Mathématiques et Société

Le silence et l'évidence

Didier Nordon
Maître de conférences de mathématiques,
Université Bordeaux 1

Un moment important du cours de mathématiques est celui où le professeur se tait. Une fois la démonstration amenée à une suite d'étapes "évidentes", en effet, il doit attendre que chaque élève accède à ces évidences. Un tel processus prend du temps.

Un jour, le mathématicien G. H. HARDY (1877-1947) faisait cours devant la poignée d'étudiants capables de le suivre. Le voilà qui écrit une énorme formule au tableau, en disant : "C'est évident". Soudain, il s'interrompt. Visiblement, quelque chose ne va pas. Il se plonge dans une méditation intense et muette... Il lâche là ses étudiants, file dans son bureau, où on le voit marcher de long en large, en proie à une méditation toujours aussi intense... Enfin, au bout de deux heures, il retourne dans la salle, avise la formule restée au tableau, déclare : "Oui, oui, bien sûr, elle est évidente" - et poursuit son cours sans plus d'explication !

Cette anecdote est certainement apocryphe: le nom du héros varie selon le mathématicien qui la raconte. Mais cela montre qu'elle est significative. Les mathématiciens apprécient en elle la caricature d'une expérience qu'ils ont plus ou moins tous vécue. Le professeur de mathématiques est celui qui, face à une formule incompréhensible, déclare en toute bonne foi : "C'est évident".

Caricature mise à part, il y a un moment décisif dans le cours de mathématiques ; celui où le professeur se tait et attend que les élèves comprennent. Comprendre une démonstration, c'est en effet percevoir une évidence. Or l'évidence n'apparaît qu'au bout d'un certain temps de maturation. Elle est à la fois une donnée et un processus. Sans discuter la notion générale d'évidence - ardue, comme en témoigne l'épaisseur des livres que des philosophes ont pu lui consacrer - voyons ici quelques rapports entre évidence et mathématiques, silence et enseignement.

Les mathématiques reposent sur l'évidence. "Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons", dit Descartes (*Discours de la Méthode*, Première Partie). Aujourd'hui, René Thom écrit : "Une démonstration d'un théorème (T) peut se définir comme un chemin qui, partant de propositions empruntées au tronc commun et de ce fait intelligibles par tous, conduit par étapes successives à une situation psychologique telle que (T) y apparaît comme évident" (René Thom, "Mathématiques modernes et mathématiques de toujours", *Pourquoi la mathématique ?*, 10/18, 1974). Pour être rigoureux, ce chemin doit se composer d'étapes dont chacune est "parfaitement claire à tout lecteur " .

Si l'évidence joue un grand rôle en mathématiques - comme d'ailleurs en philosophie et en métaphysique - c'est que c'est une notion abstraite. Contrairement à ce que semble indiquer l'étymologie, elle ne se voit pas. La présence d'un objet matériel visible ne relève pas de l'évidence, mais de la perception. Par exemple, supposons qu'un archéologue trouve un objet enfoui ; on dira qu'il l'a exhumé, ou découvert, pas qu'il l'a mis en évidence. Mais si l'archéologue interprète cet objet comme l'indice de telle ou telle conception du monde chez ses auteurs - conception qui est pour nous une construction abstraite - alors on dira qu'il a su mettre en évidence cette conception. Et si, allant sonner chez lui, nous trouvons la bouteille de champagne en évidence sur la table, ce n'est pas tant la matérialité de la bouteille qui est évidente, qu'une idée derrière elle : l'archéologue donne à entendre qu'il est content de sa découverte, et qu'il a l'intention de la fêter avec nous ! De même, dire que les physiciens ont mis en évidence le quark ultime ne signifie pas qu'ils l'ont matériellement exhibé, mais qu'ils ont fait une expérience dont la seule interprétation concevable est l'existence de ce quark.

Evident ne signifie pas non plus immédiat. Tant que je ne vois pas de problème, que je me fie à mon opinion spontanée, je n'ai aucune raison d'invoquer l'évidence. (Après coup, peut-être, si on pointe une difficulté qui m'avait échappé, je dirai : "J'avais cru que c'était évident". Mais ce dernier mot est impropre, dire : "Je n'y avais vu que du feu" serait plus adéquat.)

Invoquer l'évidence est justifié une fois que la difficulté a été vue, puis surmontée.

Toute pensée finit par buter sur l'évidence. Elle bute, c'est-à-dire est amenée à accepter comme certaines et allant de soi des affirmations que d'autres refuseront peut-être, ou seront incapables de percevoir. Pour le croyant, l'existence de Dieu est évidente , pour l'athée, son inexistence. Il y a contradiction entre la notion d'évidence et son usage. Au moment où je perçois tel point comme évident j'ai l'impression qu'il l'est absolument, qu'il est universellement vrai , je ne puis concevoir qu'il ne paraisse pas évident à tout le monde. Pourtant, l'expérience montre qu'il n'y a pas deux individus qui partagent les mêmes évidences, et que les évidences changent avec le temps et le lieu. Il y a une part culturelle dans l'évidence.

Si toutes les pensées butent sur l'évidence, toutes n'agissent pas de même avec elle. Pour la philosophie l'évidence reste toujours perçue comme un problème. Rétorquer à un philosophe que ce qu'il vient de présenter comme évident ne me paraît pas tel, ne le choquera pas , et il saura développer. Peut-être verrai-je là un délayage stérile, mais je ne l'aurai pas réduit au silence. Le mathématicien, lui, n'aime pas développer, il assimile cela à une glose sans pertinence. L'évidence doit frapper, et il sera choqué que je puisse ne pas la percevoir. D'où son silence quand il est face à elle.

Dans la pratique mathématique, le moment où l'évidence est atteinte se manifeste par le fait que celui qui fait la démonstration ne peut plus que se taire. Une fois toutes les étapes "parfaitement claires", en effet, que dire de plus ? L'évident ne se prouve pas. La démonstration est bornée, bordée, par l'évidence. Si les mathématiques voulaient aller au-delà, elles sortiraient de la démonstration. Elles s'y refusent : plutôt le silence que la glose ! Donnons un exemple, élémentaire mais néanmoins typique: Je veux montrer que deux quantités A et B sont égales. Je montre que A égale une certaine autre quantité C, puis que B égale C. J'en déduis alors $A=B$. Si un élève déclare : "J'ai compris que $A=C$. J'ai aussi compris que $B=C$. Mais je ne comprends pas qu'on en déduise $A=B$", je serai vraisemblablement incapable de lui répondre. Je ne saurai guère que me répéter, bafouillant quelque phrase du genre : "Mais enfin ! $A=C$ et $B=C$, donc $A=B$, c'est évident !"

En fait, ce qui est évident ou pas dépend des interlocuteurs. A un niveau supérieur, on pourra être amené à considérer que la transitivité mérite qu'on y réfléchisse. Ainsi, le "super bon en maths" et le "super mauvais" ont un point commun: ne pas tenir pour évident ce que le "moyen en maths" tient pour tel..

L'évidence mathématique est muette, parce qu'elle doit "sortir du temps". Pour comprendre une démonstration, il ne suffit pas de comprendre les étapes successivement, au fur et à mesure que chacune se présente et est établie, car cela ne dit pas pourquoi elles mènent au résultat. Il faut saisir leur ensemble d'un coup, pris dans une espèce de globalité instantanée. La démonstration est un tout qui ne prend sens que lorsqu'on perçoit dans leur simultanéité des résultats acquis à des moments divers. La formule "tu vois ?" - fréquente lorsqu'un mathématicien parle à un collègue et s'interrompt pour s'assurer qu'il suit - peut paraître curieuse : comment voir une abstraction intangible ? Elle s'explique par le fait que, pour comprendre, on doit s'émanciper du discours et du temps qu'il exige pour se dérouler, et atteindre à une perception aussi immédiate que la vue. Cette tâche est parfois difficile : comprendre chaque étape d'une démonstration sans saisir la démonstration elle-même est une expérience connue de tout mathématicien.

Bien que l'expérimentation ne leur soit pas étrangère (manipulations numériques, figures de géométrie, etc.), les mathématiques sont avant tout un discours. Ce n'est pas l'expérience qui emporte la décision, mais la démonstration, c'est-à-dire un discours, avec ses lois (règles logiques, etc.). Et ce discours, donc, a une curieuse propriété : il convainc au moment même où il se tait parce que, parvenu à l'évidence, il ne sait plus quoi dire ! Le silence est un procédé oratoire connu ; bien employé, il peut susciter l'émotion. En mathématiques, le silence n'est pas un procédé , il ne sollicite pas l'émotion, mais la raison : le temps de comprendre.

L'évidence, étant immatérielle, est immobile. C'est à celui qui veut l'appréhender de lui donner corps, et de faire le mouvement pour s'approcher d'elle. Qu'un point soit évident ne signifie pas qu'il doive être admis sans examen. Au contraire, comme en témoigne le premier précepte de Descartes "de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est- à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention" (*Discours de la Méthode*, Deuxième Partie). Ainsi, l'évidence n'apparaît qu'au terme d'un travail.

Ce travail peut durer des années, et réussir à un moment où il a cessé d'être conscient. Exemple, le fameux "éclair" qu'ont connu tant de mathématiciens : une longue période de recherche vaine, suivie d'une brusque illumination où le résultat apparaît soudain dans toute son évidence.

Ce qui ajoute encore au mystère de l'évidence, et justifie ceux qui ne l'acceptent pas volontiers, c'est qu'on peut se tromper. Comment se fait-il qu'une suite d'évidences puisse contenir des erreurs ? Justement, les erreurs, souvent, consistent à prendre à tort pour évident le passage d'une affirmation à la suivante. Sauter au-dessus de la difficulté. Jusqu'au début du XIXe siècle, intervertir des limites allait de soi ; les mathématiciens n'avaient pas vu qu'une convergence peut ne pas être uniforme. J'imagine que, nous aussi de nos jours, tenons pour évidents des passages qui ne le sont pas. Difficultés que verront nos successeurs, en se demandant comment diable nous avons fait pour ne pas les voir!

Les mathématiques se sont offert le luxe de sécher plusieurs siècles sur une affirmation qui peut sembler parfaitement évidente : le postulat d'Euclide. "Par un point extérieur à une droite passe une et une seule parallèle à la droite." Elles se sont finalement rendu compte que ce postulat n'est pas démontrable, et qu'on peut même construire une géométrie cohérente en le refusant. Bref, il n'est pas "vrai", trop proche de la réalité matérielle pour que lui appliquer la notion d'évidence soit pertinent.

Ainsi donc, l'évidence est souvent incertaine. Si les mathématiciens (et plus généralement, les scientifiques) n'aiment pas beaucoup examiner la question de l'évidence, c'est sans doute parce que, ce faisant, ils risqueraient de jeter la suspicion sur leurs propres résultats. Au contraire, les philosophes aiment y réfléchir. Outre qu'elle est inépuisable et philosophiquement intéressante, cette question renforce le statut de leur discipline, en lui permettant de marquer des limites aux vérités découvertes par les scientifiques.

On entend parfois, en classe de mathématiques, un élève, qui bute sur une difficulté, s'exclamer au moment où il comprend : que je suis bête ! C'est que, soudain, quelque chose lui paraît évident, qui l'instant auparavant ne lui paraissait pas tel. Du coup, il ne comprend plus comment il a pu ne pas comprendre.

Le silence au cours duquel les élèves, chacun à sa vitesse, font leurs les évidences écrites au tableau, **ce silence doit être respecté par le professeur. C'est un moment où ils travaillent. Si on ne sait pas parler, il faut savoir se taire.**