Olympiades Mathématiques 1996

37èmes OLYMPIADES MATHÉMATIQUES 1996

(5-17 juillet 1996 - Mumbai - Inde)

Vous les attendiez ? Voici les sujets de la compétition tels qu'on vient de nous les communiquer. Un article complet avec solutions et commentaires paraîtra dans le *Bulletin* d'Avril 1997. Vous pouvez, dès aujourd'hui et au plus tard début février, envoyer vos solutions et commentaires à :

François Lo Jacomo
21 rue Juliette Dodu
75010 Paris.

Premier jour (10 juillet 1996)

Temps accordé : quatre heures et demie. (Chaque problème vaut 7 points)

1 - $ABCD$ est un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On donne un entier strictement positif r.
Un jeton peut se déplacer d'un carré à l'autre si et seulement si la distance des centres de ces deux carrés est exactement $\sqrt{r}$.
Le but est de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré ayant pour sommet A au carré ayant pour sommet B.
a) Montrer que ceci ne peut pas être réalisé si r est divisible par 2 ou par 3.
b) Montrer que ceci peut être réalisé si $r = 73$.

c) Ceci peut-il être réalisé si $r = 97$?

2 - P est un point à l'intérieur du triangle ABC tel que

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$

Soient D et E les centres des cercles inscrits respectivement dans les triangles APB et APC. Montrer que les droites (AP), (BD) et (CE) sont concourantes.

3 - Soit $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Trouver toutes les applications f de S dans S telles que

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

pour tout m et n de S.

Deuxième jour (11 juillet 1996)

Temps accordé : quatre heures et demie (chaque problème vaut 7 points).

4 - Les entiers strictement positifs a et b sont tels que les nombres $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs. Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

5 - Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que (AB) soit parallèle à (ED), (BC) soit parallèle à (FE) et (CD) soit parallèle à (AF).
Soient R_A, R_c et R_E les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles FAB, BCD et DEF et soit p le périmètre de l'hexagone.

Montrer que : $$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

6 - Soient n , p et q des entiers strictement positifs tels que $n > p + q$.
Soient x_0, x_1, ... x_n des entiers vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $x_0 = x_n = 0$

(ii) pour chaque entier i, $1 \leq i \leq n$, on a
soit $x_i - x_{i-1} = p$, soit $x_i - x_{i-1} = -q$.

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$ tel que $x_i = x_j$.