

Dans nos classes Collège

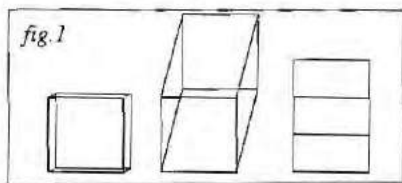
Enseigner la perspective cavalière au Collège

M. ROUSSELET
HERBLAY

Après avoir rappelé ce qu'est la perspective cavalière, nous en examinerons les propriétés principales. Nous préciserons le vocabulaire et définirons une approche pédagogique du dessin en perspective cavalière au Collège.

La représentation d'un objet en perspective est toujours ambiguë puisqu'une figure plane ne peut pas fournir le totalité des informations nécessaires à la description d'une configuration spatiale. Pour représenter les objets de l'espace, nos manuels utilisent la technique la plus simple, celle de la *perspective cavalière*, mais sommes-nous bien certains que nos élèves soient toujours capables d'interpréter correctement les dessins réalisés avec ce type de perspective ?

A titre d'exemple, les trois dessins ci-contre représentent-ils des cubes ? Parions que le lecteur sera tenté de répondre par la négative ! En effet, les dessins présentés vont à l'encontre des propriétés qu'on sait être vraies pour les cubes : arêtes de même longueur, angles droits, etc. Comme les indi-



Bulletin APMEP n° 406 - Septembre-October 1996

cations précises sur la manière dont ils ont été réalisés manquent, il devient hasardeux de relier les propriétés «lues» sur les dessins aux propriétés réelles des polyèdres représentés.

Pour que les représentations en perspective cavalière ne soient pas de simples illustrations mais de véritables constructions géométriques, il faut donc que les règles utilisées soient connues et fassent l'objet d'un véritable apprentissage. C'est à ce prix qu'on dotera les élèves d'un outil performant qui trouvera toute sa place dans l'enseignement de la géométrie.

I - Quelques notions théoriques

Qu'appelle-t-on perspective cavalière ?

Soit, dans l'espace, un plan P et une droite d ni contenue dans P ni perpendiculaire à P . Considérons un objet quelconque et projetons-le sur le plan P parallèlement à la droite d . La projection ainsi obtenue sur le plan P est une *représentation en perspective cavalière* de l'objet (1).

Le dessin en perspective cavalière fait donc appel à des *projections cylindriques*. En particulier, l'ombre d'un objet placé au soleil sur un plan horizontal est une perspective cavalière de cet objet.

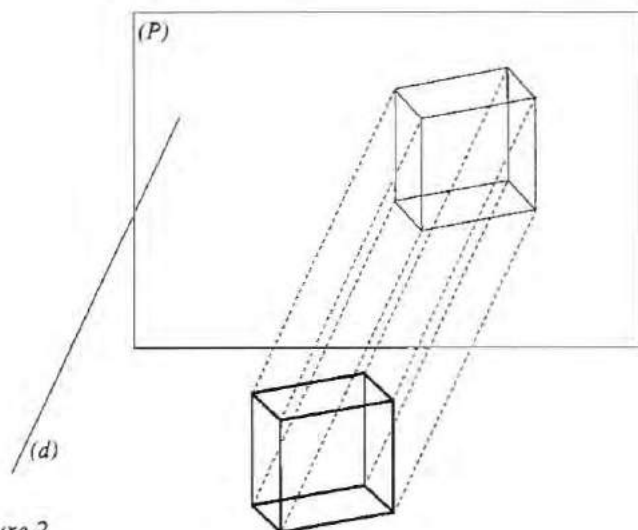


figure 2

1 - Nous appellerons *vue perspective* la représentation d'un objet et *perspective cavalière* le type de projection qui vient d'être défini. Les perspectives cavalières sont également appelées des *projections obliques*.

Les propriétés fondamentales de la perspective cavalière

On démontre ⁽²⁾ que la perspective cavalière définie par le plan P et la droite d possède les propriétés suivantes :

- elle conserve les alignements,
- elle conserve le parallélisme,
- elle conserve le rapport des longueurs de deux segments parallèles,
- elle conserve les milieux,
- toute figure contenue dans un plan parallèle à P est projetée en vraie grandeur,
- les cercles sont représentés par des segments, des cercles ou des ellipses.

Les règles du dessin en perspective cavalière

Pour construire une vue perspective d'un objet, on peut choisir de le poser sur un plan horizontal H qui sera appelé *le géométral* ⁽³⁾. Ceci n'est en rien obligatoire mais, au Collège, ce choix simplifie grandement l'exposé des méthodes de la perspective cavalière. Comme plan P , on choisit alors un plan vertical T , *le tableau*. Les plans H et T se coupent suivant une droite appelée *ligne de terre*.

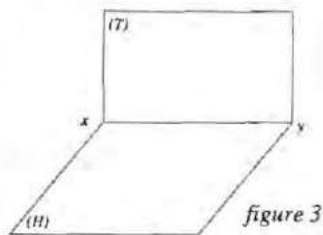


figure 3

La construction de la vue perspective utilisera les règles suivantes qui découlent des propriétés énoncées plus haut :

- tout segment contenu dans un *plan frontal* (c'est-à-dire parallèle au tableau T) est représenté en «vraie grandeur», compte non tenu de l'échelle
- toute droite perpendiculaire au plan T est représentée par une *fuyante* qui fait un angle constant avec la ligne de terre. Cet angle appelé *angle de fuite* ⁽⁴⁾ de la perspective, est mesuré positivement dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre. La plupart du temps, on lui donne une valeur de 45° .
- tout segment $[MN]$ porté par une perpendiculaire au plan T a pour vue perspective un segment $[mn]$ de longueur $mn = k MN$, le nombre k étant le *coefficient de réduction* de la perspective. Il est commode de prendre $k = 1/2$.

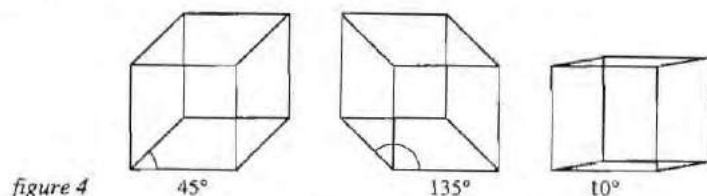
² Voir les ouvrages [V] et [VI] cités en bibliographie

³ Pour ma part, j'appelle ce plan *le sol*

⁴ Comme le montre la figure 5, l'angle de fuite dépend de la direction d mais il n'est pas envisageable d'expliciter cette relation au Collège.

Influence de l'angle de fuite sur la perspective

Pour une position donnée de l'objet à représenter, on change considérablement la représentation de cet objet en changeant l'angle de fuite. Voici par exemple trois vues perspectives d'un cube dont la face avant est contenue dans un plan frontal. Les angles de fuite valent respectivement 45° , 135° et 10° .



Influence de la position de l'objet sur la représentation

Considérons un cube placé de telle façon qu'une diagonale de sa base soit parallèle à la ligne de terre. Les règles de la perspective cavalière obligent à placer l'autre diagonale sur une fuyante. Avec un coefficient de réduction égal à $\frac{1}{2}$ et un angle de fuite de 45° , on obtient le dessin que montre la figure 5.

Les élèves ne reconnaissent pas aisément un cube dans un tel dessin, mais de telles représentations peuvent faire l'objet d'activités assurément très formatrices⁽⁵⁾ pour faire saisir la distinction entre vision et représentation.

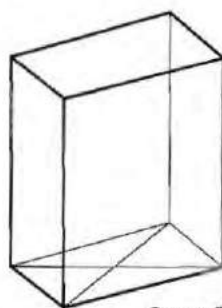


figure 5

Comment choisir la position de l'objet à représenter ?

Pour choisir cette position, il faut tenir compte de deux exigences. On souhaite conserver le maximum d'informations sur la forme de l'objet mais aussi faciliter le plus possible la réalisation du dessin.

Prenons l'exemple d'un cube. Placé dans une position quelconque sur le géométral, on peut constater que toutes ses faces sont représentées par des parallélogrammes. (figure 6)

Cependant, il existe une position dans laquelle deux faces sont représentées par des carrés, comme dans la réalité. Ceci se produit lorsque la face avant du cube est parallèle au tableau. C'est donc cette position que nous allons privilégier. (figure 7)

⁵ On trouvera de telles activités dans [VIII]

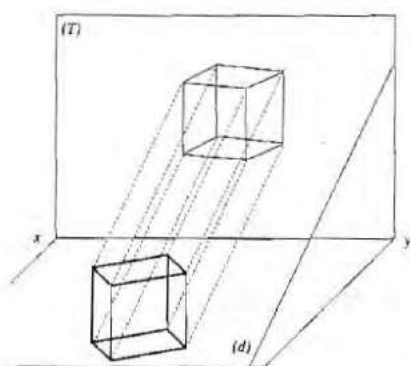


figure 6

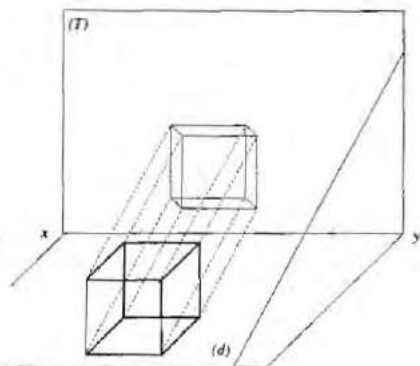


figure 7

Pour d'autres polyèdres, des pyramides par exemple, l'expérience montre qu'on rend la construction d'une vue perspective plus facile en plaçant une arête de la base parallèlement à la ligne de terre.

II - L'enseignement de la perspective cavalière

On ne peut pas se borner à exposer des règles sans leur donner du sens. Pour cela, il nous semble intéressant de montrer aux élèves que les règles du dessin en perspective cavalière peuvent être tirées de l'observation de l'ombre des objets en lumière du jour. L'apprentissage s'effectuera en quatre étapes.

Première étape : les notions de base

Le maniement d'objets réels et de maquettes doit permettre d'aborder les notions de base : plan, plan horizontal, plan vertical, droites verticales, droites horizontales, droites parallèles, droites perpendiculaires.

Deuxième étape : l'étude des ombres

En utilisant la lumière du jour, on pourra étudier les ombres de triangles, de quadrilatères et de disques découpés dans du carton. On vérifiera expérimentalement que l'ombre d'un carré est en général un parallélogramme et que celle d'un disque est en général une ellipse.

On conjecturera qu'il y a conservation du parallélisme.

Quelques trous percés dans une plaque permettront d'observer que les alignements semblent conservés.

On pourra également relever les ombres de quelques polyèdres simples, cubes, parallélépipèdes ou pyramides.

A la fin de cette étude, on pourra attirer l'attention des élèves sur le fait que le dessin en perspective d'un objet posé sur le sol devant un plan vertical (T) et éclairé par un projecteur dont les rayons sont parallèles n'est autre que l'ombre de cet objet que sur le tableau T⁽⁶⁾. Cette comparaison devrait permettre aux élèves de mieux comprendre qu'une vue perspective ne correspond pas à la vision directe de l'objet que pourrait avoir un observateur.

Troisième étape : avec l'ordinateur

Avec un logiciel comme *Cabri-Géomètre*, il n'est pas très difficile de simuler l'ombre d'un cube posé sur un plan horizontal et éclairé par le soleil.

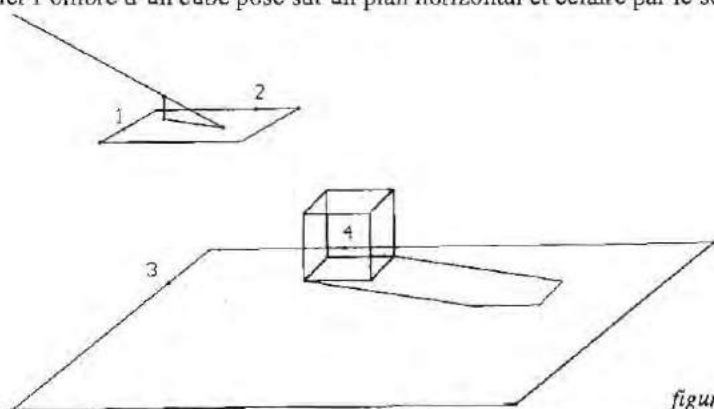


figure 8

En déplaçant les points 1 et 2, on modifie l'inclinaison des rayons de Soleil tandis que les points 3 et 4 servent à modifier la position du cube. Projetée sur un écran devant la classe toute entière, cette simulation va permettre aux élèves de retrouver les résultats obtenus dans la phase précédente. Cette simulation les habitue également à lire les dessins en perspective.

On utilise ensuite une construction qui permet de faire tourner un cube autour d'un axe vertical.

Les élèves constateront qu'il existe une position privilégiée du cube dans laquelle deux faces sont effectivement représentées par des carrés.

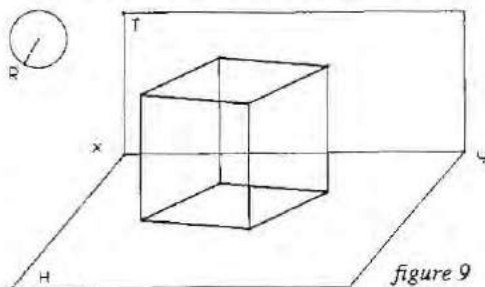


figure 9

⁶ On suppose que le faisceau lumineux n'est pas perpendiculaire au tableau.

On peut également simuler l'ombre d'un disque.

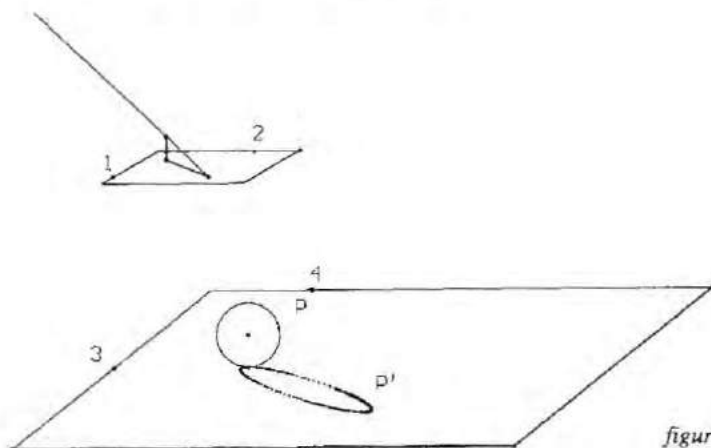


figure 10

Toutes ces simulations montrent aux élèves que les règles de dessin qui ont été tirées de l'observation de l'ombre des objets permettent *effectivement* d'obtenir des représentations satisfaisantes.

Dernière étape : la mise en pratique

Une fois comprises, les règles du dessin en perspective cavalière peuvent être mises en pratique selon les indications des programmes. Rappelons qu'on étudie le cube et les pavés droits en sixième, les prismes droits en cinquième, les pyramides en troisième.

Le cas des solides de révolution est plus complexe. Dans le cas du cylindre ou dans celui du cône, on peut l'aborder en simulant avec *Cabri-Géomètre* la rotation d'un rectangle ou d'un triangle autour de l'un de ses côtés. La figure 11 montre que la perspective du cercle décrit par M est une ellipse.

Au Collège, les représentations de la sphère (!) posent

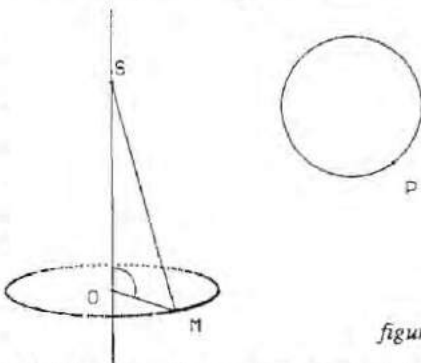


figure 11

7 Voir l'ouvrage de Gérard Audibert. Voir également les numéros 2, 3 et 4 de la revue *AbraCAdaBRI*

trop de problèmes pour pouvoir être abordée par des constructions. On se contentera donc de photos et de dessins traités de façon réaliste, avec des ombres, des lumières et des reflets.

III - Un exemple

Pour montrer que la réalisation d'un dessin en perspective cavalière est un véritable travail de géométrie, nous allons présenter un travail proposé à des élèves de troisième. Il s'agit de représenter en perspective cavalière un tétraèdre régulier $SABC$ dans les conditions suivantes :

- le tétraèdre est posé sur le sol par sa face ABC ,
- l'arête $[AB]$ est parallèle à la ligne de terre,
- C est situé entre (AB) et la ligne de terre,
- l'angle de fuite sera 45° et le coefficient de réduction $1/2$.

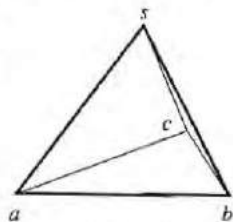


figure 12

La figure 12 montre la perspective à obtenir.

On peut noter que, dans cette vue perspective, les images des points de l'espace liés au tétraèdre sont désignés par des lettres minuscules afin de ne pas créer de confusion entre l'objet représenté et sa représentation.

Constructions préliminaires

Commençons par la construction, en vraie grandeur, de la face ABC .

La médiane $[CM]$ est perpendiculaire à (AB) . Le point C sera donc placé sur une fuyante.

Le centre de la face ABC n'est autre que son centre de gravité G .

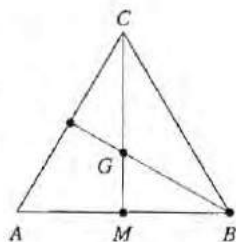


figure 13

On sait que le triangle SGB est rectangle en G . Grâce au dessin précédent, on connaît GB en vraie grandeur. On connaît également SB puisque $SB = AB$. On peut donc dessiner le triangle SGB en vraie grandeur lui aussi.

Cette seconde construction donne en vraie grandeur la hauteur $[SG]$ du tétraèdre.

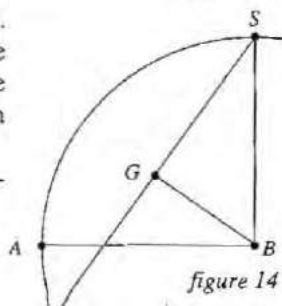


figure 14

Construction de la vue perspective

Passons à la vue perspective. On trace $[ab]$ et son milieu m . Par m , on mène une fuyante inclinée

à 45° . Sur celle-ci, on reporte c tel que $mc = \frac{MC}{2}$.

Une seconde médiane nous donne le point g .

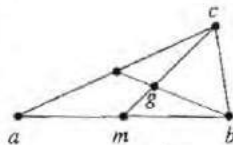


figure 15

Sur la perpendiculaire en g à (ab) , on porte s tel que $sg = SG$. On trace alors les arêtes latérales du tétraèdre pour achever la construction.

Bibliographie

- [1] Audibert G., *La perspective cavalière*, APMEP Paris 1990
- [2] Bkouche R. et Lehman D., *Initiation à la Géométrie*, PUF, 1988
- [3] Bolli P. et Humbert M., *Dispositif de recherche de l'enseignement secondaire post obligatoire*. Genève 1992.
- [4] Bonnafé F., «La représentation en perspective cavalière», *Bulletin APMEP n° 363*.
- [5] Parzysz B., «Voir et savoir. La représentation du perçu et du vu dans les dessins de géométrie dans l'espace», *Bulletin APMEP n°366*.
- [6] Rousselet M., *Polyèdres et autres bidules de l'espace ordinaire*, CDDP des Hauts de Seine 1995.
- [7] Rousselet M., *Comment faire de la géométrie dans l'espace avec Cabri-Géomètre ?*, Editions Archimède 1995.
- [8] Revue abraCadaBRI.