AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc... L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquettes Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL - 6, rue des annelets.
75019 PARIS

Merci à tous les collègues d'avoir répondu à mon appel pour les réponses. Presque toutes les questions ont obtenu satisfaction, mais vous pouvez toujours envoyer des compléments !

Nouveaux avis de recherche

Avis de recherche n° 54 de Gaspard Macia (St Mitre les Remparts)

Peut-on construire la parallèle à une droite donnée passant par un point donné uniquement à la règle ?

Avis de recherche n° 55 de Danièle Touiller, Résidence Croix-Blanche, Bat B, 03100 Montluçon.

Recherchons collègues enseignant, en 4° ou 3° européenne, les mathématiques en anglais. Avant de proposer dans notre établissement cette expérience à la rentrée 97, nous aimerions savoir si elle a déjà été tentée, comment et avec quel succès.

Avis de recherche n° 56 de Marc Royer (Montélimar).

Pourquoi, comme le dit le programme de Terminale ES, le coefficient de corrélation linéaire est-il "bon" lorsqu'il est supérieur à $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

M. Royer s'étonne que le coefficient de corrélation entre (1, 2, .., n) et (1, 4, ..., n^2), qui tend vers $\frac{\sqrt{15}}{4} = 0,9$ ... soit "bon".

Avis de recherche n° 57 de Vincent Thill (Migennes)

Pourquoi la solution de l'équation : $100 \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{x}{18}\left(3 - 8\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}\right)^2 = x$, $x = 3,141677...$ **est-elle proche de π ?** V. Thill fait remarquer que

$$100 \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}\left(3 - 8\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}\right)^2 = \frac{25}{\left(2\cos\frac{\pi}{9} + 1\right)^2 - \frac{1}{3}}.$$

Avis de recherche n° 58 d'Eric Morvan (Malut)

Que répondre aux élèves qui demandent pourquoi, dans une réflexion, la gauche et la droite sont inversées, alors que le haut et le bas ne le sont pas ?

Réponses aux anciens avis de recherche

Avis de recherche n° 38 sur le symbole @.

La rocambolesque histoire de ce signe a été dénichée par un collègue dont je ne peux déchiffrer la signature, dans la publication : " ligatures, typographie et informatique", Jacques André, Adolf Wild, rapport de recherche n° 2429, décembre 1994, INRIA.

" Voici un caractère qui était pratiquement inconnu en France il y a quelques années à peine. Comme le &, ce caractère est aussi issu des chancelleries ; c'est la ligature du latin "ad" ("à" en français) où le *a* et le ∂ cursifs de l'onciale ont fini par se confondre.

Le nom français de ce caractère, selon la version française (AFNOR) d'ISO Latin est "à commercial". Cependant, le nom que lui donnent les informaticiens français tourne autour de sa forme : a-rabesque, a-rondi, a roulé, a arrondi.. Mais le nom le plus fréquemment employé, du moins dans les milieux universitaires, est "arobas". Ce nom vient d'une confusion que nous nous expliquons de la façon suivante : les traducteurs qui ont voulu faire imprimer des manuels techniques où apparaissait pour la première fois ce signe ont du s'adresser à un imprimeur qui leur aura sorti un catalogue de fondeurs français. On y voit effectivement un caractère qui a à peu près la même graphie que @, qui s'appelle arobas, mais qui correspond à quelque chose de complètement différent : c'est le symbole d'une ancienne unité de poids et de capacité encore usitée en Espagne et au Portugal (arroba, équivalant à 12 à 15 kg ou 10 à 16 l), dont le vrai nom français est d'ailleurs arrobe ou arobe. Le mot provient de l'arabe ar-roub "le quart"."

Avis de recherche n° 42 de Charles Notari.

Trouver tous les couples d'entiers consécutifs tels que leur produit augmenté de 1 soit un cube.

Pierre Barnouin et Abdellatif Laouina (Kenitra) ont vérifié que les seules solutions $< 2^{31}$ sont (0,1) et (18, 19).

L'auteur a d'autre part montré que dans une solution, l'un des deux nombres est divisible par 3.

Alain Besson (St Julien en Genevois) a, lui, trouvé une famille de solutions. Sa contribution paraîtra dans le prochain bulletin.

Avis de recherche n° 45 (bulletin 403) sur l'équation des boeufs d'Archimède : $x^2 - 410\,286\,423\,278\,424\,y^2 = 1$ (1).

Solution d'Alain Besson (St Julien en Genevois).

Rappelons que comme $410\,286\,423\,278\,424 = 4729494 \times (9\,314)^2$, on se ramène à : $x^2 - 4\,729\,494\,z^2 = 1$ (2), dont la solution fondamentale est :
$x = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$
$y = 505\,494\,852\,343\,150\,330\,744\,778\,197\,355\,404\,089\,863\,40$
Le problème est d'en déduire la solution fondamentale de (1).

Il s'agit de trouver une solution particulière de (2) notée y telle que y soit pair et $y \equiv 0$ [4657].

1) L'expression générale de y_n solution de (2) est, en posant $a = 4729494$:

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\left(x_1 + y_1\sqrt{a}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{a}\right)^n\right] \quad (3)$$

Il s'agit donc de trouver le premier entier n non nul tel que y_n soit pair et congru à 0 modulo 4657.

2) Déterminons une relation de récurrence sur y_n.

Posons $p = x_1 + y_1\sqrt{a}$ et $q = x_1 - y_1\sqrt{a}$. Il vient : $2\sqrt{a} \times y_n = p^n - q^n$.

Vu que $p^n - q^n = (p-q)(p^{n-1} - q^{n-1}) - pq(p^{n-2} - q^{n-2})$ avec $p + q = 2x_1$ et $pq = 1$, on en déduit que $y_n = 2x_1 \times y_{n-1} - y_{n-2}$ avec la condition initiale : $y_1 = 50549485234315033074477819735540408986340$

D'autre part, la solution générale (3) permet d'affirmer que $y_2 = 2x_1y_1$. y_1 étant pair, on en déduit que pour tout n, y_n est pair.

Le problème est donc de trouver le plus petit entier n non nul vérifiant la congruence : $y_n \equiv 2x_1y_{n-1} - y_{n-2} \quad [4\,657]$

On vérifie par calcul direct que :

$$y_1 \equiv 3051 \; [4657] \; ; \; y_2 \equiv 551 \; [4657] \text{ et } 2x_1 \equiv 3155 \; [4657].$$

Il s'agit donc, en travaillant modulo 4657 de trouver n tel que

$$y_n \equiv 3\,155 y_{n-1} - y_{n-2} \equiv 0 \quad [4\,657]$$

avec les conditions initiales : $y_1 \equiv 3051$ [4657] et $y_2 \equiv 551$ [4657].

On considère la suite récurrente définie pas

$$y_n = (3\,155 y_{n-1} - y_{n-2}) - 4657 \times \text{Int}\left[(3\,155 y_{n-1} - y_{n-2} : 4657)\right]$$

Le premier n tel que $y_n \equiv 0$ [4657] convient.

Un travail sur simple calculatrice programmable donne $n = 2388$ (!!) (à vérifier). On peut donc exprimer la solution fondamentale de (2) satisfaisant aux conditions posées :

$$y_{2388} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x_1 + y_1\sqrt{a})^{2388} - (x_1 - y_1\sqrt{a})^{2388}\right]$$

Récapitulons :

L'équation du problème des bœufs d'Archimède :

$x^2 - 410286423278424z^2 = 1$ admet, si $a = 4729494$:

$x_1 = 109931986732829734979866232821433543901088089$

$y_1 = 50549485234315033074477819735540408986340$

La solution fondamentale de (1)

$$z_1 = \frac{1}{2 \times \alpha \times 4657\sqrt{a}} \times \left[(x_1 + y_1\sqrt{a})^{2388} - (x_1 - y_1\sqrt{a})^{2388}\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \times \left[(x_1 + y_1\sqrt{a})^{2388} - (x_1 - y_1\sqrt{a})^{2388}\right]$$

Il s'agirait alors d'expliciter en nombre dans le système décimal !!
A défaut, on peut donner un encadrement très grossier de x_1 en remarquant que :

$$x_1 \approx \frac{1}{\alpha}\left(x_1 + y_1\sqrt{a}\right)^{2388} \qquad \left(x_1 - y_1\sqrt{a} = \frac{1}{x_1 + y_1\sqrt{a}}\right)$$

en utilisant $10^{44} < x_1 < 10^{45}$ $\qquad 10^{40} < y_1 < 10^{41}$
on peut apprécier que x_1 est de l'ordre de 10^{100000}.

Avis de recherche n° 47 sur une démonstration simple du théorème attribué à Fermat : "tout carré de nombre premier différent de 2 et 5 est somme de trois carrés *non nuls*" ?

F. Bertrand (Toulouse) a envoyé une solution faisant appel à un théorème de Gauss, qui sera publiée dans un prochain bulletin.

Avis de recherche N°48 sur le sens des aiguilles de la montre et le sens trigonométrique.

Réponse de Philippe Durand (Vielmur, IUT d'Albi)

Les aiguilles d'une montre suivent le sens apparent de rotation du soleil autour de la terre, lorsque l'on regarde vers le sud : à l'est le matin, au sud à midi, à l'ouest le soir.

C'est pour cela qu'une montre peut servir de boussole :
- se mettre à l'heure solaire local et poser la montre horizontalement.
- orienter la petite aiguille dans la direction du soleil :
  - pour une montre "24 heures", le sud est à midi.
  - pour une montre "12 heures", le Sud est la direction de la bissectrice de l'angle de la petite aiguille avec midi.

NDLR : c'est donc aussi le sens de rotation de l'ombre du style sur les cadrans solaires (dans l'hémisphère nord !) ce qui est probablement à l'origine de ce choix.

Le sens trigonométrique correspond au sens réel de rotation de la terre autour du soleil, pour un observateur placé au pôle nord du système solaire et qui verrait ce dernier à ses pieds , ainsi qu'au sens de rotation de la terre sur elle-même, pour un observateur placé au pôle nord terrestre.

La lune tourne aussi dans le sens trigonométrique autour de la terre et sur elle-même, pour un observateur placé au pôle nord terrestre. Même schéma pour la plupart des planètes et de leurs satellites.

N.D.L.R. Maix pourrait-on savoir quel mathématicien ou astronome a réellement introduit ce sens de rotation ?

Avis de recherche N° 49 sur l'origine du mot affine.

Réponse de Pierre Renfer (Ostwald)

"Il me semble que l'adjectif affine est plus moderne, en géométrie, que le substantif affinité. Une affinité est une transformation classique un peu plus générale qu'une similitude, par laquelle la figure transformée n'est plus semblable à la figure de départ, mais garde néanmoins quelque "affinité" avec celle-ci.

Le groupe affine, au sens moderne, est engendré par les affinités."

Anne Michel-Pajus pense, elle par contre, qu'il doit y avoir un rapport avrec l'étymologie *ad finis* (vers la limite) et que l'expression affine a été choisie par opposition à projectif. Il faudrait donc avoir des précisions sur les *auteurs* de l'utilisation de l'adjectif affine (qui devrait d'ailleurs être affin au singulier).

Avis de recherche N° 50

Justification de la construction approchée de l'ellipse :

1) Prendre M sur AB tel que MB = OA - OB ;

2) Tracer la médiatrice de [AM] ; elle coupe (OA) en I et (OB) en J ;

3) Tracer le cercle de centre I passant par A et le cercle de centre J passant par B ; on constate que ces deux cercles sont tangents en un point T. Le quart d'ellipse est alors constitué des arcs AT et TB.

Jacques Dautrevaux (Saint-André) précise que la construction géométrique donnée par notre collègue est très exactement celle de l'anse de panier à 3 centres, figure classique en architecture et arts dérivés, où semble-t-il elle aurait fait son apparition vers le XV° siècle.

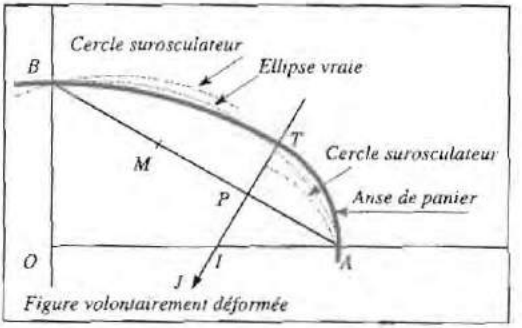


Figure volontairement déformée

Il fait remarquer que les deux cercles de la construction ne sont *pas* les cercles surosculateurs en A et B et que la véritable ellipse est, en A et B, mitoyenne entre les deux cercles.

Il donne aussi la justification de la construction, mais je laisse pour cela la parole à Isabelle Voltaire (Fouju).

"La construction proposée est un cas particulier du problème de la construction de deux cercles tangents entre eux, et tangents à deux droites données en

des points donnés, lequel admet une infinité de solutions.
Le premier cercle doit être tangent en A à une droite verticale (non tracée sur le dessin, inutile), son centre est donc sur (OA), le deuxième cercle, passant par B, est centré sur (OB).

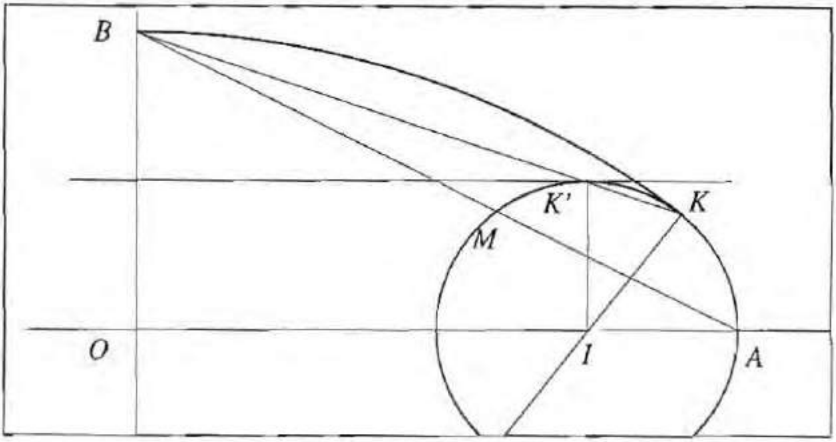


fig 2

Démontrons pourquoi la construction proposée donne bien des cercles répondant aux conditions indiquées.

On choisit sur (OA) un point I arbitraire, mais tel que AI soit inférieur à OB, et on trace le cercle $(C) = C(I;\, IA)$. Le deuxième cercle doit être tangent à (C), passer par B, et être centré sur (OB).

Transformons la figure par une inversion de pôle B, de puissance telle qu'elle laisse globalement invariant le cercle (C) : elle échange les points A et M, et laisse aussi globalement invariante la droite (OB) puisque celle-ci passe par le pôle d'inversion. Le cercle cherché, qui doit passer par le pôle, est transformé en une droite perpendiculaire à (BO). Comme l'inversion conserve les contacts, le cercle tangent à (C) est transformé en une droite tangente à (C), globalement invariant. On peut tracer deux droites tangentes à (C) et ayant la bonne direction, c'est-à-dire ici celle de (OA); pour la figure qui nous intéresse, l'une d'elles convient, c'est la tangente en K' (l'autre lui serait diamétralement opposée, et nous est inutile: elle donnerait un cercle tangent extérieurement à (C)).

Opérons encore l'inversion pour transformer K' en K: il suffit de tracer (BK') qui recoupe le cercle (C) en K, c'est le point de contact de (C) avec le cercle cherché; si deux cercles sont tangents, le point de contact et les centres sont alignés, donc pour trouver le centre J du deuxième cercle, il faut tracer la droite *(KI)* jusqu'à son intersection avec *(OB)*, puis on trace le cercle de centre J et de rayon JB. Grâce à l'inversion, la figure répond bien aux conditions imposées.

Cette construction fournit une infinité de solutions, puisque I est arbitraire sur $[OA]$, tout du moins à une distance de A inférieure à OB. On peut par curiosité examiner les solutions extrêmes :

$I = A$; le cercle (C) est réduit au point A, donc aussi $M = A = K = K'$, la ligne cherchée est composée de A et d'un arc de cercle AB, centré à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de (OB) ;

I est tel que $IA = OB$, on alors $K = K'$, le centre J est rejeté à l'infini, et la ligne est composée du quart de cercle AK et du segment $[KB]$.

Ces deux "approximations" de l'ellipse sont très laides.

Il reste à étudier pourquoi la construction du menuisier est jolie, et très acceptable. La preuve que j'en ai trouvée est partiellement analytique, vous voudrez bien m'en excuser, parce qu'elle est courte.

On pose, selon l'habitude, $OA = a$, $OB = b$, donc $BA = \sqrt{a^2 + b^2}$.

r le rayon du cercle (C); comme il a été dit plus haut, $0 \leq r \leq b$; et $d = BI$.

La puissance d'inversion est $BA \cdot BM = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot BM$ et aussi

$$d^2 - r^2 = \left[b^2 + (a-r)^2\right] - r^2 = b^2 + a^2 - 2ar \text{ donc}$$

$$b^2 + a^2 - 2ar = BM.\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ,d'où } BM = \sqrt{a^2 + b^2} - r \times \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Comme la construction du menuisier a commencé par un choix pour cette longueur, il vaut la peine de s'y intéresser ; c'est une fonction affine décroissante de r; on peut vérifier que quand r croît de 0 à b, BM décroît de

$$\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{à} \quad \frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

La moyenne géométrique de ces deux valeurs extrêmes est $(a - b)$, c'est le choix du menuisier."

Autre réponse, d'Albert Lenz (Goxwiller), qui a changé les notations pour retrouver les notations classiques d'un triangle.

"Soit ABC ce triangle rectangle en A.

Hypothèses choisies :

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

$IB = IT$,

$TS \perp AB$, $TR \perp AC$

1. Remarques préalables.

Si $CM = AB - AC = c - b$,

alors $BH = \dfrac{a+b-c}{2}$, soit, si p est le demi-périmètre de ABC

$BH = p - c$,

et $CH = p - b$.

Le point H est donc le point de tangence du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle $\widehat{A}$ et la droite (IJ) passe par le centre E de ce cercle.

(Cette remarque donne l'idée de la démonstration)

Une deuxième remarque vient de là : ED et EL étant les rayons du cercle exinscrit perpendiculaires aux côtés $[AC]$ et $[AB]$, et ABC étant rectangle, le quadrilatère $ADEL$ est un carré de côté p.

2. Démonstration.

Il s'agit de démontrer que $JT = JC$.

Cela vient de trois paires de triangles isométriques.

IBH et ITS sont isométriques : rectangles, I est commun, $IB = IT$

On en déduit que :

$BH = TS = KL = p - c$.

D'où :

$EK = p - (p - c) = c = AB$.

ABC et ETK sont isométriques : rectangles, $B = E$, $AB = EK$

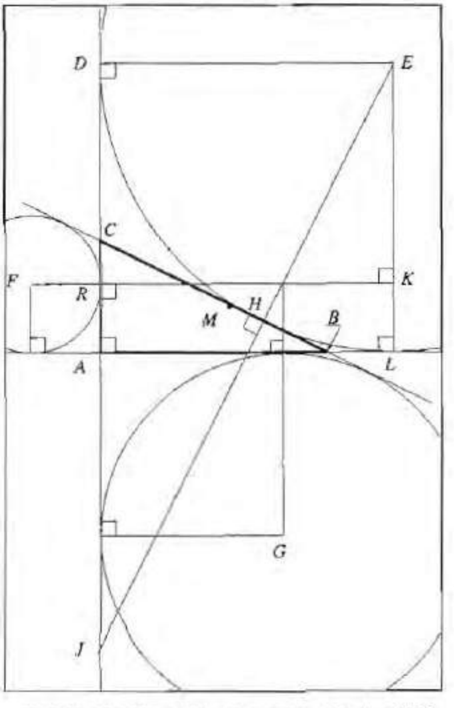
On en déduit que :

$TK = AC = b$

D'où : $RT = p - b = CH$.

JCH et JRT sont isométriques : rectangles, J est commun, $CH = RT$.

D'où : $JT = CJ$, cqfd.



3. Autres remarques

T est sur les 3 droites portant les rayons de cercles exinscrits EH, FR et GS : donc ces droites sont concourantes si ABC est rectangle.

Les rayons des cercles exinscrits sont : p . $p-c$ et $p-b$.

Avis de recherche N° 51

Solutions primitives de l'équation diophantienne $x^2+y^2+xy=z^2$ (triplets d'entiers premiers entre eux mesurant les côtés d'un triangle dont un angle vaut 120°) ; montrer que :
1) tous les nombres impairs et tous les multiples de 8, et eux seulement peuvent figurer dans ces triplets.
2) Le plus grand entier de chaque triplet est toujours congru à 1, 7, 13 ou 19 modulo 30.

Jean Brette (palais de la découverte) a envoyé une solution utilisant une paramétrisation rationnelle de l'ellipse : $x^2+xy+y^2=1$. Sa solution sera publiée en article dans un prochain *Bulletin*.

Alain Besson (St Julien en Genevois), Jean-Yves Le Cadre (Vannes) et Pierre Renfer (Ostwald) ont, eux, ramené l'équation $x^2+y^2+xy=z^2$ à la forme : $x^2+3y^2=z^2$, qui se résout de façon similaire à la classique $x^2+y^2=z^2$. Voici la solution de Pierre Renfer.

Le problème est plus souple, si l'on accepte que les entiers x, y, z soient relatifs. Ceci permet d'ailleurs d'inclure les triangles dont un angle vaut .

Les entiers x et y ne sauraient être simultanément pairs, car alors z le serait aussi.

Deux cas peuvent donc se présenter :

Cas I : x et y sont de parités distinctes ; par exemple x est impair et y est pair.

Cas II : x et y sont impairs.

1) Étude du cas I

Montrons d'abord que y est multiple de 8, en observant les restes modulo 8 : $x^2 \equiv z^2 \equiv 1$.

Si $y \equiv \pm 2$, alors $x^2+y^2+xy \equiv 5 \pm 2x \equiv 7$ ou 3.

C'est en contradiction avec : $z^2 \equiv 1$.

Si $y \equiv 4$, alors $x^2+y^2+xy \equiv 1+4x \equiv 5$.

C'est en contradiction avec : $z^2 \equiv 1$.

Il reste $y \equiv 0$.

➨ En posant : $Y = \frac{y}{2}$ et $X = x + \frac{y}{2}$, on obtient : $X^2 + 3Y^2 = z^2$.

$$3Y^2 = (z - X)(z + X)$$

Comme z et X sont impairs , $z - X$ et $z + X$ sont pairs .

$$3\left(\frac{Y}{2}\right)^2 = \left(\frac{z-X}{2}\right)\left(\frac{z+X}{2}\right)$$

Les entiers $\frac{z-X}{2}$ et $\frac{z+X}{2}$ sont premiers entre eux, car un diviseur premier commun diviserait aussi z, X, Y, x, y , ce qui est impossible.

Par ailleurs l'un des deux est divisible par 3. Quitte à changer X en $-X$ (ce qui revient à changer les signes de x et y), on peut supposer que c'est le multiple de 3 .

Les entiers $\frac{z+X}{6}$ et $\frac{z-X}{2}$ sont alors des carrés parfaits α^2 et β^2.

Donc : $z = 3\alpha^2 + \beta^2$, $X = 3\alpha^2 - \beta^2$, $Y = 2\alpha\beta$,
$y = 4\alpha\beta$, $x = 3\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)(3\alpha + \beta)$.

où α et β sont premiers entre eux ,
où β n'est pas multiple de 3,
où l'un des deux nombres α ou β est pair.

Réciproquement, si α et β vérifient les conditions précédentes, alors x, y, z sont premiers entre eux.

Pour tout entier strictement positif n, multiple de 8, on peut choisir, par exemple :

$\alpha = \frac{n}{4}$ et $\beta = 1$, ce qui donne une solution avec $y = n$ et $x > 0$

ou $\alpha = \frac{n}{4}$ et $\beta = -1$, ce qui donne une solution avec $y = -n$ et $x > 0$

Il est donc possible d'obtenir un triangle solution d'angle 120° et un triangle solution d'angle 60° ,ayant un côté de longueur n.

Pour obtenir le reste modulo 30 de z, il suffit d'examiner les restes modulo 2, 3 et 5 $z \equiv 1$ mod.2
$z \equiv 1$ mod.3, car $\beta^2 \equiv 1$ mod.3
z n'est pas multiple de 5, car $\alpha^2 \equiv 0$, 1 ou 4 mod.5
$\beta^2 \equiv 0$, 1 ou 4 mod.5,
α^2 et β^2 n'étant pas nuls simultanément, modulo 5.

On en déduit que : $z \equiv 1, 7, 13$ ou $19 \bmod 30$.

2) Étude du cas II

En posant : $Y = \dfrac{x+y}{2}$ et $X = \dfrac{x-y}{2}$, on obtient : $X^2 + 3Y^2 = z^2$.

En sachant que z est impair, l'examen des restes modulo 4 montre que X est impair et que Y est pair. On conclut comme dans le cas I que :

$z = 3\alpha^2 + \beta^2$, $X = 3\alpha^2 - \beta^2$, $Y = 2\alpha\beta$,
$x = 3\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)(3\alpha - \beta)$,
$y = -3\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\beta - \alpha)(3\alpha + \beta)$.
où α et β sont premiers entre eux,
où β n'est pas multiple de 3,
où l'un des deux nombres α ou β est pair.

Réciproquement, si α et β vérifient les conditions précédentes, alors x, y, z sont premiers entre eux.

Soit n un entier impair, distinct de 1 et de -1. Quitte à le remplacer par son opposé, on peut le supposer congru à -1 modulo 4 : Soit $n = 4k - 1$, avec $k \neq 0$.

En choisissant dans les formules du cas II :
$\alpha = k$ et $\beta = 3k - 1$, on obtient $x = 4k - 1 = n$ et $y = (2k-1)(6k-1) > 0$.

En choisissant dans les formules du cas I :
$\alpha = k$ et $\beta = 1 - 3k$, on obtient $x = 4k - 1$ et $y = 4k(1-3k) < 0$.

Pour tout entier impair n strictement supérieur à 1, on peut donc obtenir un triangle solution d'angle 120° et un triangle solution d'angle 60°,avec un côté de longueur n.

Pour $n = 1$, par contre, seul le triangle équilatéral, de côté 1, convient.

L'étude du reste de z modulo 30 est la même que dans le cas I.

Avis de recherche N° 52 de Marc Royer

sur les décompositions des nombres de la forme $\frac{4}{n}$ et $\frac{5}{n}$ en sommes d'au plus trois fractions égyptiennes (de numérateur égal à 1).

Pierre Barnouin (Cabris) et Michel Guillemot (Toulouse) donnent la référence pour un point complet sur la question : Richard K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, 1994.

On y apprend que ce problème a déjà été posé dans le papyrus Rhind.

Pour $\frac{4}{n}$, on sait qu'il y a des solutions pour tout $n < 10^8$, et tout n non congru à $1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2$ ou 23^2 modulo 840.

Pour $\frac{5}{n}$, on sait qu'il y a des solutions pour tout $n < 1057438801$, et tout n congru à 1 modulo 278460.

Voici les résultats partiels qu'avaient obtenus Marc Royer pour $\frac{4}{n}$, qui peuvent déjà faire l'objet de jolis exercices en classe.

$$\frac{4}{4p} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{4}{4p-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p(4p-1)}$$

$$\frac{4}{4p+2} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(2p+1)}$$

$\frac{4}{4p+1}$ résiste, mais on peut en résoudre des sous-cas :

pour $p = 2q + 1$, on a :

$$\frac{4}{8q+5} = \frac{1}{2q+2} + \frac{1}{(q+1)(8q+5)} + \frac{1}{(2q+2)(8q+5)}$$

pour $p = 3q + 1$, on a :

$$\frac{4}{12q+5} = \frac{1}{3q+2} + \frac{1}{(q+1)(12q+5)} + \frac{1}{(q+1)(3q+2)(12q+5)}.$$

Il résiste donc encore $\frac{4}{24q+1}$ et $\frac{4}{24q+9}$ et apparemment, on n'arrive jamais à obtenir tous les cas.