Dans nos classes - Lycées

...La mathématique parle des approximations,... elle en parle même énormément, mais...elle en parle avec rigueur.

On pourrait même dire que c'est la tâche principale de la mathématique depuis ses origines, et que c'est le moteur le plus puissant de toute son histoire.

«Parler avec rigueur de ce qui est approximatif», la formule semble paradoxale. C'est en effet une sorte de défi présenté à l'activité intelligente de l'homme :

- d'une part l'exigence de certitude et de rigueur ;

- d'autre part, l'inaccessibilité de cette perfection.

G.Th. Guilbaud

Leçons d'A-peu-près

Christian Bourgois, 1985.

Le presque et le tout à fait en mathématiques

Claude Pariselle

Grenoble

Les thèmes de travail qui suivent ont été rédigés pour des élèves de Première, mais l'objet de ce travail concerne nos élèves dès la Seconde, et même dès le Collège.

Ces thèmes répondent à deux objectifs :

1 - Permettre aux élèves de mettre en œuvre spontanément des stratégies (additives, soustractives) qui seront réutilisées en probabilités dans un contexte un peu moins facile.

On peut espérer que des stratégies construites, et non apprises, sont plus solides, et surtout qu'elles permettent mieux aux élèves de comprendre ce qu'est une démarche mathématique.

2 - Stimuler la réflexion concernant la différence fondamentale entre les symboles $=$ et $\approx$.

Je suis convaincue que les difficultés des lycéens à percevoir cette différence se sont aggravées :

- d'une part avec l'abandon des calculs d'erreurs en cours de physique,
- d'autre part avec l'usage des calculatrices.

Dans ce contexte difficile, nous devons moins que jamais abandonner les élèves à leur confusion ; ce serait renoncer à leur faire comprendre la nature particulière de la pensée mathématique.

Pour les convaincre que cette distinction est fondamentale, que ce n'est pas une maniaquerie des profs de maths, il m'a semblé qu'il fallait les mettre en face d'une contradiction frappante, que seule peut résoudre la distinction entre $=$ et $\approx$.

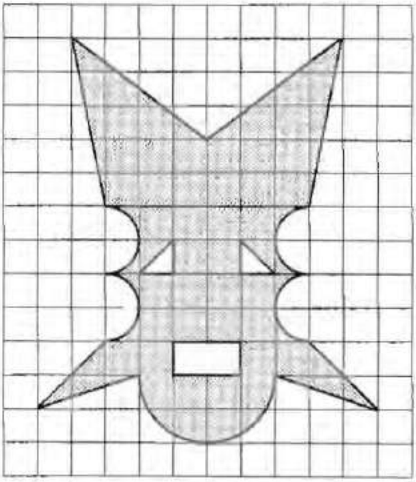
Voici donc l'enchaînement proposé.

Les différentes étapes sont empruntées :

- aux championnats FFJM (septembre 1994) pour le masque aztèque,
- aux grands classiques (Triangle de Curry),
- aux exercices traditionnels (le non alignement du premier problème du thème B a d'ailleurs été présenté avec d'autres objectifs, et d'autres longueurs, par J.-F.Zuccheta dans le Bulletin n°391).

Cependant, ce que je propose ici est un enchaînement particulier entre ces différents classiques, enchaînement qui devrait aboutir aux objectifs visés.

THÈME A : LE MASQUE AZTÈQUE



1 - Des fouilles récentes ont permis de mettre à jour un masque aztèque en or pur.

Le plan de ce masque est représenté ci-contre.

Calculer l'aire de ce masque, l'unité d'aire étant l'aire d'un petit carré.

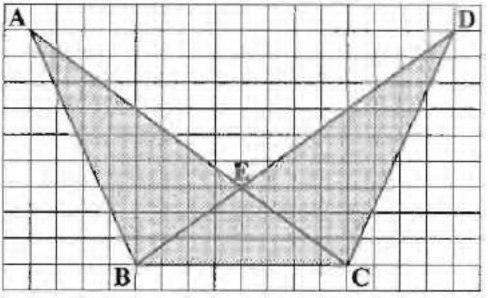
On n'oubliera pas de déduire l'aire des yeux et de la bouche. (FFJM-1994)

Stratégies mise en œuvre spontanément par les élèves :

- ✯ découpage du masque en morceaux (le plus souvent trois : couronne, morceau contenant les yeux, morceau contenant la bouche) ;
- ✯ pour la couronne, après avoir constaté que le découpage en trois

triangles pose problème (pour deux des triangles, on n'a pas accès directement à la longueur d'une base et d'une hauteur), les élèves pensent assez vite à procéder par soustraction en enlevant au rectangle 8×5 les trois triangles dont l'aire est facile à calculer.

2 - L'unité d'aire étant toujours l'aire d'un petit carreau,
- Quelle est l'aire du triangle *ABC*?
- Quelle est l'aire du triangle *DBC*?
- Quelle est l'aire du triangle *BCE*?
- Quelle est l'aire du pentagone *ABCDE*?

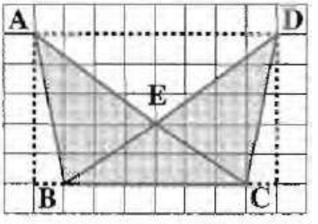


3 - Reprenons le calcul d'aire de la couronne du masque aztèque en utilisant la méthode du **2** :

Aire(ABC) = Aire(DBC) = $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$

Aire(BCE) = $\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$

Donc l'aire de la couronne est :
$15 \times 2 - 6 = 30 - 6 = \mathbf{24}$



Il y a quelque chose qui cloche! Car ce n'est pas ce que nous avions trouvé en procédant par soustraction :

Aire du rectangle en pointillé : $8 \times 5 = 40$

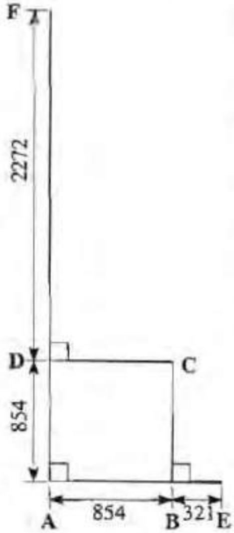
Aire du triangle *AED* : $\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

Aire des deux petits triangles : $2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 5 = 5$

Donc l'aire de la couronne est : $40 - (12 + 5) = 40 - 17 = \mathbf{23}$

Quel est le bon résultat ?
D'où provient l'erreur pour l'autre résultat ?

THEME B : PRESQUE OU TOUT A FAIT ?



Problème I : *E, C, F* sont-ils alignés ?

Pour répondre à cette question, une méthode assez simple est de comparer la longueur *EF* à la somme des longueurs *EC* + *CF*.

Sachant que, de toute façon, $EC + CF \geqslant EF$, l'alignement est prouvé si l'on réussit à établir que $EC + CF$ n'est pas supérieur à *EF*.

Pour obtenir les longueurs *EC, CF* et *EF*, on utilise le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles *EBC, CDF* et *EAF*. Le calcul est bien sûr achevé à l'aide d'une calculette.

Voici ce que l'on obtient :

$$EC + CF = \sqrt{854^2 + 321^2} + \sqrt{854^2 + 2272^2}$$

$$EF = \sqrt{(854 + 321)^2 + (854 + 2272)^2}$$

Réponses de la calculette

$EC + CF = 3339{,}536046$

$EF = 3339{,}536046$

Qu'en conclure?

1 - Quel choix fais-tu entre les trois réponses suivantes :

a) *E, C, F* sont alignés, c'est-à-dire $EC + CF = EF$.

b) *E, C, F* ne sont pas alignés, c'est-à-dire $EC + CF > EF$.

c) *E, C, F* sont presque alignés, c'est-à-dire $EC + CF \approx EF$.

2 - • Si tu as choisi la réponse **a**, ou la réponse **b**, quelle preuve peux-tu fournir pour justifier ta conclusion ?

• Si tu as choisi la réponse **c**, avais-tu besoin de la calculette pour aboutir à cette conclusion ? Quel autre outil proposes-tu? Qu'apporte en plus la calculette ?

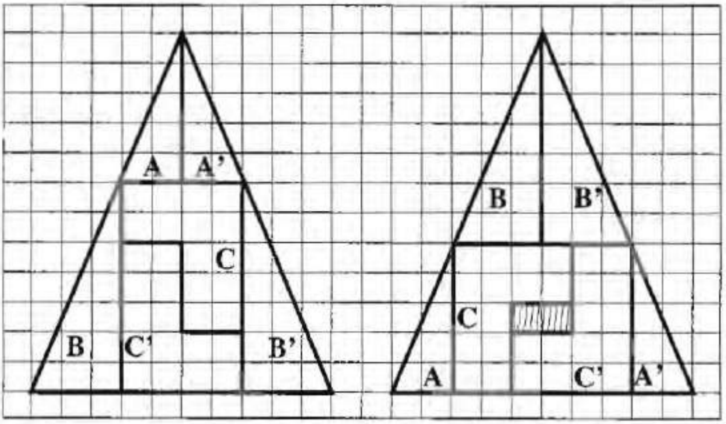
3 - La conclusion **a** et la conclusion **c** sont-elles bien différentes ?

Alignés ou presque alignés, = ou ≈, est-ce que pour toi, cela ne revient pas un peu au même ?

Problème II : Pour alimenter ta réflexion sur la question précédente, voici un casse-tête connu : les triangles de Curry.(page suivante)

D'où vient qu'il y a un "trou" de deux carreaux dans le triangle de droite ??

Si tu parviens à résoudre cette énigme, tu auras un élément de réponse à la question 3 ci-dessus.



En guise de conclusion :

Ce travail, que j'ai expérimenté dans plusieurs classes de Première et que je compte poursuivre en le faisant évoluer au besoin, peut bien sûr être jugé coûteux en temps. Cependant, je suis convaincue que *la confusion entre l'égalité et la proximité est très largement répandue chez les élèves*, et que *cette confusion ferme la porte à des pans entiers de la pensée mathématique.*

Or, la distinction entre = et ≈ me paraît être à la portée d'enfants assez jeunes, pourvu que nous y consacrions du temps et que nous trouvions des thèmes bien adaptés à nos élèves. La démarche proposée ici s'adresse plutôt à des élèves de lycée et ressemble un peu à un "électrochoc" : seule la reconnaissance du non alignement peut permettre de sortir du paradoxe de Curry. Or, il y avait au départ impression d'alignement (les figures étant tout d'abord acceptées comme des triangles). Ainsi, l'accent se trouve fortement mis sur le fait que presque ou tout à fait alignés, ce n'est pas du tout la même chose, puisque c'est là que se trouve la clé de l'énigme. Comme on a fait précédemment le parallèle entre presque et tout à fait alignés d'une part, = et ≈ d'autre part, on peut espérer que le transfert pourra s'opérer, et que sera plantée là une graine de distinction entre "égal" et "environ égal".

Pour nos élèves plus jeunes, nous pouvons préférer à cet électrochoc des médecines plus douces. A nous de les rechercher.

J'aimerais beaucoup correspondre avec ceux que ce problème intéresse. Ceux qui ont d'autres idées sur le même sujet peuvent-ils les faire passer dans le *Bulletin*? Ceux qui expérimenteront mon enchaînement peuvent-ils m'écrire ce qu'ils en pensent ? (Claude PARISELLE, Lycée Aristide Bergès - 38170 SEYSSINET).