Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ 255 (François LO JACOMO, Paris)

Soient A, B, C trois réels vérifiant : $A \geq B \geq C > 0$ et $A + B + C = \pi$.

Montrer que $\dfrac{\cos B}{\cos C} + \dfrac{\cos C}{\cos B} \leq 2\,\dfrac{\sin^2 A}{\sin B \sin C}$.

ÉNONCÉ 256 (M. LAFOND, Dijon)

Soit $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{U}_n^2 = \ln(2)$

ÉNONCÉ 257 (Jacques BOUTELOUP, Rouen)

Soient un triangle ABC, 2 points P, P' de (BC), 2 points Q, Q' de (CA) et 2 points R, R' de (AB). On désigne respectivement par I, J, K, I', J', K' les points d'intersection de (BQ) et (CR'), (CR) et (AP'), (AP) et (BQ'), (BQ') et (CR), (CR') et (AP), (AP') et (BQ). On désigne par (Π) la propriété : (AI), (BJ), (CK) concourent en un point (noté M). Démontrer que (Π) entraîne :

- (AI'), (BJ'), (CK') concourent en un point (noté M').
- (JK), $(J'K')$, (BC) concourent.
- (II'), (JJ'), (KK'), (MM') concourent.

Démontrer que (Π) est réalisée lorsque (AP), (BQ), (CR) d'une part et (AP'), (BQ') et (CR') d'autre part concourent; lorsque P, Q, R d'une part et P', Q', R' d'autre part sont alignés.

On désigne par U un point distinct de A, B, C, par (D_1), (D_2), (D_3) les conjuguées respectives de (AU), (BU), (CU) par rapport à (AB,AC), (BC,BA), (CA,CB). Démontrer que (Π) est réalisée lorsque (AP,AP'), (BQ,BQ'), (CR,CR') sont respectivement conjuguées par rapport à (AU,D_1), (BU,D_2), (CU,D_3). Indiquer deux cas particuliers classiques.

Bien entendu, il s'agit de concourances au sens projectif.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ 237 (Charles NOTARI, Montaut).

Soient $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés ayant un sommet commun A et des côtés de longueurs différentes. Soit P l'intersection de la droite (EF) avec la droite (CD) . A quelle condition les droites (AP) et (CF) sont-elles perpendiculaires ?

SOLUTION de Raymond RAYNAUD (Digne).

Charles Notari ne nous dit pas si les deux carrés sont ou non de même sens. Il nous faut donc examiner les deux cas.

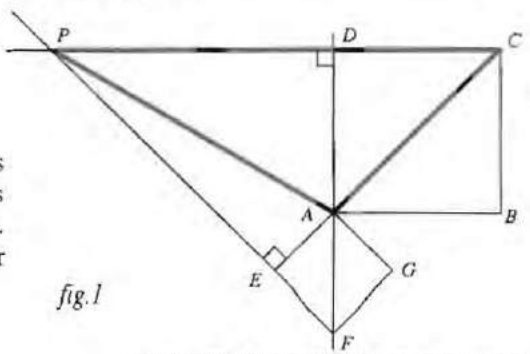


fig.1

→ Cas où les carrés $ABCD$ et $AEFG$ sont de même sens.

Si E appartient à (AC), le quadrangle $ACFP$ est orthocentrique. La condition $E \in (AC)$ est donc **suffisante** pour que (AP) et (CF) soient perpendiculaires.

Est-elle **nécessaire**?

Prenons un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont respectivement la direction et le sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Posons $AB = a$, $AE = r$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = u$, en supposant que $u \neq \pi/2 \text{ mod.}\pi$ pour assurer l'existence de P.

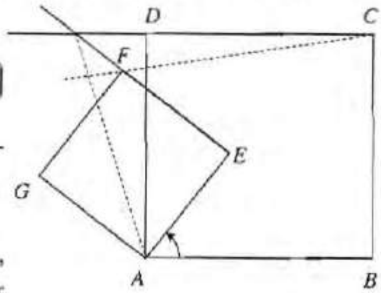


fig.2

L'équation de (EF) est $x\cos u + y\sin u = t$.

L'abscisse p de P est définie par l'égalité $p\cos u = r - a\sin u$.

D'où les coordonnées du vecteur $\cos u.\overrightarrow{AP}$: $(r - a\sin u, a\cos u)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$ sont $(r(\cos u - \sin u), r(\cos u + \sin u))$

Et celles de $\overrightarrow{CF}$ $(r(\cos u - \sin u) - a, r(\cos u + \sin u) - a)$

Le produit scalaire des vecteurs $\cos u.\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{CF}$ se réduit à $(a^2 - r^2).(\cos u - \sin u)$.

Dans le cas où a et r sont différents, on retrouve la condition **suffisante** d'orthogonalité des droites (AP) et (CF), qui apparaît aussi comme **nécessaire** : $u = \pi/4 \text{ mod.}\pi$.

Dans le cas où $a = r$, (AP) est axe de symétrie de la figure, donc médiatrice de $[CF]$.

Comme le montrait le calcul, (AP) et (CF) sont perpendiculaires pour toute disposition des deux carrés.

→ Cas où les carrés $ABCD$ et $AEFG$ sont de sens différents.

Des calculs analogues aux précédents conduisent à la condition et nécessaire et suffisante d'orthogonalité de (AP) et (CF) :

$$(a^2 - r^2).\cos u - (a^2 + r^2).\sin u + 2ar = 0 .$$

Si $a \neq r$, l'équation précédente a deux solutions distinctes, et il existe donc deux positions distinctes du carré $AEFG$ telles que (AP) et (CF) soient perpendiculaires. Par exemple, si $a = 2r$, les deux solutions sont respectivement voisines de 1,30 et 2,93.

Ce que l'on peut vérifier approximativement sur une figure (1,30 rd ≈ 74,3° et 2,93 rd ≈ 167,7°)

Si $a = r$, l'équation se réduit à $\sin u = 1$. Mais quand $u = \pi/2$, ni *(AP)* ni *(CF)* ne sont définies (*E* est en *D* et *F* est en *C*). Il n'y a pas de disposition des deux carrés telle que *(AP)* et *(CF)* soient perpendiculaires.

AUTRES SOLUTIONS

Miguel AMENGUAL-COVAS (Majorque-Espagne), Michel BIGOT (33-La Teste), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), S. CHRETIEN (93 - Villemomble), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Louis FAUCON (Le Mans), Jacques FORT (Poitiers), René MANZONI (Le Havre), Denis PEPIN (Verdun), Maurice PERROT (Paris), Pascal PETER (33-La Rivière), Marguerite PONCHAUX (Lille), André VIRICEL (54-Villers-lès-Nancy)
... et deux solutions incomplètes ou fausses.

REMARQUES

Seuls trois lecteurs (Miguel AMENGUAL-COVAS, Michel BIGOT et S. CHRETIEN) plus l'auteur se sont limités au premier cas où les carrés ont même orientation. Miguel AMENGUAL-COVAS signale qu'un énoncé similaire (dont la formulation initiale de l'énoncé de Charles NOTARI est une traduction fidèle) est paru sous le numéro 10322 dans *The American Mathematical Monthly* d'Août-Septembre 1993 (vol.100, n-ro 7). Proposé par Jiang Huanxin, étudiant à l'université FuDan de ShangHai, cet énoncé permettait lui aussi d'envisager les deux cas. Par contre les deux énoncés excluent le cas où les longueurs des deux carrés sont égales et où, donc, l'égalité des triangles rectangles *ADP* et *AEP*, dans le premier cas de figure, fait de *(AP)* l'axe de symétrie de la figure.

Dans le deuxième cas, beaucoup de lecteurs ont reconnu une *strophoïde oblique* : *ABCD* étant fixé, le point *F* décrit une strophoïde oblique d'axe *(BC)*, de point double *C* et de pôle (foyer singulier) *A*. Edgard DELPLANCHE recommande à ce sujet deux ouvrages : J. LEMAIRE, *Hyperbole équilatère et courbes dérivées* et, COMMISSAIRE ET CAGNAC, *Cours de Mathématiques Spéciales*. L'asymptote, symétrique de *(AD)* par rapport à *(BC)*, coupe la courbe en *K*, qui appartient éga-

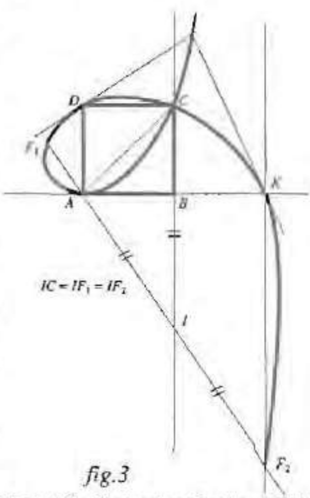


fig.3

lement à *(AB)*. La courbe passe également par D, et les points D et K sont conjugués : les tangentes à la courbe en ces points se coupent sur la courbe.

La courbe est tangente en A à *(AB)* et en C aux bissectrices de l'angle $\widehat{BCA}$.

Équation polaire : $\rho = -\dfrac{2a}{1 + \tan \theta/2}$

Edgard DELPLANCHE s'appuie notamment sur une solution géométrique selon laquelle, si M désigne l'intersection autre que A des cercles circonscrits à $ABCD$ et $AEFG$, indépendamment de la condition : *(AP)* perpendiculaire à *(CF)*, M appartient, dans le premier cas, à *(BE)* et *(DG)*, dans le second cas, à *(DE)* et *(BG)*. En effet, dans le premier cas par exemple, la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ qui transforme B en D transforme *(BE)* en *(DG)*. Ces droites sont donc perpendiculaires et leur intersection M_1 appartient tant au cercle de diamètre $[BD]$ qu'à celui de diamètre $[EG]$. Donc $M_1 = M$ et, dans les deux cas, la droite $(O\Omega)$ reliant les centres des deux cercles (mais aussi des deux carrés) est médiatrice de $[AM]$, d'où l'on déduit que M appartient également à *(CF)* et que *(AM)* est perpendiculaire à *(CF)*. La condition cherchée est donc, dans les deux cas, que A, M, P soient alignés

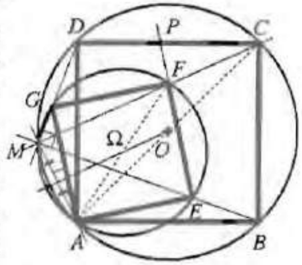


fig.4

Jacques FORT remarque que cette condition équivaut à dire que C, D, E, F sont cocycliques puisque P, sur l'axe radical *(AM)* des deux cercles, a même puissance :

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PM} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}$$

par rapport aux deux cercles. Par ailleurs, dans le second cas, P, A, C, F sont eux aussi cocycliques car
$(CA,CP) = -\pi/4 = (FA,FP)$.
On a donc : $(AP,AF) = (CP,CF)$ ce qui entraîne :

$$(AP,CF) = (CP,CF) + (AF,CF)$$
$$= \pi/2 + (CB,CF) - (CF,AF)$$

de sorte que *(AP)* et *(CF)* sont perpendiculaires si et seulement si, en appelant I l'intersection de *(AF)* et de *(BC)*, le tri-

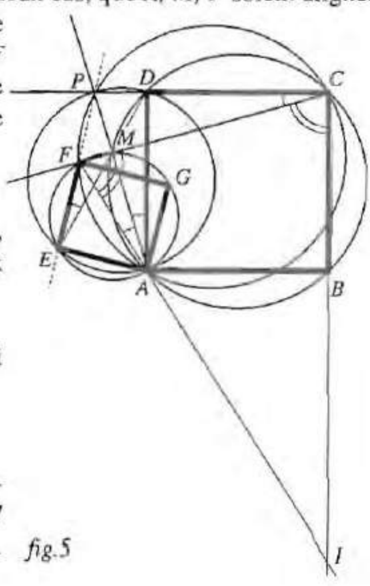


fig.5

angle CIF est isocèle. On retrouve une caractérisation classique de la strophoïde comme ensemble des points F tels que, si (AF) coupe l'axe (BC) en I, $IF = IC$.

Toutes ces considérations géométriques permettent aisément de tracer la courbe point par point. Par exemple, René BENOIST (91-Palaiseau) remarque que (AM) est bissectrice de l'angle $\widehat{DAF}$ car dans le cercle de diamètre $[AP]$, qui contient D et E, $(AD, AP) = (ED, EP)$ et dans le cercle circonscrit à $AEFG$, qui passe par M, $(AM, AF) = (EM, EF) = (ED, EP)$, M appartenant à (AP) et à (ED). Pour un point M quelconque du cercle circonscrit à $ABCD$, on peut donc construire la droite (AF), symétrique de (AD) par rapport à (AM), qui coupe (CM) en F.

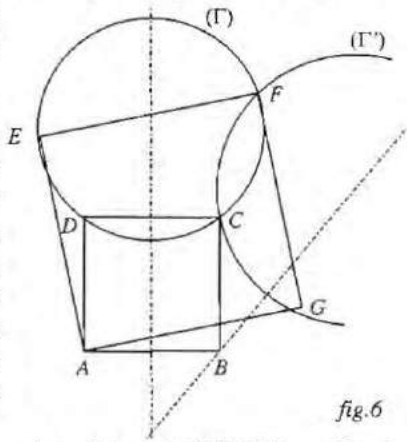


fig.6

Autre idée de Jacques FORT : C, D, E, F étant cocycliques, considérons un cercle quelconque (Γ) passant par C et D et cherchons deux points E et F sur ce cercle satisfaisant l'énoncé. La similitude de centre A qui transforme D en C transforme (Γ) en un cercle (Γ') qui coupe (Γ) en deux points : C et F, puisque ladite similitude transforme E en F (en se limitant au deuxième cas de figure).

Je signalerai également la construction d'André VIRICEL et Denis PEPIN qui présente l'intérêt qu'elle couvre les deux cas, plus le cas où les carrés ont même longueur de côté. Choisissons un point P quelconque sur (CD). La droite (CF), perpendiculaire à (AP), s'en déduit. Si N désigne l'intersection de (AD) et (CF), les triangles ADP et CDN ont leurs côtés perpendiculaires et sont égaux, donc le triangle DNP est isocèle rectangle.

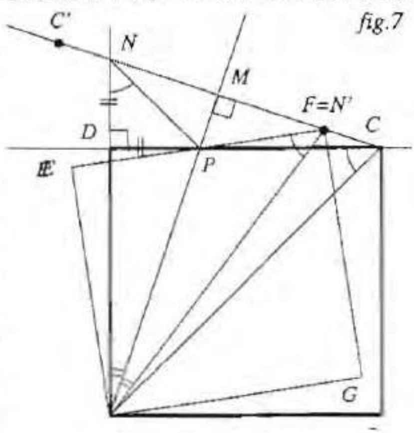


fig.7

Pour que P appartienne à (EF), il faut que l'angle $\widehat{AFP}$ soit égal à $\pm\frac{\pi}{4}$ (mod.π). Et il n'y a manifestement que quatre points de la droite fixe (CN) qui puissent vérifier cette condition, au maximum : si x désigne la mesure algébrique de $\overline{FM}$ (M étant l'intersection de (AP) et de (CN)), il est facile d'écrire cette condition sous la forme : $x^4 + \alpha x^2 + \beta = 0$. Or N et C vérifient ladite condition, tout comme leurs symétriques N' et C' par rapport à (AP). Le point N, qui décrit (AD), couvre le premier cas. Son symétrique N' couvre le second cas : on retrouve le résultat ci-dessus selon lequel (AF) est symétrique de (AD) par rapport à (AP). $F = C$ est à exclure car la droite (CF) ne serait pas définie. Quant à $F = C'$, cela entraîne $AF = AC$, F décrit le cercle de centre A et de rayon $[AC]$, mais c'est le cas exclu où les deux carrés ont même dimension.

Un mot de Jacques FORT, pour conclure : le problème se généralise aisément au cas où $ABCD$ et $AEFG$ sont des *rectangles* semblables.

ÉNONCÉ 238 (Jacques AMON, Limoges)

La surface d'équation $x^n + y^n + z^n = a^n$ contient-elle des droites, et si oui, lesquelles?

SOLUTION de François COUCHOT (14-Hérouville St Clair)

Soient $x = u + bt$, $y = v + ct$, $z = w + dt$ $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$, les équations paramétriques d'une droite (D). Pour que (D) soit contenue dans la surface S_n d'équation cartésienne $x^n + y^n + z^n = a^n$, il faut que, pour tout t, on ait :

$$\sum C_n^k \left(b^{n-k} \times u^k + c^{n-k} \times v^k + d^{n-k} \times w^k\right) t^{n-k} = a^n \text{ , } 0 \leq k \leq n.$$

Par conséquent, on a le système suivant :

$$b^{n-k} \times u^k + c^{n-k} \times v^k + d^{n-k} \times w^k = 0 \text{ si } 0 \leq k \leq (n-1)$$

$$u^n + v^n + w^n = a^n$$

En particulier, on a $b^n + c^n + d^n = 0$. Si n est pair, ceci n'est possible que si $b = c = d = 0$. Or, $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$. Donc si n est pair, la surface S_n ne contient aucune droite.

Supposons maintenant n impair supérieur ou égal à 3 ($n = 1$ est un cas très connu). Considérons les trois premières équations du système :

$$b^n + c^n + d^n = 0.$$

$$b^{n-1} \times u + c^{n-1} \times v + d^{n-1} \times w = 0$$

$$b^{n-2} \times u^2 + c^{n-2} \times v^2 + d^{n-2} \times w^2 = 0$$

Soient :

$$A = \begin{bmatrix} b^{n-1} & c^{n-1} & d^{n-1} \\ b^{n-2} \times u & c^{n-2} \times v & d^{n-2} \times w \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Alors les deux premières équations sont équivalentes à $AX = 0$ et les deux dernières à $AY = 0$. Nous allons distinguer deux cas :

Premier cas : X et Y sont colinéaires et donc $Y = \mu X$ puisque $X \neq 0$. Alors l'équation $u^n + v^n + w^n = a^n$ devient $\mu^n(b^n + c^n + d^n) = a^n$. Puisque $b^n + c^n + d^n = 0$, pour qu'on ait des solutions, il faut $a = 0$. Si on se donne b et c, il faut prendre $d = -(b^n + c^n)^{1/n}$. Les droites solutions ont pour équations paramétriques :

$$x = b(\mu + t)$$
$$y = c(\mu + t)$$
$$z = -(b^n + c^n)^{1/n}(\mu + t).$$

– Si $b \neq 0$, on peut remplacer $b(\mu + t)$ par t, c/b par c. Les droites solutions ont pour équations cartésiennes : $y = cx$ et $z = -(1 + c^n)^{1/n}$

– Si $b = 0$, on peut remplacer $c(\mu + t)$ par t car $c \neq 0$). S_n contient aussi la droite d'équations cartésiennes : $x = 0$ et $y + z = 0$.

Deuxième cas : X et Y sont linéairement indépendants. On a alors : $(cw - dv\ ,\ du - bw\ ,\ bv - cu) \neq (0, 0, 0)$.

La matrice A est alors de rang 1. On a donc les relations suivantes :

$$(cd)^{n-2} \times (cw - dv) = 0$$
$$(db)^{n-2} \times (du - bw) = 0$$
$$(bc)^{n-2} \times (bv - cu) = 0$$

On en déduit que $b = 0$ ou $c = 0$ ou $d = 0$. Supposons que $b = 0$. De l'équation $b^n + c^n + d^n = 0$ on tire $d = -c$. L'équation

$$b^{n-1} \times u + c^{n-1} \times v + d^{n-1} \times w = 0$$

devient $c^{n-1} \times (v + w) = 0$ et on a donc $w = -v$.

Avec ces résultats, on vérifie facilement que, pour $k \geq 1$,

$$b^{n-k} \times u^k + c^{n-k} \times v^k + d^{n-k} \times w^k = 0$$

La dernière équation devient $u^n = a^n$. Par conséquent, $u = a$. Pour que X et Y soient linéairement indépendants, il faut $u \neq 0$ et donc $a \neq 0$.

S_n contient la droite d'équations cartésiennes $x = a$ et $y + z = 0$.

Conclusion

- Si n est pair, S_n ne contient aucune droite.
- Si n est impair (≥ 3), S_n contient les trois droites suivantes :

D_1 d'équations cartésiennes $x = a$ et $y + z = 0$

D_2 d'équations cartésiennes $y = a$ et $x + z = 0$

D_3 d'équations cartésiennes $z = a$ et $y + x = 0$.

Si, de plus, $a = 0$, on a aussi les droites d'équations cartésiennes: $y = cx$ et $z = -(1 + c^n)^{1/n} x$, ($c \neq 0$ et $c \neq -1$).

Remarque : Les droites D_1, D_2 et D_3 sont dans S_1.

AUTRES SOLUTIONS

Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Charles NOTARI (31 - Montaut), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Pierre SAMUEL (92 - Bourg-la-Reine), M. VIDIANI (21 - Dijon) ... et une solution fausse.

REMARQUES

Faut-il se limiter à l'étude ci-dessus ? Si les cas triviaux, $n = 0$ et $n = 1$, peuvent être laissés de côté, Marguerite PONCHAUX et M. VIDIANI se demandent si l'on ne pourrait pas envisager le cas où n ne serait pas entier.

Charles NOTARI et M. VIDIANI étudient le problème dans l'espace complexe $\mathbf{C}^3$. Il convient alors de mettre à part le cas classique de la sphère (M. VIDIANI regrette énergiquement qu'il ne soit plus enseigné) qui contient deux familles infinies de droites complexes telles que par tout point de la sphère il passe une droite de chaque famille, et le cas $n \geq 3$, pour lequel les droites solutions sont là encore parallèles à l'un des plans $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$, mais, du fait que les équations $w^n = -1$ et $x^n = a^n$ admettent chacune n solutions complexes quel que soit n, pair ou impair (alors qu'elles admettent une et une seule solution réelle pour n impair, zéro pour n pair), la surface contient exactement, pour tout n supérieur ou égal à 3, $3n^2$ droites, hormis donc le cas où $a = 0$ et où la surface est un cône.

Pierre SAMUEL va encore plus loin et étudie le problème dans $\mathbb{K}^3$, $\mathbb{K}$

étant un corps, je suppose commutatif, et algébriquement clos, donc infini. On peut se limiter aux corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle (comme $\mathbf{C}$) ou de caractéristique p ne divisant pas n, car si $\mathbb{K}$ est de caractéristique p avec $n = m.p^s$ (m premier avec p), $x^n + y^n + z^n - a^n = (x^m + y^m + z^m - a^m)^{p^s}$ de sorte que la surface $x^n + y^n + z^n = a^n$ est la même que la surface $x^m + y^m + z^m = a^m$.

En supposant donc p premier avec n ($a \neq 0$ et $n \geq 3$), on retrouve les $3n^2$ droites parallèles à l'un des plans $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$, du fait que, là encore, les équations $w^n = -1$ et $x^n = a^n$ admettent chacune exactement n racines. Mais on peut en trouver d'autres, d'équation: $x = qz + b$, $y = rz + c$ ($qr \neq 0$), si q, r, b, c vérifient notamment :

(1) $q^n + r^n = -1$ (2) $n\left(q^{n-1}b + r^{n-1}c\right) = 0$

(3) $\dfrac{n(n-1)}{2}\left(q^{n-2}b^2 + r^{n-2}c^2\right) = 0$ (4) $b^n + c^n = a^n$

Comme n est premier avec p, l'équation (2) équivaut à $q^{n-1}b = -r^{n-1}c$, ce qui entraîne : $q^{2n-2}b^2 = r^{2n-2}c^2$.

Mais pour en déduire, en le rapprochant de (3), que $q^n = -r^n$ (ce qui contredit (1)), il fait en outre que p ne divise pas $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Si cette condition n'est pas remplie, on peut trouver d'autres droites que les $3n^2$ habituelles, 64 droites supplémentaires si $n = 4$ et $p = 3$, 250 si $n = 5$ et $p = 2$, etc.

Plus généralement, si $n - 1 = m.p^s$ (m premier avec p et $s \geqslant 1$), on a l'identité: $(u + v)^n = (u + v)\left(u^{p^s} + v^{p^s}\right)^m$.

Si $m = 1$, le système se réduit donc à quatre équations qui équivalent, en posant $\dfrac{b}{q} = t\,\dfrac{c}{r}$, compte tenu que b, c, q et r sont tous non nuls, à :

$$\left.\begin{array}{l} q^n + r^n = -1 \\ t\,q^n + r^n = 0 \\ t^{n-1}q^n + r^n = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q^n = \dfrac{-1}{1-t} \\ r^n = \dfrac{t}{1-t} \\ t^{n-2} = 1 \end{array}\right.$$

$$c^n = \frac{a^n r^n}{t^n q^n + r^n} = \frac{a^n}{1-t}$$

ce qui, pour chacune des $(n-3)$ valeurs possibles de t ($t \neq 1$), fournit n valeurs de q, n valeurs de r, n valeurs de c, donc en tout $(n-3)n^3$ droites supplémentaires.

Si, par contre $m \geqslant 2$, le système contient au moins six équations dont les troisième et quatrième entraînent $\frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ (soit $t = 1$), donc $q^n = -r^n$, ce qui contredit l'équation $q^n + r^n = -1$: il n'existe alors aucune droite autre que les $3n^2$ parallèles aux plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Enfin, M. VIDIANI nous informe que «la recherche des droites sur une cubique non réglée est l'objet d'une théorie très poussée. Christian JUEL (1855-1935) a démontré qu'une telle surface ne peut pas contenir plus de 27 droites et MONTEL a précisé ultérieurement qu'elle ne peut en contenir que 3, 7, 15 ou 27».

En résumé, la surface de CLEBSCH $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3$ en contient effectivement 27 (eikosiheptagramme), et une telle surface en argent, offerte à JUEL en 1925, est aujourd'hui visible à l'Institut Mathématique de Copenhague. Le groupe engendré par ces 27 droites, d'ordre 25920, se retrouve en algèbre symplectique. La bibliographie, qui prendrait plus d'une page, contient, entre autres, un excellent article RMS de décembre 1987, p. 152-158.

ÉNONCÉ 239 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

A l'intérieur d'un triangle ABC, on trace un cercle de rayon a tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$. A partir des sommets B et C, on trace deux tangentes à ce cercle, qui se coupent en M.

Démontrer que le rayon ρ du cercle inscrit dans le triangle BCM peut se calculer par la formule : $\rho = r_a \left(\frac{r-a}{r_a - a}\right)$ où r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC et r_a le rayon du cercle exinscrit, tangent au côté $[BC]$ et aux prolongements des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

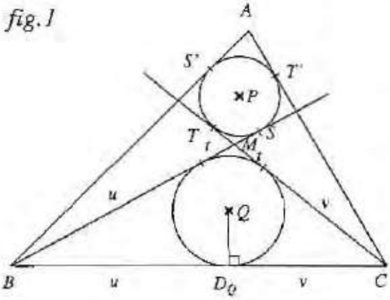
SOLUTION d'après Jacques BOUTELOUP (Rouen).

Appelons P le centre du cercle de rayon a tangent à $[AB]$ et $[AC]$; S, S', T, T' les points de contact des tangentes issues de B et C. Appelons Q le centre du cercle de rayon ρ, inscrit dans MBC, D_Q son point de contact avec $[BC]$ et t, u, v les distances de M, B, C aux points de contact. La relation évidente $t + u + v = \frac{MB + MC + BC}{2}$ entraîne $u = \frac{MB - MC + BC}{2}$. Or,

$MB - MC = SB - TC = S'B - T'C = AB - AC$, d'où $u = \dfrac{AB - AC + BC}{2}$, ce qui signifie que D_Q coïncide avec D, point de contact avec $[BC]$ du cercle inscrit dans ABC, ou encore que, quel que soit P, $Q \in (ID)$, I étant le centre du cercle inscrit dans ABC.

Appelons β l'angle $(BC,BI) = (BI,BA) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et θ l'angle (BC,BQ). Comme (BQ) et (BP) sont bissectrices respectivement de $\widehat{CBM}$ et $\widehat{MBA}$, l'angle (BQ,BP) est constant, égal à β, d'où l'on déduit que $(BI,BP) = \theta$.

fig.1



Considérons maintenant le centre J du cercle exinscrit au triangle ABC et appelons A' et P' les projections orthogonales de A et P sur (BJ). La projection orthogonale de I sur (BJ), c'est bien sûr B, si bien que :

$\dfrac{BP'}{PP'} = \tan\theta$ et $\dfrac{BA'}{AA'} = \tan\beta$. Mais $\dfrac{\tan\theta}{\tan\beta} = \dfrac{DQ}{DI} = \dfrac{\rho}{r}$

d'où $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{BP'}{BA'} \times \dfrac{AA'}{PP'} = \dfrac{IP}{IA} \times \dfrac{JA}{JP} = \dfrac{r-a}{r} \times \dfrac{r_a}{r_a - a}$ ce qui achève la démonstration.

AUTRES SOLUTIONS

Miguel AMENGAS COVAS (Majorque - Espagne), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Jacques LEGRAND (Biarritz), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Marguerite PONCHAUX (Lille), Raymond RAYNAUD (Digne), André VIRICEL (54 - Villers-Lès-Nancy).

REMARQUES

C'est en Juillet 1993 que Michèle PECAL m'a envoyé quatre énoncés d'Igor CHARIGUINE, traduits par Pierre

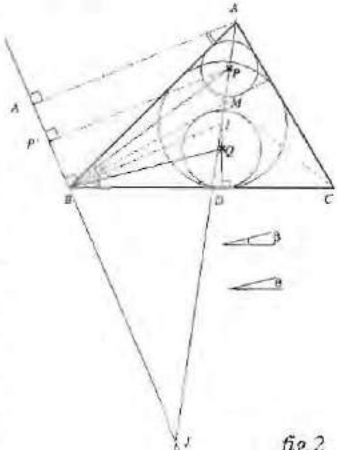


fig.2

MARQUANT (Tarbes), et je les en remercie. Le premier est paru sous le numéro 223, le second, sous le numéro 227, celui-ci est le troisième et le dernier vient d'être proposé dans le *Bulletin* d'Avril-Mai 1996 sous le numéro 252.

Miguel AMENGUAL COVAS nous informe que cet énoncé 239 a été résolu initialement par le mathématicien japonais Tameyuki YOSHIDA (1819-1892), et qu'un cas particulier de ce problème (quand $\widehat{A} = 90°$) a été posé par Hidetosi FUKAGAWA et D. PEDOE sous le numéro 2.2.4 dans *Japanese Temple Geometry Problems* (Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, 1989).

La solution originale, que Hidetosi Fukagawa a transmise à Miguel Amengal Covas en novembre 1993, calcule la surface S du triangle MBC de deux manières :

➞ à partir du rayon ρ du cercle inscrit :

$S = \rho(u + v + t)$ (avec les notations de la figure 1)

➞ et par la formule de Héron : $S = \sqrt{(u + v + t)uvt}$, si bien que $t = \dfrac{(u + v)\rho^2}{uv - \rho^2}$.

Le même calcul permet d'exprimer t', distance de A aux points de contact du cercle inscrit dans ABC, à partir de r et des mêmes valeurs u et v, puisque $D_Q = D$. Or, la distance d des points de contact avec $[AC]$ du cercle de rayon a et du cercle inscrit dans ABC, de rayon r, vaut $d = t\left(\dfrac{a + \rho}{\rho}\right) = t'\left(\dfrac{r - a}{r}\right)$ d'où l'on déduit, non sans calculs, la relation cherchée, dans la mesure où $uv = rr_a$ et où $\rho = -r$ est solution triviale de l'équation à résoudre.

L'idée essentielle, que tout le monde a utilisée, c'est que Q se projette toujours en le même point D sur $[BC]$. Pour les amateurs d'homographies, en l'occurrence Jacques LEGRAND et Jacques BOUTELOUP, cela n'a rien d'étonnant, et le problème dans son ensemble fait partie de ceux "sur lesquels il est interdit de sécher" (dixit Jacques BOUTELOUP). Comme (BQ) et (BP) sont bissectrices de $\widehat{CBM}$ et $\widehat{MBA}$ respectivement, l'angle (BQ, BP) est constant égal à β, et pour la même raison, l'angle (CP, CQ) est constant égale à γ. Or, (BP) et (CP) se correspondent homographiquement, puisque P parcourt une droite fixe (AI). En composant cette homographie avec les rotations ci-dessus, on constate que (BQ) et (CQ) sont elles aussi en correspondance homographique, et comme (BC) est sa propre image, Q

décrit une droite. Cette droite passe par I (obtenu pour $(P = A)$, perpendiculaire à (BC) car, pour $P = J$, centre du cercle exinscrit, les rotations d'angles $-\beta$ et γ transforment (BJ) et (CJ) en deux perpendiculaires à (BC), Q étant rejeté à l'infini. La mesure algébrique de QD sur cette droite, donc (lorsque Q est intérieur au triangle) le rayon ρ est, là encore, une fonction homographique de $\overline{AP}$, donc de a, laquelle est entièrement déterminée par le fait qu'elle associe r à 0 ($P = A \Rightarrow Q = I$), 0 à r ($P = I \Rightarrow Q = D$) et l'infini à r_a ($P = J \Rightarrow Q$ à l'infini).

Par ailleurs, cette dernière implication n'a de sens que si l'on généralise le problème à un point P quelconque de la droite (AI), en donnant à a et ρ les signes respectifs de $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AI}}$ et $\dfrac{\overline{DQ}}{\overline{DI}}$. Lorsque le cercle de centre P est intérieur au triangle ABC, la relation $MB - MC = AB - AC = u - v$ prouve que M est sur la branche d'hyperbole de foyers B et C passant par A et de sommet D. Mais, de part et d'autre de A et I, il existe deux points P_1 et P_2 tels que si P est en P_1 ou P_2, M, sur la même hyperbole, est rejeté à l'infini, et si P est extérieur au segment $[P_1\ P_2]$, M décrit l'autre branche, de sommet E, de ladite hyperbole ; la relation entre ρ, r, r_a, a est toujours vérifiée sous réserve que le cercle de centre Q est alors *exinscrit* à MBC. Et lorsque P est en J et Q rejeté à l'infini, M est en E.

Mais on peut faire, de cette propriété $D_Q = D$, une utilisation plus ou moins géométrique, et je me dois de citer l'idée suivante, utilisée par près de la moitié des lecteurs :

Quel est le centre de l'homothétie positive transformant le cercle de rayon ρ, inscrit dans MBC, en le cercle de rayon r_a, exinscrit à ABC ? Les homothéties de centre A transformant I en P, resp. en J, transforment D en D_P resp. en D_J, d'où l'alignement de A, D_P, D, D_J. Mais $D_Q = D$, ce qui entraîne que le cercle exinscrit à MBC a le même point de contact avec $[BC]$ que le cercle exinscrit à ABC, à savoir le point E tel que $BE = CD$. L'homothétie positive de centre M, qui transforme ce cercle exinscrit à MBC en le cercle inscrit dans MBC, transforme E en E_Q, d'où l'alignement de M, E_Q et E, mais l'homothétie négative de centre M qui transforme ce cercle de centre Q en celui de centre P transforme E_Q en D_P. Dès lors D_P, E_Q et E sont alignés, tout comme D_P, D et D_J et D_P est le centre cherché de l'homothétie positive transformant D en D_J et E_Q en E, donc le cercle de centre Q en celui de centre J.

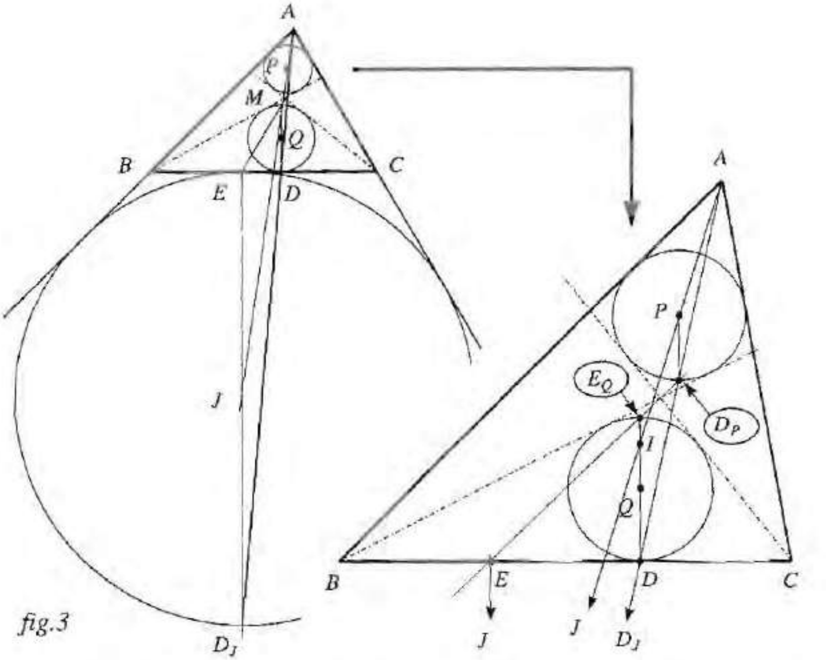


fig.3

Maintenant l'alignement de D_P, D et D_J avec A permet en outre d'affirmer que : $\dfrac{D_PD_J}{D_PD} = \dfrac{PJ}{PI} = \dfrac{r_a - a}{r - a}$.

Or $\dfrac{D_PD_J}{D_PD}$ n'est rien d'autre que le rapport $\dfrac{r_a}{\rho}$ de l'homothétie ci-dessus, ce qui achève la démonstration.