AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc... L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquettes Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERREOL - 6, rue des annelets.
75019 PARIS

ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien :
cabout @ sancerre.ac - idf . jussieu.fr

Nouveaux avis de recherche

Avis de recherche n° 59 d'Alex Méril

(alex . meril @ univ - ag.fr, Pointe-à-Pitre).

Cherche un algorithme performant pour générer les partitions équitables en *p* classes de *n* éléments chacune d'un ensemble à *n.p* éléments.

Avis de recherche n° 60 de Marc Royer (Montélimar)

Peut-on majorer $\frac{S}{L^2}$ pour toute surface plane d'aire S et de contour de longueur L ? Peut-on majorer $\frac{V^2}{S^3}$ pour tout solide de volume S et de contour d'aire S ?

Avis de recherche n° 61 de R. Ferréol

Je recherche un modèle du groupe de Klein G = {*e*, *a*, *b*, *c*} où les trois éléments *a*, *b*, *c* auraient des statuts symétriques.

En effet, aucun des exemples que je connais n'est satisfaisant.

Dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, $(1,1)$ se particularise par rapport à $(0,1)$ et $(1,0)$; dans $\{id, s_{Ox}, s_{Oy}, s_O\}$ c'est s_O qui se distingue ; dans $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ muni de la différence symétrique, c'est $\{a,b\}$ l'excentrique ; enfin, dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{1,3,5,7\}$, $7 = -1$: il est donc "normal" que son carré soit 1, contrairement à 3 et 5 !

Avis de recherche n°62 de François Lo Jacomo

La multiplication publiée dans "La leçon" de Ionesco est-elle exacte ?

Voici le texte :

> "Combien font, par exemple, trois milliards sept cent cinquante-cinq millions neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante et un, multiplié par cinq milliards cent soixante-deux millions trois cent trois mille cinq cent huit ?
>
> *L'élève, très vite* : Ça fait dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt-dix quadrillions deux trillions huit cent quarante-quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit...
>
> *Le professeur, étonné* : Non. Je ne pense pas. Ça doit faire [...] cinq cent neuf...
>
> *L'élève :* ... Non... cinq cent huit..."

Voici ce que dit MAPLE :

```
> 3 755 998 251 * 5 162 303 508;
                  19 389 602 947 179 164 508
```

Or la réponse de l'élève est : 19 390 002 844 219 164 508. Les nègres qui se sont farci l'opération de Ionesco (en 1951 donc à la main) se sont donc trompés, probablement dans l'addition à dix nombres. Remarquons d'ailleurs que le professeur et l'élève se chamaillent sur le seul chiffre du résultat qui soit évident !

D'autre part, la réponse qu'il faudrait donner (depuis 1948 d'après le Robert) serait plutôt : dix-neuf *trillions* trois cent quatre-vingt-neuf mille six cent deux *billions* neuf cent quarante-sept milliards cent soixante dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit, puisque l'on compte maintenant en base 10^6 et non plus 10^3 !

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n° 38 sur le symbole @ (cf réponse principale dans le *Bulletin* précédent).

Jean-Philippe DROUHART (IUFM de Nice) a posé la question sur internet et a obtenu diverses réponses. Voici celle de Chris BRESSEY (Rennes).

"A l'école en Angleterre, j'ai appris que l'arobase est un symbole qui est fabriqué en mettant la lettre *a* dans la lettre *c*. Nous l'appelions "*ack*" et cela signifiait "*at the cost of*". ceci reste probablement éternellement dans les têtes de tous les gens de ma génération suite aux interminables exercices en maths, dont voici un exemple : "What is the total cost of 5 apples @ 5 d ? " (pour tous les jeunes parmi vous: la réponse n'est pas 25 d, mais 2 shillings et 1 d)."

Avis de recherche n° 42. Trouver tous les couples d'entiers consécutifs tels que leur produit augmenté de 1 soit un cube.

Jean MOREAU DE ST MARTIN a relevé dans un exposé de Paulo RIBENBOIM à l'école normale supérieure le 28 novembre 1994 la phrase: "Ljunggren a résolu (avec difficulté) cette équation (seules solutions (0,1) et (18, 19)) en 1942 par une analyse précise du groupe des unités d'un certain corps cubique".

Il fait aussi remarquer que ce problème revient à chercher en quelle(s) base(s) le nombre écrit 111 est un cube. Réponse : en base 18, 111 est le cube de 7.

Il relève de plus la coïncidence entre le résultat de Fermat : 1 et 7 sont les seuls entiers qui sont de la forme $2x^2 - 1$ de même que leurs carrés, et le résultat de cet avis de recherche :1 et 7 sont les seuls entiers dont les cubes sont de la forme $x(x + 1)+1$.

Il fait enfin remarquer qu'un énoncé équivalent est : quels sont les carrés qui, augmentés de 48, donnent un cube ?

Soit en effet $X^2 + 48 = Y^3$.

Si X est impair, Y aussi, $Y = p^2 + 3q^2$, et il existe p et q tels que

$X + 4i\sqrt{3} = (p + qi\sqrt{3})^3$; cela entraîne $4 = 3q(p^2 - q^2)$ qui est impossible.

Si X est pair, Y aussi, X/2 est pair car $(X/2)^2 = 2(Y/2)^3 - 12$.

Si X est multiple de 4, Y aussi car $(Y/2)^3 = 2(X/4)^2 + 6$.

Alors X/4 est impair car $(X/4)^2 = 4(Y/4)^3 - 3$, et les seules différences "cube moins carré" égales à 48 sont bien de la forme $48 = (4y)^3 - (8x + 4)^2$, d'où $4y^3 = (2x + 1)^2 + 3$ et $y^3 = x(x + 1) + 1$.

En vertu du résultat de Ljunggren, on peut affirmer :
$48 = 4^3 - 4^2 = 28^3 - 148^2$, et ce sont les seules décompositions de 48 comme différence d'un cube et d'un carré.

H. DELANGE (université de Paris-Sud) signale également que la simple mise de l'équation $x(x + 1) + 1 = y^3$ sous la forme $4y^3 = (2x + 1)^2 + 3$ permet d'affirmer, d'après un résultat de MORDELL, qu'il y a un nombre fini de solutions.

Avis de recherche n° 45 sur la plus petite solution de l'équation des boeufs d'Archimède :

$$\boxed{x^2 - 410\,286\,423\,278\,424\; y^2 = 1}.$$

Alain BESSON m'avait demandé de rectifier la valeur $n = 2388$ indiquée dans le précédent *Bulletin* en $n = 2329$, ce que j'avais omis de faire. Guy ROBIN (université de Limoge) et J. MOREAU de ST MARTIN confirment cette dernière valeur. Voici la résolution de ce dernier.

"Les solutions de l'équation de FERMAT $X^2 - A\,Y^2 = 1$
s'expriment toutes au moyen des polynômes de TCHEBYCHEV sous la forme $X = \pm T_k(p)$, $Y = \pm qU_k(p)$, k entier, si p et q sont les plus petits entiers > 0 tels que $p^2 - Aq^2 = 1$.

Ici $A = 4729494$, p et q sont fournis par Maple (cf. *Bulletin* 405) :
$p = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$
$q = 50\,549\,485\,234\,315\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$

On s'intéresse aux Y multiples de 9 314, ce qui conduit à étudier les restes des $qU_{k(p)}$ modulo 9314 = 2*4657 en fonction de k.

q est pair et, modulo 4 657, les restes de p et q sont respectivement 4406 et 3 051.

La récurrence qui donne les $U_{k(p)}$ se transpose aux restes $R(k)$ modulo 4657 :

$R(k) = (2{*}4406{*}R(k - 1) - R(k - 2)\,)$ mod 4657, à partir de $R(0) = 0$, $R(1) = 1$.

J'obtiens, par un petit programme traduisant cette récurrence, $R(2329)$ comme premier terme nul après $R(0)$.

Toutes les solutions sont données par les k, multiples de 2 329, et la solution fondamentale cherchée pour $x^2 - 410\,286\,423\,278\,424 y^2 = 1$ est $x = T_{2329(p)}$, $y = qU_{2329(p)} / 9314$.

Ces nombres ont respectivement 103 273 et 103 266 chiffres, car $2x$ vaut $(2p)^{2329}$ approximativement. Leur calcul effectif ne soulève pas de difficulté de principe (utiliser la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev, 2 328 fois pour x et autant pour y) à condition de disposer d'une taille de mémoire confortable! (NDLR : Guy Robin les a sorti sur papier !).

Quant aux effectifs des 8 troupeaux de taureaux et de vaches des différentes espèces décrites dans l'énoncé du problème (cf. J. ITARD), ils s'expriment par des nombres de 206 545 chiffres. Il faudrait des centaines de pages pour imprimer ces résultats (astronomiques, c'est le cas de le dire...)

N.B. 2 329 est un diviseur de $(4657^2 - 1)/2$ et non un diviseur de $(4657-1)/2$; c'est en cohérence avec le fait que A n'est pas résidu quadratique modulo 4 657.

En effet, l'extension algébrique $\mathbb{Z}/4657^2\mathbb{Z}\left[\sqrt{A}\right]$ est alors un corps à 4657^2 éléments, dans lequel $\left(p + q\sqrt{A}\right)^{2k} = 1$ si $R(k) = 0$.

Avis de recherche N° 52 sur les décompositions des nombres de la forme $\frac{4}{n}$ en sommes d'au plus trois fractions égyptiennes.

Dans le *Bulletin* 405, j'avais indiqué que parmi les congruences de n modulo 24, il résistait $\frac{4}{24q+1}$ et $\frac{4}{24q+9}$. J. Moreau de St Martin fait remarquer que $\frac{4}{24q+9}$ ne résiste pas longtemps, car

$\frac{4}{24q+9} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{4(2q+1)-1}$ et $\frac{4}{4p-1}$ a déjà été décomposé en $\frac{1}{p} + \frac{1}{p(4p-1)}$. Rappelons d'ailleurs que la première congruence qui résiste vraiment est $\frac{4}{840q+1}$.

Avis de recherche n° 58 : que répondre aux élèves qui demandent pourquoi, dans une réflexion, la gauche et la droite sont inversées, alors que le haut et le bas ne le sont pas ?

Plusieurs collègues signalent sur ce sujet l'excellent livre de Martin GARDNER : *l'univers ambidextre* (Seuil / Science ouverte).