Bulletin de l'APMEP n°408 - Fev/Mars 1997

De l'intérêt du théorème de la forme globale en programmation linéaire

Samir Belkora
INSEA-RABAT
IUT II - Grenoble

1 - Introduction

En programmation linéaire, il est d'usage de présenter le théorème des écarts complémentaires comme théorème de caractérisation des solutions optimales. Ce théorème des écarts complémentaires est dit aussi théorème d'équilibre ou encore théorème de la forme canonique car il utilise la forme canonique d'un programme linéaire. Il existe un autre théorème de caractérisation des solutions optimales dit théorème de la forme globale qui, comme son nom l'indique, utilise la forme globale d'un programme linéaire et qui est pratiquement absent de la littérature spécialisée [1]. Nous allons donner une démonstration personnelle de ce théorème pour ensuite essayer de dégager l'intérêt pédagogique qu'il représente à nos yeux dans un enseignement de programmation linéaire, en particulier s'adressant à des étudiants en gestion ou en économie.

1- Aucun de la dizaine d'ouvrages dont nous disposons ne le mentionne. Nous l'avons "découvert", non démontré grâce au cours polycopié de Catz [1982]...

2 - Quelques concepts de base de la programmation linéaire

Nous allons rappeler quelques concepts de base nécessaires aux développements ultérieurs.

2.1 - Définition

Un **programme linéaire** est un programme mathématique du type :

$$\max_{x \in X} (\text{ou min}) f(x)$$

dans lequel :

- le domaine X est défini par un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires du type [2] $\leqslant$ ou $\geqslant$. Ces équations ou inéquations sont appelées **contraintes**.

- La fonction f, dite **fonction objective**, ou en core **fonction économique**, est linéaire. Elle peut être maximisée ou minimisée [3].

Un problème de programmation linéaire peut donc être formulé comme suit [4] :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{maximiser ou minimiser la fonction objective :} \\
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = z \\
\text{sous les contraintes :} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \quad (*) \quad b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad (*) \quad b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \quad (*) \quad b_3 \\
\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad (*) \quad b_m
\end{array}\right.$$

Exemple :

Le programme linéaire P suivant servira d'exemple d'illustration pour toute la suite :

---

2 Les problèmes pratiques n'admettent jamais d'inéquations strictes.

3 On peut toujours ramener un problème de minimisation à un problème de maximalisation et vice-versa ; en effet, on a l'identité suivante :

$$\min_{x \in X} f(x) = -\max_{x \in X} -f(x)$$

4 On peut remplacer le symbole (*) par les signes =, $\leqslant$, ou $\geqslant$.

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcr} \min & -x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ \text{s.c.} & -x_1 & + & x_2 & \geqslant & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leqslant & 5 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 1 \\ & x_1 & & & \geqslant & 0 \\ & & & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

2.2 - Autres définitions

• Tout point de X, c'est-à-dire tout point satisfaisant aux contraintes, est appelé **solution réalisable** ou **solution admissible** ou encore **programme**. X est le domaine des solutions réalisables.

• Toute solution réalisable qui rend optimale (minimale ou maximale) la fonction objective f est appelée **solution optimale**. Résoudre un programme linéaire revient à chercher la solution optimale du programme linéaire.

2.3 - Résolution graphique

La méthode de résolution graphique est une méthode qui s'applique aux programmes linéaires comportant deux ou trois variables pour en fournir le (ou les) solution(s) optimale(s) si elle(s) existe(nt).

Le processus de résolution graphique d'un programme linéaire à deux variables peut se résumer ainsi :

- représenter le domaine X des solutions réalisables dans le plan $(x_1\ ,\ x_2)$;
- tracer le vecteur $c = (c_1, c_2)$ des coefficients de la fonction objective ;
- considérer les **courbes de niveau** $C_u = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, c_1x_1 + c_2x_2 = u\}$ (ce sont des droites orthogonales à c).

Si on cherche à maximiser (resp. minimiser) la fonction objective, déplacer C_u, ce qui revient à "balayer" le domaine X , dans le sens (resp. le sens opposé) de c jusqu'à ce que l'intersection de C_u avec X soit réduite au minimum. Elle présente alors l'ensemble des solutions optimales du programme linéaire.

Ajoutons que cette intersection correspond à un **sommet** si le programme linéaire admet une solution optimale unique, à une **arête** si le programme linéaire admet plus d'une solution optimale auquel cas il y a une infinité de solution optimales.

Exemple :
Considérons le programme linéaire P:

$$(P)\left\{\begin{array}{rcrcl} \min -x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ \text{s.c.} -x_1 & + & x_2 & \geqslant & -3 \\ x_1 & + & x_2 & \leqslant & 5 \\ -3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 1 \\ x_1 & & & \geqslant & 0 \\ & & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

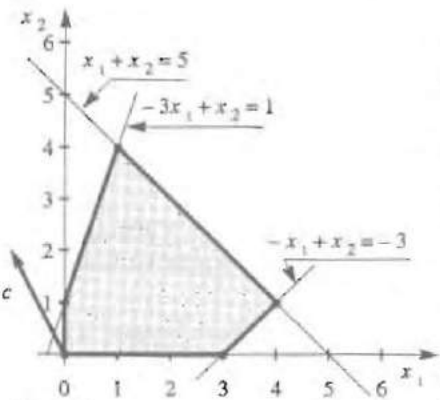

figure 1

On voit graphiquement (5) que l'ensemble des solutions optimales se réduit au sommet x^* à l'intersection des droites d'équations $x_2 = 0$ et $-x_1 + x_2 = -3$, c'est-à-dire de coordonnées (3, 0).
La fonction objective prend pour valeur minimum : $f(x^*) = -3$.

La rigueur et la précision ne sont cependant pas l'apanage de cette méthode (comme de toutes les méthodes graphiques en général) ; en présence de deux sommets très voisins (considérer les sommets (0, 3) et (4, 1) dans notre exemple), un balayage à la main du domaine X peut induire en erreur et conduire au sommet non solution optimale.

Une vérification qu'une solution trouvée est bien solution optimale est souhaitable. Les théorèmes de caractérisation des solutions optimales nous procurent cette vérification. Leur description nécessite d'introduire auparavant les formes usuelles de présentation d'un programme linéaire ainsi que le concept de dualité.

2.4 - Forme canonique

Un programme linéaire est mis sous la **forme canonique** s'il s'écrit (6) :

---

5 N'oublions pas de balayer le domaine dans le sens opposé du vecteur c, car il s'agit de minimiser la fonction objective.

6 L'écriture "$c.x = z$ (max ou min)" sera préférée à l'écriture "max ou min $c.x = z$" pour la théorie où elle s'avère plus pratique.

$$\begin{cases} c.x = z \text{ (max.)} \\ A.x \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c.x = z \text{ (min.)} \\ A.x \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

où

$A = \left(A_i^j\right) = \left(a_{ij}\right)$ est une matrice $m \times n$

A_i désignera le vecteur ligne de la $i$ème ligne de A $i = 1, \ldots, m$

A^j désignera le vecteur colonne constitué de la $j$ème colonne de A $j = 1, \ldots, n$.

$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_i, \ldots b_m)$ est un vecteur colonne à m composantes

$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_j, ; , c_n)$ est un vecteur ligne à n composantes

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ est un vecteur colonne de n variables ($x \in \mathbb{R}^n$)

(m et n sont quelconques mais naturellement les dimensions de A, b, c et x ne sont pas indépendantes).

$c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j.x_j$ représente le produit scalaire du vecteur ligne c et du vecteur colonne x.

$$A.x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}.x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}.x_j \end{pmatrix}$$ représente le produit matriciel de la matrice A et du vecteur x ; c'est un vecteur colonne à m composantes.

Exemple :

Si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c = (-1 \quad 2) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

le programme liéaire P s'écrit immédiatement sous la forme canonique :

$$\begin{cases} c.x = z \text{ (min.)} \\ A.x \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

On remarque que dans un programme linéaire mis sous la forme canonique, les variables sont astreintes à être positives ou nulles. En effet, la plupart des problèmes pratiques n'admettent pas de valeurs négatives (les variables représentent des quantités, des niveaux d'activité,...)

Par ailleurs, ces contraintes de non négativité sont séparées des autres contraintes. Toutefois, rien n'empêche d'introduire une forme qui traite l'ensemble des contraintes de manière indifférenciée: la forme dite globale ou encore générale.

2.5 - Forme globale (ou générale)

Un programme linéaire est mis sous la **forme globale** ou **générale** s'il s'écrit :

$$\begin{cases} c.x = z \text{ (max.)} \\ A.x \leqslant b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c.x = z \text{ (min.)} \\ A.x \geqslant b \end{cases}$$

La matrice A de la forme globale est obtenue à partir de la matrice A de la forme canonique en lui adjoignant les coefficients des contraintes de non négativité des variables (c'est donc une matrice $(m + n) \times n$) et le vecteur b est augmenté des n zéros correspondants.

Exemple

Si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = (-1 \quad 2) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Le programme linéaire P s'écrit immédiatement sous la forme globale:

$$\begin{cases} c.x = z \text{ (min.)} \\ A.x \geqslant b \end{cases}$$

2.6 - Dual d'un programme linéaire

A tout programme linéaire, on peut associer un autre programme linéaire dit **programme dual**, le programme de départ prenant alors le nom de **programme primal**.

La présentation du programme dual la plus courante est celle qui est faite à partie d'un programme primal écrit sous la forme canonique. C'est elle que nous allons donner.

Soit un programme linéaire écrit sous la forme canonique

$$(P)\begin{cases} c.x = z \quad (\max) \\ A.x \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (P)\begin{cases} c.x = z \quad (\min) \\ A.x \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

On appelle **dual** de ce programme linéaire le programme linéaire [7] :

$$(D)\begin{cases} {}^t b.y = w \quad (\min) \\ {}^t A.y \geqslant {}^t c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (D)\begin{cases} {}^t b.y = w \quad (\max) \\ {}^t A.y \leqslant {}^t c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

où $y = (i_1, \ldots y_i, \ldots, y_m)$ est un vecteur colonne de m variables ($y \in \mathbb{R}^m$).

Les propriétés de la transposition [8] ajoutées à l'hypothèse que y est cette fois un vecteur ligne permettant cette autre écriture du programme linéaire :

$$(D)\begin{cases} y.b = w \quad (\min) \\ y.A \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (D)\begin{cases} y.b = w \quad (\max) \\ y.A \leqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Si la première écriture a l'avantage de donner une présentation du dual identique à celle du primal, la deuxième écriture, que nous adoptons dans la suite, permet d'éviter les symboles de transposition.

Exemple :

Considérons le programme linéaire P écrit sous la forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \min & -x_1 + 2x_2 = z \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 \geqslant -3 \\ & -x_1 - x_2 \geqslant -5 \\ & 3x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Le programme dual de P s'écrit alors :

$$(D)\begin{cases} \min & -3y_1 - 5y_2 - y_3 = w \\ \text{s.c.} & -y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant -1 \\ & y_1 - y_2 - y_3 \leqslant 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Le programme primal étant écrit sous la forme canonique, le programme dual est lui aussi écrit sous la forme canonique.

Le nombre de contraintes (resp. de variables) du primal est égal au nombre de variables (resp. de contraintes) du dual [9]

7 "t" représente le symbole de transposition.

8 Soient M et N deux matrices et u et v deux vecteurs colonnes, on a ${}^t({}^tM) = M$, ${}^t(M.N) = {}^tM.{}^tN$, ${}^tu.v = {}^tv.u$.

9 On ne tient pas compte des contraintes de non négativité.

Autrement dit, à chaque contrainte du primal est associée une variable dans le dual (et vice versa), à chaque contrainte du dual est associée une variable dans le primal (et vice versa)

3 - Rappel du théorème des écarts complémentaires

Nous allons maintenant rappeler le **théorème des écarts complémentaires** dit aussi **théorème de la forme canonique** (car il utilise la forme canonique) ou encore **théorème d'équilibre** ; c'est un théorème de caractérisation des solutions optimales qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de solutions réalisables de programmes linéaires duaux soit optimal.

3.1 - Théorème des écarts complémentaires

Considérons P et D un couple de programmes linéaires duaux écrits sous la forme canonique :

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcl} c.x & = & z \ (\max) \\ A.x & \leqslant & b \\ x & \geqslant & 0 \end{array} \right. \qquad (D) \left\{ \begin{array}{rcl} y.b & = & w \ (\min) \\ y.A & \geqslant & c \\ y & \geqslant & 0 \end{array} \right.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple (x^*, y^*) de solutions réalisables des programmes linéaires duaux P et D soit optimal est :

- si une contrainte de l'un des programmes linéaires est inactive ([10]) en la solution réalisable, la composante correspondante de la solution réalisable de l'autre programme linéaire est nulle ;
- si une composante de la solution réalisable de l'un des programmes linéaires est positive, la contrainte correspondante de l'autre programme linéaire est active en la solution réalisable, ce qui peut s'énoncer mathématiquement :

$$A_i.x^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \qquad (y_i^* > 0 \Rightarrow A_i.x^* = b_i)$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow y^*.A^j = c_j \qquad (y^*.A^j > c_j \Rightarrow x_j^* = 0)$$

Le théorème des écarts complémentaires s'applique fréquemment. Il permet de tester l'optimalité d'un couple de solutions réalisables de programmes linéaires duaux ou, plus utilement, de tester l'optimalité d'une solution donnée d'un programme linéaire et de fournir en même temps, en cas de positivité du test, la solution optimale du programme linéaire dual.

10 Si $A_i.x = b_i$, on dit que la $i^{ème}$ contrainte est **active** (ou encore **saturée, serrée**) en x. Autrement, on dit qu'elle est **inactive** (ou encore *lâche, relâchée*) en x.

Mais il ne permet pas de calculer directement la solution optimale du programme linéaire.

Exemple :

Considérons le programme linéaire P écrit sous la forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \min & -x_1 + 2x_2 = z \\ \text{s.c.} & -x_1 + x_2 \geqslant -3 \\ & -x_1 - x_2 \geqslant -5 \\ & 3x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

La résolution graphique du programme linéaire P a fourni la solution $x^* = (3\ ,\ 0)$.

Vérifions avec le théorème des écarts complémentaires que le point x^* est bien solution optimale.

Le programme dual de P s'écrit :

$$(D)\begin{cases} \max & -3y_1 - 5y_2 - y_3 = w \\ \text{s.c.} & -y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant -1 \\ & y_1 - y_2 - y_3 \leqslant -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit y^* supposé solution réalisable de D.

D'après le théorème des écarts complémentaires, pour que x^* et y^* forment un couple de solutions optimales de P et D, ils doivent vérifier :

$$A_i.x^* > b_i \quad \Rightarrow \quad y^*_i = 0$$

$$x^*_j > 0 \quad \Rightarrow \quad y^*.A^j = c_j$$

La seconde et la troisième contraintes de P sont inactives en x^* ($A_2.x^* > b_2$ et $A_3.x^* > b_3$) et la variable x^*_1 est supérieure à 0 et donc y^* doit satisfaire le système linéaire :

$$\begin{cases} y_2^* = y_3^* = 0 \\ -y_1^* - y_2^* + 3y_3^* = -1 \end{cases}$$ qui admet comme solution : $y^*_1 = 1$, $y^*_1 = 0$, $y^*_1 = 0$.

On vérifie que $y^* = (1, 0, 0)$ est solution réalisable de D[11].

11 Il est indispensable de vérifier que le point y^*, fourni par les conditions du théorème des écarts complémentaires, est solution réalisable de D. En effet, les conditions du théorème sont nécessairement satisfaites par construction. C'est le fait que y^* soit solution réalisable ou non qui permet de conclure sur l'optimalité ou non de x^* et y^*...

$x^* = (3, 0)$ et $y^* = (1, 0, 0)$ remplissent toutes les conditions du théorème et par conséquent, x^* est bien solution optimale de P et y^* solution optimale de D.

On a bien sûr : $c.x^* = y^*.b = -3$.

Il existe un autre théorème de caractérisation des solutions optimales : le théorème de la forme globale. Ce théorème est assez peu répandu, mais nous pensons qu'il présente un intérêt pédagogique certain en raison de sa simplicité d'utilisation et de l'interprétation géométrique sous-jacente.

4 - Le théorème de la forme globale

Le théorème de la forme globale utilise la forme globale, laquelle, rappelons-le, ne fait pas de distinction entre les contraintes, quelles qu'elles soient.

4.1 - Théorème de la forme globale

Soit un programme linéaire écrit sous la forme globale :

$$\begin{cases} c.x = z \text{ (max)} \\ A.x \leqslant b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c.x = z \text{ (min)} \\ A.x \geqslant b \end{cases}$$

x^* solution réalisable du programme linéaire, i.e. élément de $X = \{x/A.x\ (\leqslant \text{ ou } \geqslant)\ b\}$ est solution optimale (finie) si et seulement si il existe des coefficients $y_1 \geqslant 0, \dots, y_{m+n} \geqslant 0$ tels que ([12]) :

1) $c = y_1A_1 + \dots + y_{m+n}A_{m+n}$

2) Si $A_i.x^* \neq b_i$ alors $y_i = 0$ $\qquad i = 1, \dots, m+n$.

Nous proposons une démonstration du théorème de la forme globale basée sur les théorèmes classiques de la dualité (voir en annexe le rappel du théorème de relation entre les valeurs des fonctions objectives avec son corollaire, et du théorème fondamental de la dualité).

Démonstration du théorème de la forme globale

Soit x^* une solution réalisable du programme linéaire.

Notons A' la matrice $m \times n$ et b' le vecteur second membre à m composantes du programme linéaire écrit sous la forme canonique. On a donc :

---

11 (suite) Le théorème des écarts complémentaires imposant à la première contrainte de D d'être active en y^* et aux variables y^*_2 et y^*_3 d'être nulles, pour vérifier que y^* est solution réalisable de D, il suffit de vérifier que y^* satisfait la seconda contrainte de D et que la variable y^*_1 est positive ou nulle.

12 Le vecteur c et les vecteurs A_i $i = 1,\dots,m$ sont des vecteurs lignes à n composantes. Toutefois, rien n'empêche d'écrire ces vecteurs comme des vecteurs colonnes dans l'égalité de la condition 1), ce qui est plus pratique pour le traitement des exemples.

$$A = \begin{pmatrix} & A' & \\ -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} & A' & \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Supposons qu'il existe $y = (y_1, \ldots, y_{m+n}) \geqslant 0$ tel que $c = y.A$ avec $y_i = 0$ si $A_i.x^* \neq b_i$ et posons $y' = (y_1, \ldots y_m)$.

On a alors : $c.x^* = y.A.x^*$

Comme $y_i = 0$ si $A_i.x^* \neq b_i$ et $b_{m+1} = \ldots = b_{m+n} = 0$, on en déduit que :

$$c.x^* = y.b = y'.b'$$

Par ailleurs, puisque $y.A = c$, on a : $y'.A'$ ($\geqslant$ *ou* $\leqslant$) c, et donc, $y' \geqslant 0$ est solution réalisable du programme dual.

D'après le corollaire du théorème de relation entre les valeurs des fonctions objectives, x^* est solution optimale du programme linéaire (et y' est solution optimale du programme dual).

→ Soit x^* une solution optimale du programme linéaire.

D'après le théorème fondamental de la dualité, il existe $y' = (y_1, \ldots, y_m)$ solution optimale finie du programme dual tel que $c.x^* = y'.A'.x^* = y'.b'$.

Comme $A.x^*$ ($\leqslant$ *ou* $\geqslant$) b', de la relation $y'.A'.x^* = y'.b'$, on déduit que si $A'_i.x^* \neq b_i$, alors $y_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Par ailleurs, y' est solution réalisable du programme linéaire et donc on a : $y'.A'$ ($\geqslant$ *ou* $\leqslant$) c.

Définissons maintenant $y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}$ tels que :

$$y_{m+j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y'.A'^j = c_j \\ y'.A'^j - c_j & \text{si} \quad y'.A'^j > c_j \\ c_j - y'.A'^j & \text{si} \quad y'.A'^j < c_j \end{cases}$$

En posant $y = (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n})$,

on a alors

$$y.A = \begin{cases} (y' \mid y_{m+1} \cdots y_{m+n}).\begin{pmatrix} & A' & \\ \hline -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = c \\ \text{ou} \\ (y' \mid y_{m+1} \cdots y_{m+n}).\begin{pmatrix} & A' & \\ \hline 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = c \end{cases}$$

soit : $y.A = c$.

D'auttre part, si $A_{m+j}.x^* \neq b_{m+j}$, c'est-à-dire si $x^*_j > 0$, alors $y'.A^j = c_j$ (d'après le théorème des écarts complémentaires) et donc $y_{m+j} = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$.

En conclusion, on a bien trouvé $y = (y_1, \ldots, y_{m+n}) \geqslant 0$ tel que :

1) $c = y.A$

2) $y_i = 0$ si $A_i.x^* \neq b_i$ pour $i = 1, \ldots, m+n$.

4.2 - Autre énoncé du théorème de la forme globale

Nous allons maintenant énoncer le théorème de la forme globale d'une autre manière, qui nous éclairera sur son interprétation géométrique. Pour cela, rappelons tout d'abord les définitions et propriétés suivantes:

4.2.1 - *Définitions*

✦ Un ensemble $C \subset \mathbb{R}_n$ est **convexe** si :

pour tout couple de points $(x^1, x^2) \in C \times C$ / pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $\Big\}$ $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in C$

✦ Un ensemble $C \subset \mathbb{R}_n$ est un **cône** si:

pour tout $x \in C$ / pour tout $\lambda \geqslant 0$ $\Big\}$ $\lambda x \in C$

c'est-à-dire pour tout point $x \in C$, le rayon passant par x est inclus dans C.

✦ Soient $v_1, \ldots, v_m$, m vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ $i = 1, \ldots, m$, on dit que le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est une **combinaison linéaire positive** des vecteurs v_i $i = 1, \ldots, m$.

✦ Etant donnée une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ de $\mathbb{R}^n$, leur **enveloppe conique** E est définie par l'ensemble des combinaisons linéaires positives des v_i, $i = 1, \ldots, m$:

$$E = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,/\, v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \geq 0 \right\}$$

4.2.2 - *Propriétés*

L'enveloppe conique E *des vecteurs* $v_1, \ldots, v_m$ de $\mathbb{R}^n$ est le cône convexe engendré par les vecteurs v_i $i = 1, \ldots, m$.

Justification :

La justification est immédiate en appliquant à l'ensemble E les définitions du cône et de la convexité.

Illustration géométrique : Soient v_1, v_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Représentons v tel que $v = 2v_1 + 3v_2$: v combinaison linéaire positive de v_1 et de v_2 appartient à l'enveloppe conique de v_1 et v_2 qui est le cône convexe engendré par les vecteurs v_1 et v_2.

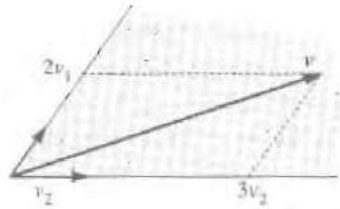

figure 2

Le théorème de la forme globale peut alors s'énoncer de la manière suivante :

> x^* solution réalisable du programme linéaire est solution optimale (finie) si et seulement si le vecteur c est une combinaison linéaire positive des vecteurs lignes A_i de la matrice A qui correspondent aux contraintes actives en x^*, i.e. le vecteur c appartient au cône convexe engendré par les vecteurs lignes A_i de la matrice A qui correspondent aux contraintes actives en x^*.

Illustration du théorème dans $\mathbb{R}^2$:

Soit x^* un sommet du domaine des solutions réalisables d'un programme linéaire avec maximum (par exemple), à l'intersectioon des droites d'équations $A_i.x = b_i$ (D_i) et $A_{i'}.x = b_{i'}$ $(D_{i'})$ et soient x^1 et x^2 les deux sommets voisins. Les vecteurs A_i et $A_{i'}$ ont une direction orthogonale respectivement aux droites D_i et $D_{i'}$.

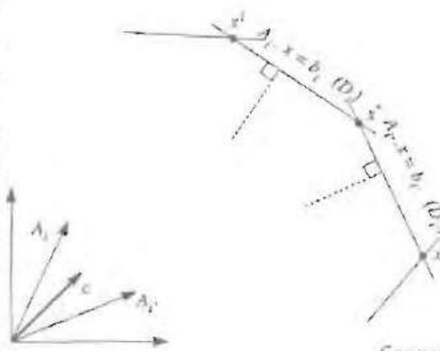

figure 3

On voit graphiquement que, tant que le vecteur c se trouve à l'intérieur du cône engendré par les vecteurs A_i et $A_{i'}$ qui correspondent aux contraintes actives en x^*, le balayage du domaine ([13]) dans la direction du vecteur c fournit la solution optimale unique x^*.

Si la direction du vecteur c est confondue avec celle du vecteur A_i (resp.$A_{i'}$), le balayage du domaine dans la direction du vecteur c fournit tous

13 Nous invoquons ici les techniques de résolution graphique

les points du segment $[x^1, x^*]$ (resp. $[x^*, x^2]$) comme solutions optimales. Pour tout point à l'intérieur du segment $[x^1, x^*]$ (resp. $[x^*, x^2]$), le cône engendré par le vecteur A_i (resp.$A_{i'}$) correspondant à la seule contrainte active de ce point se réduit à la droite de direction le vecteur A_i (resp.$A_{i'}$) et portant le vecteur c.

Enfin, si le vecteur c se situe juste à gauche du vecteur A_i , on "bascule" vers le sommet x^1 comme unique solution optimale, si le vecteur c se situe juste à droite du vecteur $A_{i'}$, on "bascule" vers le sommet x^2 comme unique solution optimale.

4.3 - Comparaison avec le théorème des écarts complémentaires

La vérification de l'optimalité d'une solution par le théorème de la forme globale fournit aussi la solution optimale du dual en cas de positivité du test : la démonstration ci-dessus montre que les coefficients y_i qui interviennent dans le théorème de la forme globale sont des variables duales ([14])

Que ce soit par le théorème de la forme globale ou par le théorème de la forme canonique ([15]), tester l'optimalité d'une solution réalisable x d'un programme linéaire P revient à appliquer des conditions qui donnent un système d'équations en y. Une fois obtenue la solution y, le test est positif si les variables duales y_i sont positives ou nulles pour le théorème de la forme globale ou si y est solution réalisable du programme dual D pour le théorème de la forme canonique.

Théorème de la forme globale et théorème de la forme canonique sont en fait deux théorèmes équivalents. C'est ce que nous allons montrer ([16]).

Démonstration

On considère le programme linéaire primal avec maximum (la démonstration est analogue pour le problème avec minimum).

Comme pour la démonstration précédente, notons A la matrice $(m + n) \times n$ du programme linéaire écrit sous la forme globale et notons A' la matrice $m \times n$ et b' le vecteur second membre à m composantes du programme linéaire écrit sous la forme canonique. On a donc :

---

14 Il est donc important de faire correspondre les indices des coefficients avec la numérotation des contraintes (voir exemple ci-après...).

15 Rappelons que c'est une autre appellation du théorème des écarts complémentaires.

16 Le théorème de la forme globale peut aussi être démontré en établissant son équivalence avec le théorème de la forme canonique et en démontrant ce dernier.

$$A = \begin{pmatrix} & A' & \\ -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- T.F.G. ⇒ T. F. C.

Soit x une solution réalisable du programme primal.

Supposons qu'il existe $y = (y_1, \dots, y_{m+n}) \geqslant 0$ tel que $c = y.A$ avec $y_i = 0$ si $A_i.x \neq b_i$ pour $i = 1, \dots, m + n$ et posons $y' = (y_1, \dots, y_m)$.

Il s'ensuit que :

✦ $y'.A' \geqslant c$ et $y' \geqslant 0$ et donc y' est solution réalisable du programme dual.

✦ si $A'_i.x < b_i$ alors $y_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

✦ si $x_j > 0$, c'est-à-dire si $A_{m+j}.x \neq b_{m+j}$ alors $y_{m+j} = 0$ et donc $c_j = y.A^j = y'.A'^j - y_{m+j} = y'.A'^j$ pour $j = 1, \dots, n$.

- T.F.C. ⇒ T. F. G.

Soient x et $y' = (y_1, \dots, y_m)$ des solutions réalisables des programmes linéaires duaux. Supposons qu'elles vérifient les relations :

$A'_i.x < b_i \Rightarrow y_i = 0$ pour $= 1, \dots, m$

$x_j > 0 \Rightarrow y'.A'^j = c_j$ pour $j = 1, \dots, n$.

Définissons maintenant $y_{m+1}, \dots y_{m+n}$ tels que

$$y_{m+n} = \begin{cases} 0 & \text{si } y'A'^j = c_j \\ y'A'^j - c_j & \text{si } y'A'^j > c_j \end{cases}$$

En posant $y = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+n})$, on a lors :

✦ $y \geqslant 0$

✦ $c = y.A$

✦ si $A_i.x \neq b_i$ alors $y_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$

et si $A_{m+j}.x \neq b_{m+j}$ c'est-à-dire si $x_j > 0$ alors $y'.A'^j = c_j$ et donc $y_{m+j} = 0$ pour $j = 1, \dots, n$.

L'application du théorème de la forme globale nous paraît plus simple que celle du théorème de la forme canonique. Toutefois, la lecture des variables duales fournies par le théorème de la forme globale est à manier avec quelques précautions :

- des variables duales, qui figurent dans l'application du théorème de la forme canonique, n'apparaissent pas si on applique le second énoncé du théorème de la forme globale ; ce sont les variables associées aux contraintes du primal qui sont non actives et d'après le premier énoncé du théorème de la forme globale, elles sont nulles.
- des variables duales, qui ne figurent pas dans l'application du théorème de la forme canonique apparaissent : ce sont les variables associées aux contraintes de non négativité sur les variables primales (uniquement celles qui sont actives si on applique le second énoncé du théorème de la forme globale) ; ces variables duales ne sont pas prises en compte par le théorème de la forme canonique.

Nous allons rependre notre exemple pour illustrer le théorème et ces deux cas de figure.

Exemple :

Considérons le programme linéaire P écrit sous la forme globale :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcr} \min & -x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ \text{s.c.} & -x_1 & + & x_2 & \geqslant & -3 \\ & -x_1 & - & x_2 & \geqslant & -5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \geqslant & -1 \\ & x_1 & & & \geqslant & 0 \\ & & & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Appliquons cette fois le théorème de la forme globale pour vérifier que le point $x^* = (3, 0)$ est bien solution optimale de P.

Au point x^*, la première contrainte et la cinquième contrainte de non négativité sont actives.

D'après le théorème de la forme globale, x^* est solution optimale de P si et seulement si il existe des coefficients positifs y_1 et y_5 tels que $c = x_1A_1 + y_5A_5$

soit : $$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore $$\left\{\begin{array}{l} -1 = -y_1 \\ 2 = y_1 + y_5. \end{array}\right.$$

Le système linéaire admet comme solution : $y_1 = 1 > 0$ $y_5 = 1 > 0$ et donc x^* est bien solution optimale du programme linéaire P.

Les variables duales y_2 et y_3 n'apparaissent pas. Elles sont associées respectivement aux deuxième et troisième contraintes non actives du primal. On a donc $y_2 = y_3 = 0$.

Le coefficient y_5 qui ne figure pas dans l'application du théorème de la forme canonique apparaît ici. Il est associé à la contrainte de non négativité $x_2 \geqslant 0$ qui est active ici.

On retrouve la solution optimale du dual $y^* = (1, 0, 0)$ obtenue par le théorème de la forme canonique.

On notera que l'application du théorème des écarts complémentaires nous avait conduit à vérifier que y^* est solution réalisable de D, ce qui revenait à vérifier que $y^*_1 \geqslant 0$ et $y^*_2 \leqslant 2$. C'est bien la même vérification qu'entraîne l'application du théorème de la forme globale ($y_1 \geqslant 0$ et $y_5 \geqslant 0$, avec $2 = y_1 + y_5$).

4.4 - Théorème de la forme globale et analyse de sensibilité

Le théorème se révèle particulièrement intéressant pour l'analyse de sensibilité. Il permet de répondre très simplement à des questions du type :

- Pour quelle variation de c la solution optimale du programme linéaire reste inchangée ?[17]
- Partitionner $\mathbb{R}^2$ en régions telles qu'un sommet reste solution optimale quand c appartient à une région (pour un problème à deux variables).

Exemple :

Considérons le programme linéaire P écrit sous la forme globale :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcr} \min & -x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ \text{s.c.} & -x_1 & + & x_2 & \geqslant & -3 \\ & -x_1 & - & x_2 & \geqslant & -5 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \geqslant & -1 \\ & x_1 & & & \geqslant & 0 \\ & & & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

La résolution graphique nous fournit le sommet optimal $(3, 0)$ parmi les cinq sommets $x^1 = (3, 0)$, $x^2 = (4, 1)$, $x^3 = (1, 4)$, $x^4 = (0, 1)$ et $x^5 = (0, 0)$.

- A la question "Pour quelle variation $\Delta c = (\delta c_1, \delta c_2)$ de c, la solution $x^1 = (3, 0)$ reste optimale ?", il suffit pour y répondre de poser, en application du théorème de la forme globale, que $c + \Delta c$ soit être combinaison linéaire positive des vecteurs correspondants aux contraintes actives en x^1,

17 Dans notre article traitant du profit marginal en programmation linéaire à paraître prochainement (voir bibliographie), le théorème de la forme globale s'avère tès pratique pour ce type de question.

soit :

$$c + \Delta c = y_1 A_1 + y_5 A_5 \quad \text{et} \quad y_1 . y_5 \geqslant 0$$

i.e.
$$\begin{cases} -1 + \delta c_1 & = & -y_1 \\ 2 + \delta c_2 & = & y_1 + y_5 \\ \text{et } y_1 . y_5 & \geqslant & 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de conclure que la solution $x^1 = (3, 0)$ restera optimale pour toute variation Δc de c telle que

$$\begin{cases} \delta c_1 \leqslant 1 \\ \delta c_1 + \delta c_2 \geqslant -1. \end{cases}$$

- On veut partitionner $\mathbb{R}^2$ en régions telles qu'un sommet reste solution optimale quand c appartient à une région.

D'après l'interprétation géométrique du théorème de la forme globale, la région R_k à laquelle doit appartenir le vecteur c pour qu'un sommet x^k reste solution est le cône engendré par les vecteurs A_i correspondant aux contraintes actives en x^k.

Il faut donc partitionner $\mathbb{R}^2$ suivant les vecteurs A_i de la matrice A de la forme globale, correspondant aux contraintes actives en x^k $k = 1, \dots, 5$, soit :

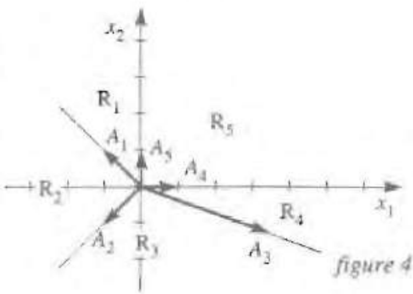

figure 4

5 - Conclusion

Le théorème de la forme globale, comme le théorème des écarts complémentaires, tout en testant l'optimalité d'une solution d'un programme linéaire, permet d'obtenir la solution optimale du programme dual en cas de positivité du test. Il se démontre aisément.

Par ailleurs, sa simplicité d'utilisation, son interprétation géométrique immédiate, qui montre bien le "fonctionnement" d'un programme linéaire, son exploitation très simple pour l'analyse de sensibilité et enfin cinq années de son enseignement nous incitent à vouloir le tirer des oubliettes et le recommander pour un enseignement de programmation linéaire, en particulier s'adressant à des étudiants en gestion ou en économie ([18]).

18 Nous renvoyons à nouveau (cf. note 17) à notre article traitant du profit marginal en programmation linéaire où le théorème de la forme globale est largement mis à contribution.

Bibliographie

BELKORA S. (1994), *D'une définition correcte du profil marginal en programmation linéaire*, à paraître.

CATZ F. (1982), *Mathématiques*, U.E.R. Facultés des Sciences Economiques, Université des Sciences Sociales de Grenoble, Cours polycopié.

DE WERRA D. (1990), *Eléments de programmation linéaire avec application aux graphes*, Presses polytechniques Romandes.

DROESBEKE F., HALLIN M., LEFEVRE Cl. (1986), *Programmation linéaire par l'exemple*, Ellipses.

FAURE R. (1979), *Précis de recherche opérationnelle*, Dunod.

IGNIZIO J.P. (1982), *Linear programming in single - & multiple - objective systems*, Prentice Hall.

HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J. (1974), *Introduction to operations research*, Holden-Day.

KAUFMANN A. (1979), *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle*, Dunod.

MARTEL A. (1979), *Techniques et applications de la recherche opérationnelle*, Gaëtan Morin.

SAKAROVITCH M. (1984), *Graphes et programmation linéaire*, Hermann.

SIMONNARD M. (1962), *Programmation linéaire*, Dunod.

TAHA H.A. (1976), *Operations Research*, Collier Macmillan.