Dans nos classes
Lycée

Le plaisir de chercher, la joie de trouver

François Padilla
Professeur au lycée de Decazeville
avec la collaboration de
Jean Aymes
Professeur au lycée Jules Michelet de Montauban

Cet article veut *simplement* relater le plaisir que ressentent professeur et élèves à chercher un problème qui pique notre curiosité et la *joie* d'avoir trouvé une solution, même partielle.
Voici l'énoncé, classique :

> Soit un triangle ABC, soit $A' = S_B(C)$, $B' = S_C(A)$, $C' = S_A(C)$.
> Construire ABC lorsque $A'B'C'$ est donné.
> (Prix Houphouët Boigny, rallye de Côte d'Ivoire).

C'est mon collègue Claude CONQUET, professeur au lycée Terre Rouge de Cahors qui avait posé cet énoncé lors d'une réunion entre animateurs IREM à Toulouse il y a une bonne dizaine d'années. Il avait signalé la simplicité de la solution analytique.

J'avais ressorti cet énoncé à l'occasion d'un stage IREM que j'animais quelques années plus tard. Marcel LAFON, professeur au lycée Monteil de Rodez, s'était investi dans cette recherche. Il avait proposé une solution intéressante.

Enfin, je l'ai proposé à mes élèves de TC-TE au début de l'année scolaire 1993-94 en travail libre non noté. J'ai eu également un échange avec mon collègue Jean AYMES qui l'a, lui aussi, proposé à ses élèves.

Citons les élèves : Samuel, Touria et Jocelyn de Decazeville, Delphine, Cécile et Nicolas de Montauban, qui ont abouti dans leur recherche avec des solutions voisines.

Je me suis permis de regrouper certaines solutions. J'utilise le théorème de la droite des milieux et sa réciproque, sans le dire.

Solution n°1 : utilisant la droite des milieux.

Analyse : (élèves : Delphine, Cécile et Jocelyn ; M. Lafont)

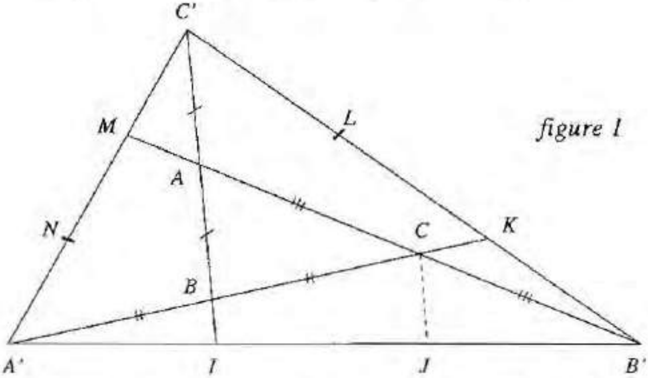


figure 1

On trace la parallèle à (AB) passant par C et coupant $(A'B')$ en J.

On a $A'I = IJ$ dans le triangle $A'CJ$

et $IJ = JB'$ dans le triangle AIB'.

De même, $A'N = NM = MC'$.

Synthèse :

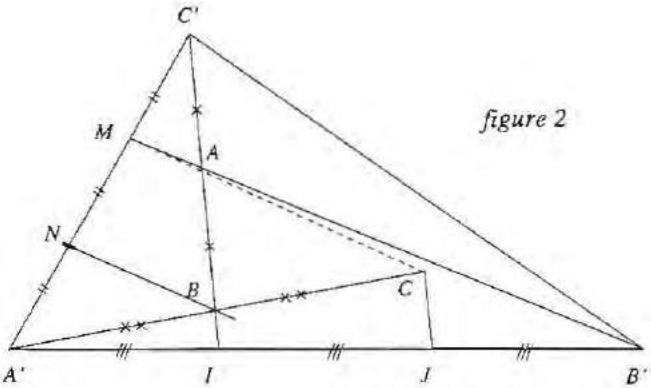


figure 2

On construit I, J au tiers de $[A'B']$ et M, N au tiers de $[A'C']$.
Soit A, intersection de $(C'I)$ et $(C'M)$.
Soit, par N, la parallèle à $(B'M)$ coupant $(C'A)$ en B ; A est le milieu de $[C'B]$.
Soit par J, la parallèle à (BI) coupant $(A'B)$ et C ; B est le milieu de $[A'C]$
Alors $(CM)//(BN)$, donc C est sur (AB') et C est le milieu de $[AB']$ dans le triangle (AIB').

Solution n°2 avec le théorème de Ménélaüs (F. Padilla).
Analyse: : Comme dans la solution (1),

$$\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'}\ ;\ \overrightarrow{C'M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'A'}$$

Synthèse : (voir figure 1).
On construit I, K, M d'où A, B, C déterminés par les intersections des droites $(A'K)$, $(B'M)$ et $(C'I)$.
On applique le théorème de Ménélaüs deux fois :
- à la transversale $B'CM$ au triangle $A'C'K$:

$$\frac{\overline{B'K}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{MC'}}{\overline{MA'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CK}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CK}} = 1$$

d'où $\qquad \overline{CA'} = -6\,\overline{CK} \qquad (1).$

- à la transversale $C'BI$ au triangle $A'B'K$:

$$\frac{\overline{C'K}}{\overline{C'B'}} \cdot \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BK}} = \frac{2}{3} \times (-2) \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BK}} = 1$$

d'où $\qquad 4\,\overline{BA'} + 3\,\overline{BK} = 0$

donc $\qquad 4\,\overline{CA'} + 3\,\overline{CK} = 7\,\overline{CB}$

et, grâce à (**1**), $\qquad \overline{CB} = \frac{1}{2}\,\overline{CA'}$

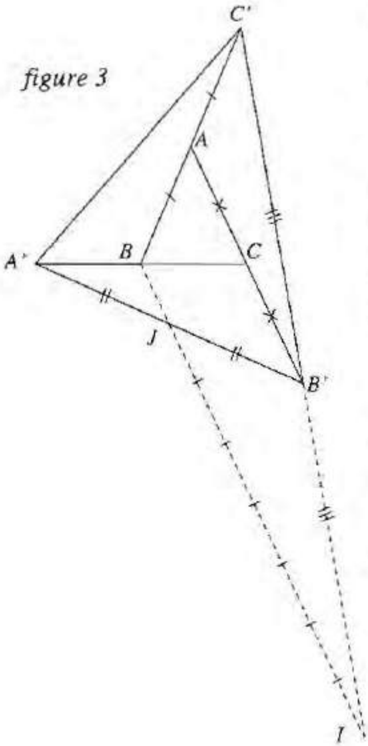
Ceci prouve que B est le milieu de $[CA']$. De même pour A et C.

Solution n°3, d'après un énoncé pris sur ISTRA, TCE, page 281 (en utilisant des homothéties).
Analyse :
Soit les homothéties $H_{A'}$, $H_{B'}$ *et* $H_{C'}$, de rapport 1/2.
On considère $f = H_{A'} \circ H_{B'} \circ H_{C'}$. Cherchons l'image de B :

$$B \xrightarrow{H_{C'}} A \xrightarrow{H_{B'}} C \xrightarrow{H_{A'}} B.$$

Ceci prouve que $f = H_{B,1/8}$.

Utilisons les points $I = S_{B'}(C')$ et J milieu de $[A'B']$.



On a :

$$I \xrightarrow{H_{C'}} B' \xrightarrow{H_{B'}} B' \xrightarrow{H_{A'}} J \text{ donc}$$

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{8}\,\overrightarrow{BI}$ d'où l'on tire $\overrightarrow{IB} = \frac{8}{7}\,\overrightarrow{IJ}$.

Ceci détermine B de façon unique. Ensuite on aura A milieu de $[BC']$ et C milieu de $[AB']$.

Synthèse :

Soit $f = H_{A'} \circ H_{B'} \circ H_{C'}$. Le centre de cette homothétie est B et il vérifie $\overrightarrow{IB} = \frac{8}{7}\,\overrightarrow{IJ}$.

On construit $I = S_{C'}(B')$ et J milieu de $[A'B']$ puis B.

On construit ensuite A, milieu de $[BC']$ et C milieu de $[AB']$.

Reste à prouver que B est bien le milieu de $[A'C]$.

A milieu de $[BC']$
B' milieu de $[C'I]$ $\Rightarrow (AB')//(BI)$

Or, J est le milieu de $[A'B']$

Donc B est le milieu de $[A'C]$.

On aurait pu dire aussi : $f \circ \overset{-1}{H_{C'}} \circ \overset{-1}{H_{B'}} = H_{B,\frac{1}{8}} \circ H_{C',2} \circ H_{B',2}$

Donc $\left(H_{A',1/2} \circ H_{B',1/2} \circ H_{C',1/2}\right) \circ H_{C',2} \circ H_{B',2} = H_{B,1/8} \circ H_{C',2} \circ H_{B',2}$

c'est-à-dire $H_{A',1/2} = H_{B,1/8} \circ H_{C',2} \circ H_{B',2}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "H_{B',2}"] \arrow[rrr, bend right, "H_{A',1/2}"'] & A \arrow[r, "H_{C',2}"] & B \arrow[r, "H_{B,1/8}"] & B \end{tikzcd}$$

Ceci prouve que B est le milieu de $[A'C]$.

Solution n°4 , avec des égalités vectorielles. (élèves : Touria, Nicolas)

Analyse : voir figure (1). On se donne pour but de situer A, par exemple en exprimant $\overrightarrow{A'A}$ par rapport à la base $\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'C'}\right)$.

Par exemple :

$$\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C'}\right)$$

Or, $$\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}\right)$$

D'où $$\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{8}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{8}\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$$

et $$\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{7}\overrightarrow{A'B'} + \frac{4}{7}\overrightarrow{A'C'} \qquad \textbf{(1)}$$

Synthèse :

Grâce à **(1)**, on sait obtenir le point A, puis $B = S_A(C')$ et C, le milieu de $[AB']$

B est-il le milieu de $[A'C']$?

Exprimons séparément $\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{A'B}$ en fonction de la base $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.

Nous obtiendrons $$\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A},$$

puis, compte tenu de (1), $$\overrightarrow{A'C} = \frac{4}{7}\overrightarrow{A'B'} + \frac{2}{7}\overrightarrow{A'C}$$

et, d'autre part, $$\overrightarrow{A'B} = \frac{2}{7}\overrightarrow{A'B} + \frac{1}{7}\overrightarrow{A'C}.$$ D'où...

Solution n°5: en utilisant l'associativité du barycentre. (F. PADILLA)

Analyse :

Comme pour la solution (1), on démontre que :

AI = IJ = JB',

B'K = KL = LC',

C'M = MN = NA',

Synthèse

On construit I, J, K, L, M, N aux tiers des côtés. On

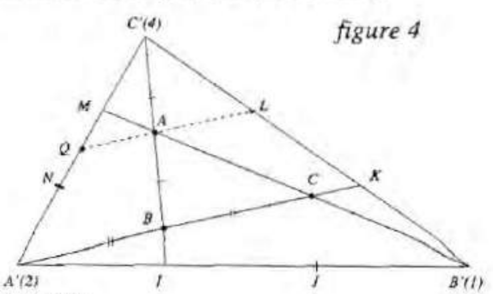


figure 4

construit A, B, C *comme intersections de* $(C'I)$, $(A'K)$, $(B'M)$.
Soit Q le milieu de $[A'C']$. Prouvons que (QL) passe par A.
Soit G le barycentre de $[A'(2), B'(1), C'(4)]$ et prouvons d'abord que $G = A$.
G = barycentre de $[A'(2), B'(1), C'(4)]$ = barycentre de $[I(3), C'(4)]$, donc $G \in (I'C)$. De même, $G \in (B'M)$.
On en déduit que $G = A$. De plus :
G = barycentre de $[A'(2), C'(2), B'(1), C'(2)]$ = barycentre de $[Q(4), L(3)]$ donc $A \in (QL)$.
Or, $(QL) \parallel (A'K)$.
Ceci prouve que A est le milieu de $[BC']$.
De même pour B et C.

Remarque :
A est le barycentre de $[A'(2), B'(1), C'(4)]$

donc $$\overrightarrow{C'A} = \frac{2}{7}\overrightarrow{C'A'} + \frac{1}{7}\overrightarrow{C'B'}.$$

De même, B est le barycentre de $[B'(2), C'(1), A'(4)]$

donc $$\overrightarrow{C'B} = \frac{4}{7}\overrightarrow{C'A'} + \frac{2}{7}\overrightarrow{C'B}$$

d'où A milieu de $[C'B]$.

Cette remarque est inspirée d'un texte de devoir de mon collègue Joël MOREAU *qui l'avait trouvé dans la collection Terracher.*

Solution n°6 avec homothétie, droite des milieux, analytique. (Elève SAMUEL)

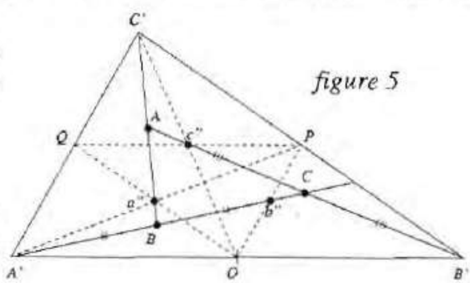


figure 5

O, P et Q sont les milieux respectifs de $[A'B']$, $[B'C']$ et $[C'A']$
$h = H_{A', 1/2}$

Analyse
On a $h([B'C']) = [OQ]$ donc $a'' = h(P)$ est le milieu de $[OQ]$. De plus :

$$\left.\begin{array}{l} h(C) = B \\ h(P) = a'' \end{array}\right\} \Rightarrow (CP) \parallel (Ba'') \qquad \textbf{(1)}$$

Dans le triangle $AC'B'$, $(AC') \parallel (CP)$ et donc $(BC') \parallel (CP)$ **(2)**.
De **(1)** et **(2)**, on déduit que (Ba'') et $(B'C')$ sont confondues.
Donc, A et B sont sur $(a''C')$
de même B et C sont sur $(b''A')$ et C et A sont sur $(C''B')$.

Synthèse :
On trace les droites $(a''C')$, $(b''A')$, $(C''B')$ et leurs intersections donnent A, B et C.

Dans le repère $\left(A';\ \overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'C'}\right)$,

on a $a''(1/4\ ,1/4)$, $b''(1/2, 1/4)$, $c''(1/4,1/2)$

les droites : $(A'b'') : y = \frac{1}{2}x$

$(B'c'') : y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$(C'a'') : y = -3x + 1$

D'où les intersections $A\ (1/7,\ 4/7)$, $B(2/7,\ 1/7)$, $C(4/7,\ 2/7)$ et il est alors aisé de prouver que A, B, C sont les milieux respectifs de $[BC']$, $[A'C]$ et $[AB']$.

Solution n°7 avec homothétie (F. PADILLA)

$$\begin{cases} A' = S_B(C), \\ B' = S_C(A), \\ C' = S_A(B) \end{cases} \qquad \begin{cases} A'' = S_{C'}(B'), \\ B'' = S_{A'}(C'), \\ C'' = S_{B'}(A') \end{cases}$$

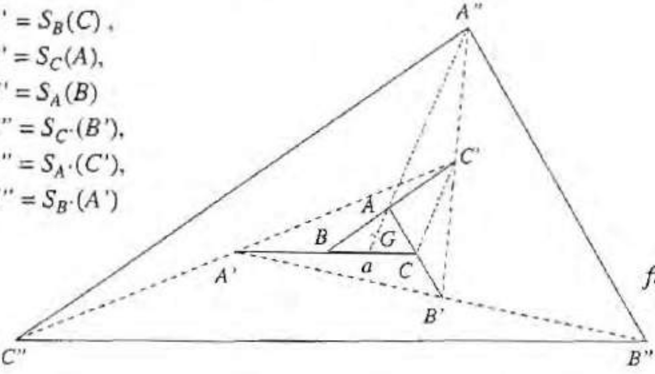


figure 6

Analyse :
Avec une homothétie de centre G isobarycentre de A, B, C.
Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

On a : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC} = 2\ \overrightarrow{GB}$, etc pour B', A et C, puis pour C', B et A.

D'où $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc G est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$ et aussi du triangle $A''B''C''$ par un raisonnement identique.

Soit a, milieu de $[BC]$, A, milieu de $[BC']$, ce qui entraîne $\overrightarrow{aA} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CC'}$

dans le triangle BCC',

C milieu de $[B'A'']$ et C', milieu de $[BA'']$, ce qui donne $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

dans le triangle $AB'A''$

On en déduit : $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{aA} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AA''} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AA''}$

et donc $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{7}\overrightarrow{GA''}$

De même $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{7}\overrightarrow{GB''}$ et $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{7}\overrightarrow{GC''}$.

Synthèse :
On construit A'', B'', C'' à partir de A', B', C', puis A, B, C images de A'', B'', C'' par l'homothétie de centre G, centre de gravité du triangle $A'B'C'$ et de rapport 1/7. Prouvons que B est milieu de $[A'C]$, par exemple en comparant $2\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC}$

Or, $2\overrightarrow{GB} = \frac{2}{7}\overrightarrow{GB''}$ et $\overrightarrow{GB''} + \overrightarrow{GC'} = 2\overrightarrow{GA'}$

Donc, $2\overrightarrow{GB} = \frac{4}{7}\overrightarrow{GA'} - \frac{2}{7}\overrightarrow{GC'}$.

On exprime ensuite $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC}$ en fonction de $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GC'}$, ... et on conclut.
De même pour C et A, milieux respectifs de $[AB']$ et $[BC']$.
Pour mémoire, signalons la solution analytique:

Solution n°8 :

On choisit le repère $\left(A'; \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.
Analyse :
On trouve $x_A = 1/7, y_A = 4/7$
$x_B = 2/7, y_B = 1/7$
$x_C = 4/7, y_C = 2/7$
Synthèse :
On construit A, B, C grâce à leurs coordonnées. On prouve ensuite que a, B, C, sont les milieux respectifs de $[BC']$, $[A'C]$, $[AB']$.

Solution n°9 **:** avec des aires (Jean Aymes)

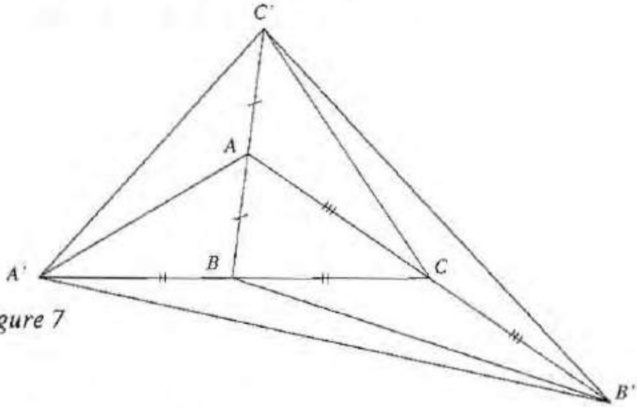


figure 7

1) Quelques aires que l'on peut comparer :

$C'AC$ et $C'CB'$	;	$C'BC$ et $C'AC$
$C'AC$ et ABC	;	$A'AB$ et $A'AC'$

2) Finalement avec s = aire (ABC), chacun des triangles "élémentaires" qui pavent $A'B'C'$ a comme aire s. Ce qui fait $7s$ pour $A'B'C'$.

3) Localiser A en fonction de $A'B'C'$ est alors possible :
$\underbrace{\text{aire } (AA'B') = 4s}_{\text{(i)}}$; $\underbrace{\text{aire } (AA'C') = s}_{\text{(ii)}}$; $\underbrace{\text{aire } (AB'C') = 2s}_{\text{(iii)}}$

4) $A'B'C'$ étant donné :

(i) $\Leftrightarrow$ A est sur une parallèle à $(A'B')$ distante de $(A'B')$ de $\frac{4}{7}h_{C'}$

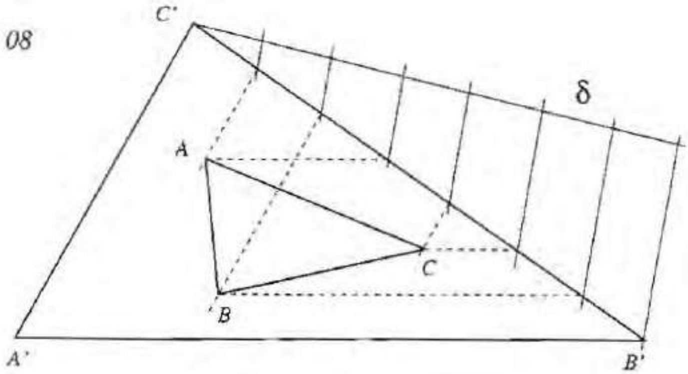
($h_{C'}$ hauteur de $A'B'C'$ issue de C')

(ii) $\Leftrightarrow$ A est sur une parallèle à $(A'C')$ distante de $(A'C')$ de $\frac{1}{7}h_{B'}$

(iii) $\Leftrightarrow$ A est sur une parallèle à $(B'C')$ distante de $(B'C')$ de $\frac{2}{7}h_{A'}$

5) Proposition de construction :*(figure page suivante)*
Sur la droite δ, on porte une division régulière. Ce qui permet de diviser $[B'C']$ en sept segments égaux.
En pointillé, les parallèles à $(A'B')$ et à $(A'C')$ permettent de construire A, B et C.

figure 08



On peut en faire la preuve.
Remarquons que ces parallèles indiquent les coordonnées de A, B, C dans le repère $\left(A';\ \overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{A'C'}\right)$

En conclusion

Les élèves ont été vraiment motivés :

- d'une part dans le cadre d'une recherche stimulée par l'échange de solutions. Même s'ils n'arrivent pas d'emblée à des solutions entièrement acceptables, ils comprennent mieux les exigences du raisonnement dans la mesure où on les aide à développer leurs idées.
- d'autre part, les plaçant ainsi en situation de rédiger pour leurs camarades ou leurs correspondants, il entrent très bien dans les exigences de la présentation et de la rédaction.

Oui ! c'est le plaisir de chercher et la joie de trouver qui les animent.