Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 258 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Quel est le nombre de colliers différents, sans fermeture visible, que l'on peut obtenir en enfilant $n + 6$ perles sphériques, indiscernables au toucher, parmi lesquelles n sont blanches et 6 noires ?

ÉNONCÉ N° 259 (M. LAFOND, Dijon)

Etant donnés $2n - 1$ entiers quelconques, montrer qu'on peut en extraire n dont la somme est multiple de n.

ÉNONCÉ N°260 (François LO JACOMO, Paris et Jacques BOUTELOUP, Rouen)

Soient M un point du plan d'un triangle ABC, P, Q, R les intersections (AM, BC), (BM, CA), (CM, AB), P', Q', R' les conjugués respectifs de P, Q, R par rapport à (B, C), (C, A), (A, B). L'application des théorèmes de Ménélaüs et de Céva montre que P', Q', R' sont alignés sur une droite $D(M)$, appelée *polaire trilinéaire* de M. Etudier l'ensemble des points M tels que $D(M)$ soit perpendiculaire à (OM), O étant le centre du cercle circonscrit à ABC. En appelant (Γ) cet ensemble, on s'intéressera notamment aux points remarquables appartenant à (Γ) : comment se répartissent ces points remarquables sur les différentes branches de la courbe ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°240 (Jean-Pierre RAUCOULES et Pierre AYMARD, Albi)

De combien de manières peut-on décomposer un entier S en sommes d'entiers naturels (non nuls) consécutifs ?

SOLUTION de Pierre RENFER (67 - Ostwald)

Si S est somme de $(n+1)$ entiers strictement positifs, dont le premier est a, alors :

$S = a + (a+1) + \ldots + (a+n) = \dfrac{(n+1)(n+2a)}{2}$ et $2S = (n+1)(n+2a)$ est produit de deux facteurs de parités contraires.

Réciproquement, toute décomposition de $2S$ en produit de deux facteurs de parités contraires détermine les entiers n et a, $(n+1)$ étant le plus petit des deux facteurs.

Tout revient donc à compter le nombre de telles décompositions de $2S$.

Soit $S = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$ la décomposition de S en facteurs premiers. Pour obtenir le facteur pair d'une décomposition cherchée de $2S$, il suffit de multiplier par $2^{\alpha+1}$ un diviseur de $T = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$.

Le nombre de solutions est donc le nombre de diviseurs de T, à savoir : $(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_k + 1)$. Sous réserve de prendre en compte la décomposition triviale de S en somme d'un seul terme, lui-même (cas où $n = 0$).

AUTRES SOLUTIONS

Michel BIGOT (33 - La Teste), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Christine CHAMBRIS (94 - Le Kremlin-Bicêtre), François COUCHOT (14 - Hérouville Saint Clair), Roger CUCULIERE (Rabat, Maroc), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), M. DELEHAM (51 - Reims), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Robert FERRÉOL (75 - Paris), Jacques FORT (86 - Poitiers), Jean GOUNON (75 - Paris) Régis GRAS (35 - Rennes), Jean-Christophe LAUGIER (17 - Rochefort), Jean LEFORT (68 - Wintzenheim), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), René MANZONI (76 - Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Eric OSWALD (74 - Bonneville), Maurice

PERROT (75 - Paris), Pascal PETER (33 - La Rivière), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), R. RAYNAUD (04 - Digne), Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine), Alain VIGNERON (Abidjan - Côte d'Ivoire), André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy).

REMARQUES

Roger CUCULIERE nous rappelle qu'il a déjà proposé ce problème en 1976 au *Petit Archimède* (Problème 53, énoncé : numéro 33-34 et solution : 35-36).

L'essentiel du problème, c'est l'idée qu'il existe deux types de décompositions, les sommes de $2k$ termes de moyenne $n + \frac{1}{2}$ et les sommes de $2n + 1$ termes de moyenne k; mais la condition que tous ces termes soient strictement positifs entraîne que pour les décompositions du premier type, $k \leqslant n$ alors que pour les décompositions du second type, $k > n$. Si donc je supprime cette contrainte, et que je cherche à décomposer S en somme d'entiers consécutifs pouvant être négatifs ou nuls, je double le nombre de solutions. Sous réserve d'admettre la solution triviale où S est somme d'un seul entier, lui-même, ce qui constituait la seule ambiguïté du problème (la majorité des lecteurs ont exclu ce cas trivial).

Régis GRAS suggère de matérialiser ces sommes d'entiers consécutifs par des empilements de bûches.

Enfin, Pierre BARNOUIN (06 - Cabris) nous propose un petit programme informatique de calcul du nombre de solutions :

« - Ce 240, Mac. Qu'est-ce que tu en penses ?»

« - Intéressant. Tiens, je vais t'afficher les solutions pour 0 à 99, et après tu les auras pour les nombres de ton choix. Tu n'auras qu'à taper 0 pour finir.»

Σ Nb consécutifs

```
L+
 LONG FN S:S=0:B=1:K=2:WHILE K*K+K<=2*N
 S=S-(N MOD K=B*K/2):B=1-B:K=K+1:WEND:END FN=S
*FOR N=0 TO 99:PRINT USING"####";FN S;:NEXT
*DO:INPUT;N:PRINT ,FN S:UNTIL N=0
ZBasic Ready
   0   0   0   1   0   1   1   1   0   2   1   1   1   1   1   3   0   1   2   1
   1   3   1   1   1   2   1   3   1   1   3   1   0   3   1   3   2   1   1   3
   1   1   3   1   1   5   1   1   1   2   2   3   1   1   3   3   1   3   1   1
   3   1   1   5   0   3   3   1   1   3   3   1   2   1   1   5   1   3   3   1
   1   4   1   1   3   3   1   3   1   1   5   3   1   3   1   3   1   1   2   5
? 123456789        11
? 987654321        17
? 0                0
ZBasic Ready
```

Qu'il fait suivre de deux programmes presque identiques fournissant l'un la somme des diviseurs d'un entier, l'autre le nombre de partitions d'un entier en somme d'entiers naturels quelconques.

R. RAYNAUD propose, lui, un programme similaire en Pascal (Turbo 4.0) :

```
program DecSom;
uses crt;
var S,K,L,N,C:integer;
BEGIN
  clrscr;
  writeln('Decomposition d''un entier S en somme d''entiers
consecutifs.');
  writeln;
  write('Donnez l''entier S : ');readln(S);
  writeln;
  C:=0;
  for K:=2 to S DO
   if 2*S mod K=0 then Begin
                        L:=2*S div K;
                        if (K<L) and (odd(K+L))
                            then begin
                              C:=C+1 ;
                              N:=(L-K+1) div 2;
                              writeln('S=' ,N:5, '+… +',
                                             N+K-1:5);
                              end;
                        End;
   writeln;
   writeln(S,' admet ',C,' decomposition(s) en sommes
d''entiers consecutifs.');
END.
```

S = 1024
1024 admet 0 decomposition(s) en sommes d'entiers consécutifs.

S = 10133
S = 5066+ … + 5067
10133 admet 1 décomposition(s) en sommes d'entiers consécutifs.

S = 10125
S = 5062 + … + 5063
S = 3374 + … + 3376
S = 2023 + … + 2027
S = 1685 + … + 1690
S = 1121 + … + 1129

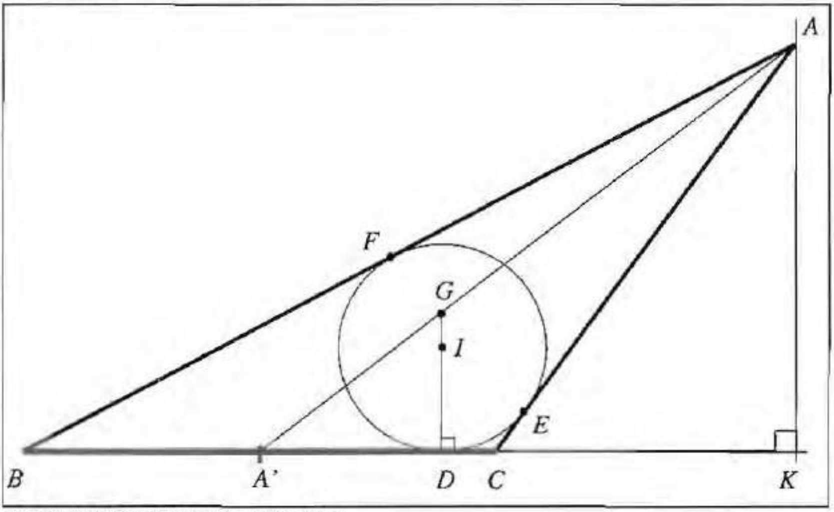
S = 1008 + ... + 1017
S = 668 + ... + 682
S = 554 + ... + 571
S = 393 + ... + 417
S = 362 + ... + 388
S = 323 + ... + 352
S = 203 + ... + 247
S = 178 + ... + 227
S = 161 + ... + 214
S = 98 + ... + 172
S = 85 + ... + 165
S = 68 + ... + 157
S = 19 + ... + 143
S = 8 + ... + 142
10125 admet 19 décomposition(s) en sommes d'entiers consécutifs.

ÉNONCÉ N°241 (Christian GAUTIER, Versailles)

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et I le centre de son cercle inscrit. A quelle condition (IG) est-elle perpendiculaire à un côté ?

SOLUTION 1 (Edgard DELPLANCHE - Créteil)

On suppose perpendiculaires les droites (IG) et (BC). Soit A' le milieu de $[BC]$, K le pied de la hauteur issue de A, et D, E, F les points de contact du cercle inscrit.



Avec les notations usuelles, on a :

$$\overline{BC} = a\,,\ \overline{BD} = p - t = \frac{a+c-b}{2},\ \overline{BK} = c.\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\ ;$$

d'où
$$\overline{A'D} = \overline{A'B} + \overline{BD} = -\frac{a}{2} + \frac{a+c-b}{2} = \frac{c-b}{2},$$

$$\overline{A'K} = \overline{A'B} + \overline{BK} = -\frac{a}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{c^2-b^2}{2a}$$

La condition imposée se traduit par :

$$\overline{A'K} = 3.\overline{A'D}\,,$$

soit
$$\frac{(c-b)(c+b)}{2a} = 3\,\frac{c-b}{2},$$

$$(c-b)(b+c-3a) = 0.$$

ou bien $b = c$ le triangle ABC est isocèle (cas évident)

ou bien $3a = b + c$ c'est la condition intéressante à retenir.

a est nécessairement le plus petit côté, et si l'on suppose $a < b < c$, on doit avoir : $a > c - b,\ b + c > 3c - 3b, 2b > c$.

On peut citer les quelques relations suivantes entre les éléments d'un tel triangle :

$$p = 2a\ ;\ AE = AF = BC = p - a = a\ ;\ p - b = \frac{2}{3}(b+c) - b = \frac{2c-b}{3}$$

$$p - c = \frac{2b-c}{3}.$$

$$2c.\cos B = \frac{a^2 + (c-b)(c+b)}{a} = a + 3(c-b) = \frac{(b+c)+9(c-b)}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad c.\cos B = \frac{5c-4b}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad b.\cos C = \frac{5b-4c}{3}$$

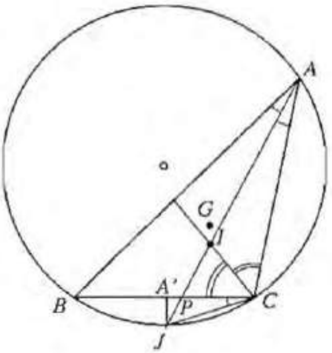
En particulier, le seul triangle rectangle vérifiant cette condition est le célèbre triangle (3, 4, 5).

SOLUTION 2 (Maurice PERROT - Paris)

Ecartons le cas ABC équilatéral où (GI) n'est pas définie.

• Si $AB = AC \neq BC$, $(AG) = (AI) \perp (BC)$; $G \neq I$; et $(GI) \perp (BC)$.

• Si $AB \neq AC$, $(AG) \neq (AI)$, (AI) coupe $[BC]$ en un point P et le cercle circonscrit à ABC en un point J. Soit A' le milieu de $[BC]$.



JPC et JAC sont semblables $\left(\widehat{JCP} = \widehat{JAB} = \widehat{JAC}\right)$

donc $\dfrac{JA}{JC} = \dfrac{AC}{PC}$ (1)

$\widehat{JIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{JCB} + \widehat{ICB} = \widehat{ICJ}$ donc $JI = JC$.

• Si $(GI) \perp (BC)$ et $AB \neq AC$, $(GI) // (JA')$ et $(AA') \neq (AJ)$.

Comme $AA' = 3GA'$, $JA = 3JI = 3JC$ et, d'après (1), $AC = 3PC$.

De même, $AB = 3PB$ et, en additionnant, $AC + AB = 3BC$.

• Réciproquement, si $AB \neq AC$ et $AC + AB = 3BC$

$$\frac{PC}{AC} = \frac{PB}{AB} = \frac{PC + PB}{AC + AB} = \frac{BC}{AC + AB} = \frac{1}{3}$$

D'après (1), $JA = 3JC = 3JI$.

Comme $A'A = 3A'G$ et $(AA') \neq (AJ)$, $(GI) // (A'J) \perp (BC)$.

Conclusion : $(GI) \perp (BC)$ si et seulement si $AB = AC \neq BC$ ou $AB + AC = 3BC$ et résultats analogues pour $(GI) \perp (AB)$ et $(GI) \perp (AC)$.

AUTRES SOLUTIONS

Miguel AMENGUAL COVAS (Majorque - Espagne), Francisco BELLOT (Valladolid - Espagne), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Suzanne CHRÉTIEN (93 - Villemomble), Roger CUCULIERE (Rabat, Maroc), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), M. DELEHAM (51 - Reims), Christian DUFIS (87 - Limoges), Jacques FORT (86 - Poitiers), Jacques LEGRAND (64 - Biarritz), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MARCOUT (10 - Ste Savine), Anne MAS GALAUP (Abidjan - Côte d'Ivoire), Charles NOTARI (31 - Montaut), Jean OSWALD (35 - Rennes), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Roger QUENTON (83 - Seillans), R. RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Jean-Paul ROUX (42 - Unieux), André VIRICEL (54 - Villers-lès-Nancy).

REMARQUES

Hormis la solution de Maurice PERROT, toutes les autres solutions s'apparentent à la première, avec diverses variantes.

Par exemple, le choix du repère, dont l'origine peut être B ou A'. Marguerite PONCHAUX calcule les coordonnées de I dans un repère centré en A' alors qu'A. MARCOUT calcule, dans un repère centré en D, les coordonnées de G, A étant l'intersection des tangentes autres que (BC) au cercle inscrit supposé connu.

Les démonstrations font appel à plus ou moins de connaissances. Cinq lecteurs (A. MARCOUT, Jean OSWALD, Roger QUENTON, Pierre RENFER et Jean-Paul ROUX) et cinq lectrices (Marie-Laure CHAILLOUT, Suzanne CHRETIEN, Marie-Christine LOMBARD, Anne MAS GALAUP, Marguerite PONCHAUX) utilisent les coordonnées barycentriques de I (Anne MAS GALAUP les recalcule), le plus souvent pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{BC}$, mais aussi (Jean-Paul ROUX) pour exprimer que $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires, la position de D étant supposée connue de quasiment tout le monde. Roger CUCULIERE et Jacques FORT expriment la condition sous forme : $GB^2 - GC^2 = DB^2 - DC^2$, et utilisent le théorème de la médiane pour calculer le premier membre. M. DELEHAM suppose connu que $BI = \frac{ac}{p}\cos\frac{\widehat{B}}{2}$ $(\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = 4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2})$, ce qui le conduit à la condition : $\cos\widehat{B} = \frac{2pa - 3ac}{3ac - 2pc}$.

A. MARCOUT termine sa démonstration au moyen de la relation $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. Et Charles NOTARI projette sur (BC) le fait que l'intersection P de la bissectrice (AI) avec (BC) est conjuguée de A par rapport à I_A et centre du cercle exinscrit. Il en déduit que $A'P = \frac{1}{9}A'K$ (K étant le pied de la hauteur issue de A), donc que $(b+c)^2 = 9a^2$.

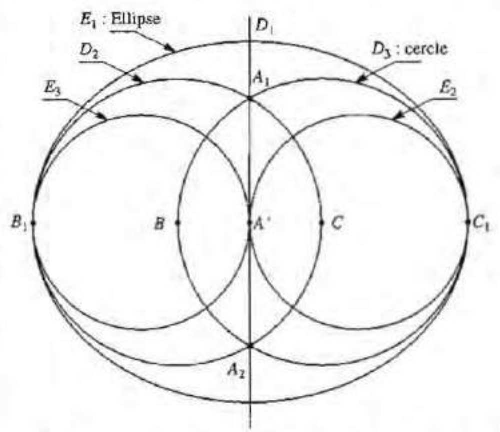
Dans la plupart des démonstrations, la trigonométrie joue un rôle mineur. Néanmoins, Francisco BELLOT (qui signale, au passage, que ce problème figure dans : Durell-Robson, *Advanced Trigonometry*, London (Bell) 1937, p. 17, Ex. I.d)#9) exprime le résultat également sous la forme : $\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sin\frac{\widehat{B}}{2}.\sin\frac{\widehat{C}}{2}$. R. RAYNAUD et Pierre RENFER, eux, l'écrivent :

$\tan\frac{\widehat{B}}{2} \cdot \tan\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}$. Tout cela est équivalent, car

$$\sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = 2\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right)}{2}.$$

Pierre RENFER écrit matriciellement que la droite *(GI)*, définie par les coordonnées barycentriques de G et de I, et la droite *(AH)*, se coupent sur la droite de l'infini.

Enfin, on peut fournir plus ou moins de propriétés des triangles solution. André VIRICEL et Suzanne CHRÉTIEN, par exemple, remarquent que $DI = \frac{3}{4}DG = \frac{1}{4}AK$. A parcourt une ellipse de foyers B et C et d'excentricité 1/3 et I et G parcourent des ellipses de sommets B et C et d'excentricités $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. André VIRICEL ajoute que les centres des cercles exinscrits dans les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont sur les tangentes à l'ellipse lieu de A en les extrémités du grand axe. En effet, la distance de B au point de contact avec *(BC)* du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{B}$ vaut $p = 2a$. Par ailleurs, si l'on appelle I_A et r_a le centre et le rayon du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$, I est le milieu de $[AI_A]$ (ce qui rejoint l'idée de Maurice PERROT) et $r_a = 2r$, r étant le rayon du cercle inscrit. On a également $bc = 2(a^2 + c^2)$.



Marie-Christine LOMBARD conclut que si l'on cesse de privilégier le côté *(BC)* (*(GI)* pouvant être perpendiculaire à *(AB)* ou à *(AC)*), tout en supposant B et C fixes, le lieu des points A répondant au problème est constitué par la médiatrice D_1 de $[BC]$, les cercles D_1 et D_3 de centres B et C et de rayon BC (pour les trois cas où ABC est isocèle), l'ellipse E_1 de foyers B et C tangente à ces cercles, et deux courbes de quatrième degré E_2 et E_3 tangentes en A' à la médiatrice de $[BC]$ et tangentes aux cercles et ellipse sus-mentionnés, de quoi il faut exclure quelques points (triangle équilatéral et triangle dégénéré).

Enfin, je concluerai par un message personnel de Roger CUCULIERE à l'auteur du problème :

«Je salue mon ami de longue date Christian GAUTIER. Nous lui devons notamment, à lui et à une équipe comprenant MM. GERLL et WARUSFEL, le traité de mathématiques intitulé "Aleph Zéro" paru naguère chez Hachette, un ouvrage que l'on ne pourrait plus utiliser de nos jours en Terminale, non que les jeunes d'aujourd'hui soient moins intelligents, mais parce que la démagogie ambiante et dominante a choisi de leur demander bien moins, ce qui est nuisible pour eux et pour l'ensemble de la Nation. Mais cela reste un ouvrage qu'à mon avis tout professeur de Mathématiques devrait posséder, pour sa culture mathématique personnelle.»

ÉNONCÉ N°242 (Gérard LAVAU, Dijon)

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et f une isométrie vectorielle de $\mathbb{E}$. Montrer que le vecteur

$$Z = u \wedge f(u) + v \wedge f(v) + w \wedge f(w)$$

ne dépend pas de la base orthonormée (u, v, w), directe ou non, choisie.

SOLUTION de Roger CUCULIERE (Rabat-Maroc)

Pour que le produit vectoriel soit défini, il faut que l'espace soit orienté. Nous allons démontrer alors que la propriété énoncée est vraie de tout *endomorphisme* f de $\mathbb{E}$. Si x et y sont deux vecteurs éléments de $\mathbb{E}$, on notera $x.y$ leur *produit scalaire*.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$. On sait qu'il existe un seul endomorphisme adjoint de f, noté f^*, défini par la propriété caractéristique : $\forall\, x \in \mathbb{E}, \forall\, y \in \mathbb{E}, x.f(y) = f(x).y$. La matrice de f^* dans une base orthonormale est la *transposées* de la matrice de f dans cette même base. Un endomorphisme f est dit *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $f^* = f$ (resp. $f^* = -f$), autrement dit *ssi* sa matrice dans une base orthonormale est *symétrique* (resp. *antisymétrique*). Il est clair que tout endomorphisme est d'une manière unique somme d'un endomorphisme symétrique g et d'un endomorphisme antisymétrique h. On a : $g = \frac{1}{2}(f + f^*)$, $h = \frac{1}{2}(f - f^*)$.

Tout ceci est vrai dans tout espace euclidien. Mais ce qui est particulier à un espace orienté $\mathbb{E}$ de dimension 3, c'est que pour tout endomorphisme *antisymétrique* h de $\mathbb{E}$, il existe *un seul* vecteur $\omega \in \mathbb{E}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{E}$,

$h(x) = \omega \wedge x$. Ce fait est très important. Il est à la base de la théorie des *torseurs*, ou champs équiprojectifs, ce qui a des implications dans la mécanique du solide car le champ des vitesses d'un solide est précisément un champ de ce type. Cette propriété repose sur le fait exceptionnel qu'une matrice antisymétrique réelle à 3 lignes et 3 colonnes est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, avec justement *trois* coefficients arbitraires a, b, c (dans le cas général de n lignes et n colonnes, ces coefficients sont au nombre de $\dfrac{n(n-1)}{2}$). Si cette matrice est la matrice de h dans une base orthonormale directe, alors ces coefficients a, b, c seront précisément les coordonnées du vecteur ω dans ladite base, ce qui établit *l'existence* de ce vecteur. Pour l'*unicité*, observons que si ω et ω' vérifient : $\forall x \in \mathbb{E}$, $h(x) = \omega \wedge x = \omega' \wedge x$, alors on a : $(\omega - \omega') \wedge x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{E}$, donc $\omega - \omega'$ est colinéaire à tout vecteur de $\mathbb{E}$, ce qui n'est possible que si $\omega - \omega' = 0$, soit $\omega = \omega'$.

Il résulte de tout ceci que pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{E}$ de dimension 3, il existe *un seul* endomorphisme *symétrique* g de $\mathbb{E}$ et *un seul* vecteur ω tels que : $\forall x \in \mathbb{E}$, $f(x) = g(x) + \omega \wedge x$. Ce vecteur ω est défini de manière unique par la donnée de f, sans référence aucune à quelque base que ce soit.

Soit alors (u, v, w) une base orthonormale *directe*, et :

$$z_1 = u \wedge g(u) + v \wedge g(v) + w \wedge g(w).$$

On a : $u.z_1 = \text{Dét}(u, v, g(v)) + \text{Dét}(u, w, g(w))$, où Dét(...) désigne le *produit mixte*, déterminant dans une base orthonormale directe, indépendant de ladite base. Par suite $u.z_1 = (u \wedge v).g(v) + (u \wedge w).g(w) = w.g(v) - v.g(w) = 0$ car g est *symétrique*. Il est clair que l'on a de même : $v.z_1 = 0$ et $w.z_1 = 0$, d'où $z_1 = 0$. On aurait pu obtenir le même résultat en exprimant g par sa matrice *symétrique* dans la base orthonormale directe (u, v, w), ce qui permet de calculer z_1 en exprimant $g(u)$, $g(v)$, $g(w)$ par les vecteurs-colonnes de cette matrice.

Il en résulte : $z = u \wedge f(u) + v \wedge f(v) + w \wedge f(w)$

$= u \wedge (\omega \wedge u) + v \wedge (\omega \wedge v) + w \wedge (\omega \wedge w)$. On a encore le choix : soit utiliser la *formule de* GIBBS, ou du double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = (x.z)y - (x.y)z$, soit poser : $\omega = au + bv + cw$, et appliquer systématiquement : $u \wedge v = w$, $v \wedge w = u$, $w \wedge u = v$. Dans les deux cas, on trouve pour résultat : $z = 2\omega$, indépendant de (u, v, w).

Si (u, v, w) est une base orthonormale *indirecte*, alors $(-u, v, w)$ est une base orthonormale *directe*, et comme z ne change pas si l'on change u en $-u$, il vient encore : $z = 2\omega$, ce qui démontre le résultat annoncé.

Application

On munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien orienté en considérant la base canonique (i, j, k) comme base orthonormale directe. Soit $(x, y, z) \mapsto \mathrm{U}(x, y, z)$ un champ vectoriel différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$, c'est -à-dire une application différentiable U de Ω dans $\mathbb{R}^3$. On appelle *rotationnel* de U le vecteur : $\mathrm{rot}\ \mathrm{U} = i \wedge \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + j \wedge \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + k \wedge \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}$. Soit $d\mathrm{U}$ la *différentielle* de U, autrement dit l'application linéaire tangente à U au point $(x, y, z) \in \Omega$, qui est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On a : $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \mathrm{dU}(i), \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = \mathrm{dU}(j), \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = \mathrm{dU}(k)$, ce qui correspond aux trois colonnes de la matrice jacobienne de U (relativement à la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$). L'étude précédente démontre alors que le rotationnel de U est invariant par changement de base orthonormale, directe ou non.

C'est ce qui fait l'importance du rotationnel, comme d'ailleurs du gradient ou de la divergence : ce sont des caractéristiques intrinsèques des champs réels ou vectoriels, qui ont des interprétations physiques tenant à la nature même des champs en question, lesquels ne se soucient évidemment pas des repères dans lesquels on peut effectuer les calculs.

AUTRES SOLUTIONS

Jacques AMON (87 - Limoges), A. BAUVAL (31 - Toulouse), M. BAUVAL (78 - Versailles), Michel CARRÉ (34 - Montpellier), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Suzanne CHRETIEN (93 - Villemomble), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Christian DUFIS (87 - Limoges), Marc LAVENIR (71 - Montceau-les-Mines), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), MANCEAU (75 - Paris), René MANZONI (76 - Le Havre), Eric OSWALD (74 - Bonneville), Renaud PALISSE (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), R. RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine), Michel TANGUY (29 - Quimper), et une solution fausse.

ÉNONCÉ N°243 (Gérard LAVAU, Dijon)

Trouver les quadruplets d'entiers strictement positifs (a, b, x, y) tels que

$$a + b = xy$$
$$ab = x + y.$$

SOLUTION de Miguel AMENGUAL COVAS (Majorque, Espagne).

Les équations $a + b = xy$

$ab = x + y.$

impliquent $a + b - ab = xy - x - y$

Soit $-(a-1)(b-1) + 1 = (x-1)(y-1) - 1$

$\Leftrightarrow \quad (a-1)(b-1) + (x-1)(y-1) = 2$

où $a - 1$, $b - 1$, $x - 1$ et $y - 1$ sont des entiers non négatifs.

Distinguons les cas suivants :

	$(a-1)(b-1)$	$(x-1)(y-1)$
Cas I	2	0
Cas II	1	1
Cas III	0	2

Cas I :

On doit avoir $a - 1 = 2$, $b - 1 = 1$, soit $a = 3$ et $b = 2$

ou $a - 1 = 1$, $b - 1 = 2$, soit $a = 2$ et $b = 3$

et $x - 1 = 0$, soit $x = 1$, $y = \dfrac{(a+b)}{x} = \dfrac{5}{1} = 5$

ou $y - 1 = 0$, soit $y = 1$, $x = \dfrac{(a+b)}{y} = \dfrac{5}{1} = 5$

Ce qui donne (3,2,1,5), (3,2,5,1), (2,3,1,5), (2,3,5,1).

Cas II

On doit avoir $a - 1 = b - 1 = x - 1 = y - 1 = 1$

soit $a = b = x = y = 2.$

On obtient (2,2,2,2).

Cas III

Analogue au cas I. On obtient par symétrie : (1,5,3,2), (5,1,3,2), (1,5,2,3), (5,1,2,3).

AUTRES SOLUTIONS

Utilisant : $(a-1)(b-1) + (x-1)(y-1) = 2$:

Alain BESSON (74 - St Julien en Genevois), Armand BUQUET (Hambourg, Allemagne), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Daniel ENGEL (51 - Reims), Christine FENOGLIO (69 - Lyon), Michel JUNTAS (93 - St Ouen), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MARCOUT (10 - Ste Savine), Charles NOTARI (31 -Montaut), Eric OSWALD (74 - Bonneville), Pierre RENFER (67 -Ostwald), Geneviève SAMBARD (02 - St Quentin).

Sans utiliser $(a-1)(b-1)+(x-1)(y-1)=2$:

Pierre BARNOUIN (06 - Cabris), R. BOURDON (14 - Tourgeville), Bénédicte CAU (62 - Mazingarbe), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Alain CORRÉ (O3 - Moulins), Christian DUFIS (87 - Limoges), Michel GARITTE (Houplines), Jean-Christophe LAUGIER (17 - Rochefort) Véronique LAUNOIS (55 - Bar le Duc), Pierre Yves LE CLOIREC (35 - Rennes), W. SIERPINSKI cité par Serge PAICHARD (53 - Laval), Renaud PALISSE (75 - Paris), Pascal PETER (33 - La Rivière), Daniel PONASSE (03 - Chatel de Neuvre), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), R. RAYNAUD (04 - Digne), Xavier RELIQUET (78 - Chambourcy), Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine), Emmanuelle STIVAL (71 -Chalon sur Saône), Michel TANGUY (29 -Quimper), Vincent THILL (89 - Migennes), et l'auteur... plus une solution fausse.

REMARQUES

«J'ai été amené à résoudre ce problème, écrit l'auteur, en cherchant une solution à un problème d'Olympiades Internationales 1994, à savoir, trouver les couples (n, m) d'entiers strictement positifs tels que $nm-1$ divise n^3+1. Je me suis rendu compte que (n, m) était solution si et seulement s'il existe r et s tels que $r+s=sm$ et $rn=s+m$. Finalement, j'ai résolu le problème d'Olympiade indépendamment (les solutions étant symétriques en n et m et valant (2,2), (1,2), (1,3), (2,5), (3,5)), ce qui m'a permis de trouver les solutions de mon système puis d'en rechercher une solution rapide».

Pierre SAMUEL utilise presque la relation $(a-1)(b-1)+(x-1)(y-1)=2$, et Pierre Yves LE CLOIREC fait appel à une autre relation également intéressante : $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$.

Serge PAICHARD signale que cet exercice figure dans : W. SIERPINSKI, *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, Paris (Hachette) 1972, p. 38 (exercice 5/164). SIERPINSKI n'utilise pas $(a-1)(b-1)+(x-1)(y-1)=2$, mais il généralise le problème à $\mathbb{Z}^4$, en citant les solutions : $(-t^2, 0, -t, t)$ et $(-1, b, 1-b, -1)$, attribuant cette dernière à A. MAKOWSKI.

Cette généralisation à $\mathbb{Z}^4$ figure également chez Alain BESSON, Edgard DELPLANCHE et Xavier RELIQUET. Alain BESSON remarque notamment que l'on a aussi: $(a+1)(b+1)=(x+1)(y+1)$.

Il en résulte que $(a+1)(b+1)(x+1)(y+1)\geqslant 0$.

Or, en dehors du cas où $(a-1)(b-1)=(x-1)(y-1)=1$, qui rajoute une solution $a=b=x=y=0$, un et un seul des produits $(a-1)(b-1)$ et

$(x-1)(y-1)$ est uégatif ou uul, si bieu que le produit : $(a^2-1)(b^2-1)(x^2-1)(y^2-1)$ est négatif ou nul, ce qui prouve qu'un au moins des quatre nombres a, b, y (par exemple a) vaut -1, 0 ou 1.

Si $a = 1$, $(x-1)(y-1) = 2$, ce qui rajoute la solution $(1, -1, 0, -1)$ et ses permutées.

Si $a = 0$, $x + y = ab = 0$, ce qui rajoute la solution $(0, -x^2, x, -x)$ et ses permutées (parmi lesquelles la solution ci-dessus, pour $x = \pm 1$).

Si $a = -1$, $(x+1)(y+1) = (a+1)(b+1) = 0$, donc l'un des nombres x ou y vaut -1, ce qui rajoute la solution de MAKOWSKI : $(-1, b, 1-b, -1)$ et ses permutées (parmi lesquelles, pour $b = 0$ ou $b = 1$, des solutions déjà trouvées).

Les seules solutions dans $\mathbb{Z}^4$ sont donc : celles de $\mathbb{N}^4$ et pour tout x et tout b de $\mathbb{Z}$, $(0, -x^2, x, -x)$ et permutations $(-1, b, 1-b, -1)$ et permutations.

Quant à la remarque préliminaire de l'auteur, c'est elle qui va nous fournir la solution générale si l'on étend le problème à $\mathbf{Q}^4$ ou $\mathbb{R}^4$. Il est clair que, pour $a \neq 0$, $a(xy - a) = x + y \Leftrightarrow (ax-1)(ay-1) = a^3 + 1$. Si a et x sont entiers, le fait que $ax - 1$ divise $a^3 + 1$ entraîne que le quotient est congru à -1 modulo a, ce qui permet d'établir l'équivalence de cet énoncé 243 avec le problème d'Olympiades.

Mais si l'on n'impose plus à a, b, x, y d'être entiers, cette même relation permet de paramétrer la solution générale. On doit étudier à part les cas $a = 0$ et $a = -1$, qui conduisent, comme ci-dessus, aux solutions : $(0, -x^2, x, -x)$, $(-1, b, 1-b, -1)$ et $(-1, b, -1, 1-b)$, sous réserve que b ou x ne sont pas nécessairement entiers. Si $a \pm -1$ et $ax = 1$, il est clair qu'il n'y a pas de solution. Et pour tout autre couple $(a, x) \in \mathbf{Q}^2$ ou $\mathbb{R}^2$ $(ax \neq 1)$ il existe une et une seule solution : $\left(a, \dfrac{x^2+a}{ax-1}, x, \dfrac{x+a^2}{ax-1}\right)$. Par exemple, pour $a = \dfrac{1}{2}$ et $x = 3$, $\left(\dfrac{1}{2}, 19, 3, \dfrac{13}{2}\right)$. Et le raisonnement utilisé ci-dessus pour résoudre le problème dans $\mathbb{Z}^4$ prouve qu'un au moins des quatre nombres a, b, x, y appartient à $[-1, 2]$. En effet, si $(a-1)(b-1)(x-1)(y-1) > 0$, comme $(a-1)(b-1) + (x-1)(y-1) = 2$, l'un au moins des deux produits appartient à $[0,1]$, donc l'un au moins de ses facteurs appartient à $[-1, 1]$; et sinon, $(a^2-1)(b^2-1)(x^2-1)(y^2-1) \leqslant 0$.