Réhabiliter le calcul mental

Un enjeu essentiel de l'enseignement des mathématiques dès l'Ecole Primaire

Daniel Djament
IUFM de l'académie de Créteil
centre de Livry Gargan

L'utilisation de calculatrice ne dispense pas de la pratique du calcul mental, celui-ci a en effet une quadruple fonction:
- Effectuer les calculs élémentaires de la vie quotidienne
- Apprendre à utiliser une calculatrice de manière performante
- Préparer à la compréhension des règles de l'algèbre
- Entraîner à l'approximation

Il serait agréable que les calculatrices dispensent les élèves de l'apprentissage du calcul élémentaire et la tentation est grande de reléguer la pratique du calcul mental et des techniques opératoires aux oubliettes au profit de l'outil magique qui à partir du cours moyen va «libérer» d'une tâche fastidieuse La réalité est moins gaie, cette libération se transforme le plus souvent en esclavage vis-à-vis de la machine utilisée même pour multiplier ou diviser par 10! La manipulation de la monnaie est, pour certains jeunes vendeurs, un sommet inaccessible et les élèves du secondaire utilisent souvent leur calculatrice sans aucune réflexion et sans savoir que les résultats fournis peuvent être violemment faux si les limites de capacités sont atteintes [1].

Mon propos n'est pas de critiquer l'usage des machines, il est d'y préparer, car il faut voir les choses en face : les bons utilisateurs de machines sont ceux qui calculent avec aisance avec leur tête.

La pratique du calcul mental sans machine et en particulier mental est fondamentale pour maîtriser les outils de calcul mais également pour avoir accès avec succès à la compréhension des calculs littéraux et c'est ce que je voudrais montrer par quelques exemples.

Le calcul mental exact :

Il commence au cours préparatoire où, à mon avis, on pratique l'addition et la soustraction (voir à ce sujet [2] et [3]).

38 + 1, 38 – 1, 50 – 1, 50 + 1, 65 + 10, 97 – 10 etc... sont bien évidemment nécessaires à l'étude de la numération, mais en allant un peu plus loin, imaginez :

Au CP :

28 + 9 : «28 + 10, c'est facile, c'est 38. Alors 28 + 9 c'est 1 de moins»
28 + 11 : «28 + 10 c'est facile, c'est 38. Alors 28 + 11, c'est 1 de plus»
28 – 9 : «28 – 10, c'est facile, c'est 18. Alors 28 – 9, c'est 1 de plus»
28 – 11 : «28 – 10, c'est facile, c'est 18. Alors 28 – 11, c'est 1 de moins».

Au CE : même technique avec des nombres plus grands.

97 + 11 ; 253 – 9 ; 174 + 9 ; 200 – 11 ; 358 – 197 ; 541 + 1006 etc.

Au CM : on reprend ce type d'exercice, mais pour expliquer la technique on écrit :

$$378 - 9 = 378 - (10 - 1) = 378 - 10 + 1.$$

Au Collège : on commence par refaire mentalement ces calculs qui amènent directement à :
$a + (b + c) = a + b + c$; $a + (b - c) = a + b - c$; $a - (b + c) = a - b - c$ et $a - (b - c) = a - b + c$.

Ainsi, le calcul mental prépare la fameuse règle des signes et est indispensable à sa compréhension. Des élèves de collège insuffisamment rompus à cette gymnastique se réfugient dans le célèbre *«moins par moins ça fait plus»* et entrent de plein pied dans le pseudo-symbolisme antichambre de l'échec.

Dans le même ordre d'idées, 68 × 5 calculé mentalement comme la moi-

tié de 680 prépare, $a \times (b/c) = (a \times b)/c$ et 340/5 calculé comme le double de 34 prépare, $a/(b/c) = (a/b) \times c$.
45×11 prépare $a(b + c) = ab + ac$, 17×99 prépare $a(b - c) = ab - ac$, 100×1000 débouche sur $10^2 \times 10^3 = 10^5$ puis sur les calculs avec des exposants etc, etc.

On pourra aussi voir se dessiner des propriétés classiques derrière le type d'exercice suivant.
On écrit au tableau par exemple: $13 \times 28 = 364$ et on fait calculer mentalement: 13×14, 26×28, 13×7, $13 \times 2{,}8$, $1{,}3 \times 28$, $1{,}3 \times 2{,}8$, $0{,}13 \times 280$ etc.

C'est le calcul mental qui prépare l'algèbre.

Et le calcul mental continue avec l'algèbre. C'est, entre autres choses l'habitude d'effectuer de tête 201^2, 399^2, 21×19 qui fait comprendre les "identités remarquables". Un élève de seconde m'a dit l'autre jour : «$(a + b)^2$ c'est bien $a^2 + 2ab + b^2$, mais avec des vrais chiffres, $(3 + 4)^2$ c'est $3^2 + 4^2$»!

Le calcul mental est une illustration de l'algèbre.

Le calcul mental approché

L'usage de l'approximation est fondamental, majoration et minoration sont les deux mamelles de l'analyse et l'ordre de grandeur la préoccupation constante de la physique, c'est une des raisons pour lesquelles je considère que la pratique des techniques opératoires n'est pas surannée ; l'algorithme classique de la division, par exemple, nécessite l'approximation.

Si on réfléchit plus en détail à cette question, on en arrive à considérer qu'il serait souhaitable d'habituer les élèves à avoir l'attitude suivante devant tout calcul non immédiat :

Au cours élémentaire :

1) Se poser la question cruciale : «Ça fait à peu près combien ?»

On peut inciter les élèves à parier sur le résultat pour voir qui sera le plus proche, ceci est très stimulant pour les enfants et très instructif pour le maître qui mesurera les décalages entre les nombres proposés et la réalité.

2) Effectuer le calcul à la main et comparer avec les résultats proposés précédemment.

A partir du cours moyen, ajouter :

3) Effectuer le calcul à la machine et confronter le résultat avec ceux des phases 1 et 2.

On objectera que ceci est difficile à l'école élémentaire ; c'est vrai si l'habitude de se lancer tête baissée dans un calcul est déjà installée et si on

ne propose pas parallèlement des exercices du type :
«Sans poser l'opération, entourer le bon résultat» dans, par exemple :

$35 \times 17 =$	295	595	895	5095
$388/125 =$	31,04	0,3104	3,104	5,104
$38 \times 99 =$	3762	2762	30762	3862
$120 \times 1{,}999 =$	240,88	139,88	239,88	235,88
$27{,}3/3{,}9 =$	9	7	0,7	0,9

Ou encore : «Sans poser l'opération, entourer le nombre le plus proche du résultat», dans, par exemple :

$1{,}28 + 3{,}99 =$	4	5	6	7
$12{,}7 - 0{,}689 =$	11	12	10	9
$1{,}045 + 2{,}046 + 3{,}8 =$	7	6	8	9

Deuxième objection : c'est lourd à pratiquer et cela fait traîner les calculs en longueur. Pas vraiment, à deux conditions : que la phase 1 soit rapide (l'avis de trois ou quatre élèves suffit) et que cette pratique soit si ancrée dans les habitudes de la classe qu'elle devienne automatique.

Troisième objection : pourquoi la phase 2 ? Les phases 1 et 3 ne sont-elles pas suffisantes ?

La réponse est évidente : les phases 1 et 2 se font constamment écho ; on est capable d'approximation parce qu'on a effectué beaucoup de calculs et, pour être rapide et performant en calcul, il faut savoir approximer (pensons à nouveau à la division).

L'élève, bien sûr, finira par abandonner la phase 2, *mais on veillera à ce qu'il ne néglige jamais la phase 1.*

N'oublions jamais cette boutade de physicien : *On n'effectue jamais un calcul dont on ne connaît pas à l'avance le résultat*, ni de principe de matheux : *On apprend à calculer pour ne pas avoir à calculer.*

Bibliographie

[1] Djament, D., *«Avarie machine et panique à bord»*, Le Jeune Archimède, n°15, Juin-Juillet 1992.

[2] Brissiaud R., Clerc P., Ouzoulias A., *«J'apprends les maths»*, Manuel de CP, ed. Retz

[3] Djament D., *«Une expérience d'enseignement des mathématiques dans un cours préparatoire d'une zone d'éducation prioritaire»*, Thèse de doctorat de troisième cycle en didactique des mathématiques, Université Paris 7, Octobre 1985.