

Si $y > 0$, alors, à partir d'un certain rang, on aura : $y_n - x_n > x_n$ (car $x_n \to 0$) ; donc $y_{n+1} = y_n - x_n$ et $x_{n+1} = x_n$ à partir d'un certain rang ; ainsi la suite $(x_n)$ est stationnaire, or, elle converge vers 0, on aura donc $x_n = 0$ à partir d'un certain rang. Soit $N$ le premier indice annulant la largeur ; le rectangle $R_{N-1}$ est un carré de côté $a > 0$ ; quitte à effectuer une homothétie, on peut supposer $a = 1$ ; or il est clair que si $x_k$ et $y_k$ sont des entiers, il en est de même de $x_{k-1}$ et de $y_{k-1}$... Il s'ensuit que $x_0$ et $y_0$ sont commensurables.

Réciproquement, si $x_0$ et $y_0$ sont commensurables, on peut supposer, quitte à effectuer une homothétie, que $x_0$ et $y_0$ sont des entiers. Alors les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont à valeurs entières ; or, elles sont convergentes, donc elles sont stationnaires. Soit $N$ le premier indice annulant la largeur, $R_{N-1}$ est alors un carré, de côté $y > 0$.

Conclusion :

$y = 0 \Leftrightarrow x_0$ et $y_0$ sont incommensurables $\Leftrightarrow$ le découpage est infini.

On trouvera ce résultat, exposé de façon légèrement différente, dans [G], page 100.

On pourra éventuellement se reporter au même ouvrage, page 67, pour une démonstration du résultat suivant, bien connu depuis Euclide :

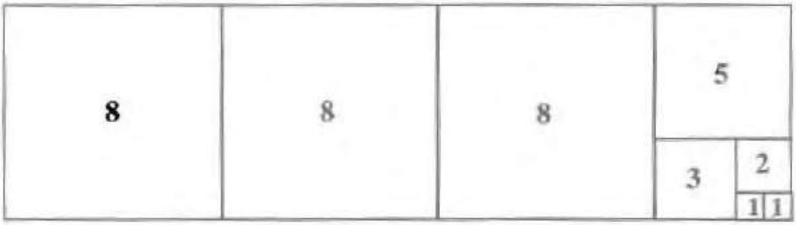
Si $x_0$ et $y_0$ sont des entiers, le côté du dernier carré est le plus grand diviseur commun de $x_0$ et $y_0$.

## III - Aspects géométriques de l'algorithme d'Euclide

En fait, la méthode des différences successives revient à effectuer, dans l'algorithme d'Euclide, la division euclidienne de $y_n$ par $x_n$ en regardant "en $y_n$ combien de fois $x_n$"...

A chaque division euclidienne correspond un "renversement" des rectangles, c'est-à-dire un pas où $y_{n+1} = x_n$ et $x_{n+1} = y_n - x_n$, sauf pour la

dernière qui "tombe juste" et ne donne que des carrés…
Par exemple, pour $x_0 = 8$ et $y_0 = 29$, on a 4 renversements.




Si l'on cherche le rectangle "le plus petit possible" donnant lieu à exactement $r$ renversements, il apparaît qu'à chaque pas, on doit avoir un renversement… En effet, partons d'un carré unité et inversons le processus : on construit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = v_0 = 1$, $v_{n+1} = u_n + v_n$, et $u_{n+1} = v_n$ (s'il y a un renversement) ou $u_n$ (sinon). S'il y a un renversement à chaque pas, alors la suite $(u_n)$ n'est autre que la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Notons $N_k$ l'indice correspondant au $k$ième renversement et démontrons, par récurrence sur $k$, que $u_{N_k} \geq F_{k+1}$ et $v_{N_k} \geq F_{k+2}$ : c'est clair pour $k = 1$ car $u_{N_1} = N_1 \geq 2$ et $v_{N_1} = 1 + N_1 \geq 3$, et si cela est vrai à l'ordre $k$, alors

$$u_{N_{k+1}} = v_{N_{k+1}-1} \geq v_{N_k} \geq F_{k+2}$$

et $$v_{N_{k+1}} = v_{N_{k+1}-1} + u_{N_{k+1}-1} = v_{N_{k+1}-1} + u_{N_k}$$

$$\geq v_{N_k} + u_{N_k} \geq F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$$

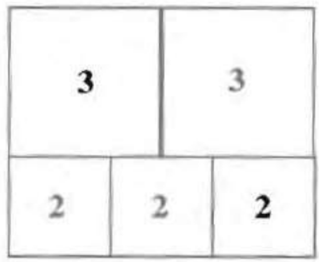
On obtient ainsi un résultat établi par G. Lamé en 1845 (cf. [K], p. 343) : Si l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd de $a$ et $b$ ($a < b$) requiert $r$ divisions euclidiennes, alors $a \geq F_r$ et $b \geq F_{r+1}$.

Quant au nombre $K(x_0, y_0)$ de carrés obtenus en découpant $R_0$ suivant la méthode des différences successives, il est bien évidemment égal à la somme des quotients obtenus lors des divisions euclidiennes successives ; on peut en obtenir une minoration faisant intervenir l'aire et le périmètre du rectange $R_0$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux identités (1) et (2) : Si $N = K(x_0, y_0)$, $N$ est le premier indice annulant la largeur, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right)^2 \leq N\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2\right) \text{, donc } (x_0 + y_0 - y)^2 \leq N x_0 y_0.$$

Ainsi, $K(x_0, y_0) \geq \dfrac{(x_0 + y_0 - y)^2}{x_0 y_0}$ ; en outre, l'égalité n'a lieu que si tous les $x_k$ $(0 \leq k \leq N-1)$ sont égaux, ce qui revient à $y_0 = k x_0$, auquel cas $K(x_0, y_0) = k$.

Signalons qu'en tout état de cause, la méthode des différences successives n'est pas la plus économique pour découper un rectangle, que ce soit pour le nombre de carrés obtenus ou pour le nombre de coups de ciseaux à effectuer…le plus petit contre exemple est :




En revanche, on peut affirmer que si les côtés de $R_0$ sont incommensurables, il est impossible de découper $R_0$ en un nombre fini de carrés. Plus précisément (Dehn, 1903) : Si l'on peut découper un rectangle en un nombre fini de carrés, alors tous ces carrés sont commensurables. On trouvera dans [M] une démonstration de ce résultat (et un peu plus) basée sur l'interprétation d'une certaine matrice…un modèle de symbiose entre algèbre linéaire et combinatoire.

## IV - Une caractérisation qualitative du nombre d'or

On définit habituellement le nombre d'or $\Phi$ par la propriété suivante : si $x_0 = 1$ et $y_0 = \Phi$, alors le rectangle $R_1$ est semblable au rectangle $R_0$. C'est une définition quantitative : $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

On appelle rectangle d'or tout rectangle semblable à celui de côtés 1 et $\Phi$. Il est clair que si l'on applique la méthode des différences successives à un rectangle d'or, il y a un renversement à chaque pas (et une infinité de pas…ce qui montre au passage que $\Phi$ est irrationnel).

Réciproquement, s'il y a une infinité de pas et un renversement à chaque pas (on dira que le rectangle $R_0$ est alternatif), alors $x_{n+1} = x_{n-1} - x_n$ pour tout $n \geq 1$. L'équation caractéristique $r^2 + r - 1 = 0$ ayant pour racines $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on aura $x_n = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ; mais $x_n$ doit tendre vers 0, d'où $x_n = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On obtient alors :

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{(x_0 + x_1)}{x_0} = 1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \Phi$$

Ainsi les rectangles d'or sont exactement des rectangles alternatifs : *c'est une caractérisation qualitative.*

Finalement, en considérant le rectangle de largeur 1 et de longueur $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ qui donne $n$ renversements, on retrouve, en faisant tendre $n$ vers l'infini : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$.

## V - Références

[K] : Donald E. Knuth, *The art of Computer Programming*, Volume 2/Seminumerical Algorithms, Addison-Wesley Publishing Compagny (1981)
Merci à Thierry Montaut de nous avoir signalé cette référence.

[M] : *The Mathematical Intelligencer*, vol.15, n°4, 1993, p. 60.
Merci à Frédéric Maire de nous avoir signalé cette référence.

[G] : Marc Guinot, *Arithmétique pour amateurs*, Livre 1 (Pythagore, Euclide et toute la clique), Aléas éditeur, Lyon, 1992.
Merci au *Bulletin* pour avoir attiré notre attention sur cet ouvrage.