Sur la suite des nombres premiers (II)

E.Ehrhart
Strasbourg

En Février 1987, nous avons publié au *Bulletin* APMEP, sous le même titre, un article (I) dont nous rappelons d'abord deux résultats.

Théorème 1. *Dans les n premiers entiers figurent plus de nombres premiers que dans les n entiers suivants, pour* $n > 10$.

Désignons par $\prod(n)$ le nombre de nombres premiers parmi les n premiers entiers. Alors

Théorème 2. $k\prod(n) > \prod(kn)$, *quels que soient les entiers* $k > 1$ *et* $n > 10$. (Pour $k = 2$, on retrouve le théorème 1).

On appelle *"jumeaux"* deux nombres premiers de différence 2.

Conjecture 1 (classique). *Il y a une infinité de paires de jumeaux.*

Appelons *"densité"* d'une suite d'entiers consécutifs le rapport du nombre de nombres premier qu'elle présente au nombre de ces entiers.

Théorème 3. *La densité de toute suite d'entiers consécutifs est comprise entre* 0 *et* $\frac{2}{3}$ (Sauf pour les suites 2,3 et 2,3,4,5.)

Car la densité est 0 pour les tranches sans nombres premiers et $\frac{2}{3}$ pour les tranches $p, p + 1, p'$ où p et p' sont jumeaux.

Théorème 4. *Une infinité de tranches d'entiers consécutifs sont vides de nombres premiers et de longueur arbitraire.*

En voici une démonstration courte et simple (extraite de [1], page 78). Posons $2.3.5\ldots p_n = N$. Alors les entiers consécutifs $N+2, N+3, N+4, \ldots,$ $N+p_{n+1}-2,\ N+p_{n+1}-1$ sont tous composés. Or, on sait que p_n est arbitrairement grand.

Dans le *Bulletin* de février 1988, en complément à (I), j'ai émis l'hypothèse suivante (dont le théorème 1 est un cas particulier) :

Conjecture 2. *La suite 1, 2, 3, …, n est plus dense que toute autre tranche de n entiers consécutifs, pour* $n > 10$.

Un lecteur pensait réfuter cette conjecture par un contre-exemple. Utilisant les résultats et les méthodes de [1], il constate que la tranche [1 418 575 498 573, 1 418 375 498 609] contient 11 nombres premiers comme la tranche [1, 36]. Oui, mais cette tranche comporte 37 entiers consécutifs et non 36.

Densité capricieuse des nombres premiers.

La tranche [7 908 189 600 581, 7 908 189 600 589] de 9 entiers consécutifs comporte 4 nombres premiers
7 908 189 600 581, 7 908 189 600 583, 7 908 189 600 587, 7 908 189 600 589.

Elle a donc la même densité $\frac{4}{9}$ que la tranche [11, 19].

- La densité de la tranche $[1, 10^9]$ est voisine de $\frac{1}{20}$, car $\prod(10^9)= 50\,847\,534$ ([1], page 11).
- Une tranche de 100 entiers consécutifs vide de nombres premiers apparaît déjà près de $10^{5{,}57}$ ([1], page 79).
- La paire maximale de jumeaux connue à ce jour est : $1{,}692\,923 \times 10^{4020} \pm 1$. (trouvée en 1993 par H. Dubner, [1], page 60).

L'énormité de ces nombres appuie la conjecture 1.

- La tranche [6 953 798 916 913, 6 953 789 916 949] de 37 entiers consécutifs contient 11 nombres premiers (dont 4 paires de jumeaux). Sa densité est donc $\frac{11}{37} \approx \frac{1}{3}$.

Théorème 5. La densité de la tranche [1, n] est approximativement $\frac{1}{\text{Ln } n}$

Car on sait qu'en première approximation $\prod(n)$ est $\frac{n}{\text{Ln } n}$.

Pour le nombre approximatif de paires de jumeaux de la tranche [1, n] on a proposé $\frac{n}{(\text{Ln } n)^2}$.

Conclusion

La suite des nombres premiers est chaotique. A ma connaissance, la fonction $p_n = f(n)$ reste imprédictible.

Bibliographie

[1] Hans Riesel "*Prime Numbers and Computer Methods for Factorisation* (Birkhäuser, Bâle-Boston, 1994).