"Nul en math" ?

Jacqueline Fourastié,
Conservatoire National des Arts et Métiers

Je tente, depuis près de 30 ans, de donner quelques notions de statistiques et de mathématiques appliquées à la gestion aux auditeurs du Conservatoire National des Arts et Métiers, des adultes qui souhaitent continuer des études en Gestion[1]. Le niveau est, théoriquement, "Bac + 1" ou "Bac + 2". Pour s'inscrire au CNAM, il n'y a pas d'autre condition que d'être salarié. 10 % des auditeurs, à l'entrée, n'ont que le baccalauréat ou le "niveau du baccalauréat" (passage en terminale) ou même moins ; les autres ont un niveau d'études, sanctionné par un diplôme supérieur au baccalauréat. Dans tous les cas, il s'agit de personnes motivées, qui viennent suivre des cours le soir après leur travail.

Pour un professeur, c'est un auditoire merveilleux ! Et cependant, je suis sans cesse confrontée à des élèves "nuls en maths" que je classerai volontiers dans deux catégories :

1. J'ai environ 1000 élèves par an à Paris. Les enseignements sont donnés dans les 50 centres associés du CNAM ; je suis chargée d'une certaine coordination de ces enseignements, en dialogue avec les enseignants.

- ceux qui se disent "forts", qui affirment avoir fait avec succès tous les exercices, sont effectivement assidus aux Exercices Dirigés, mais, parfois plusieurs années de suite, rendent des copies d'examen qui valent moins de 5. Ils disent perdre leurs moyens à l'examen, mais obtiennent souvent des succès aux autres examens du CNAM[2]
- ceux qui savent qu'ils ne comprennent pas, posent sans cesse des questions et entrent volontiers dans mes propositions de "mise à niveau".

*

Devant ce phénomène, une hypothèse s'est lentement formée dans mon esprit ; je vais la présenter ici et indiquer les conseils que je donne en conséquence. J'aimerais qu'une discussion entre collègues puisse avoir lieu. Nous gagnerons à échanger nos expériences[3] et je suis sûre de n'avoir pas encore trouvé "la" solution !

Mon hypothèse :
il n'y a pas de "nuls en maths",
il n'y a que de mauvais départs.

Cette hypothèse est étayée sur des faits dont je vous donnerai quelques exemples, mais d'abord sur une conception de l'homme ! J'ai beau être fière d'être mathématicienne, je ne crois pas qu'il faille faire partie d'une élite pour *comprendre* les mathématiques. (Autre chose est d'inventer des théorèmes ou de créer une nouvelle branche des mathématiques !). Du temps de Diophante ou même de Viète, il fallait faire partie d'une élite pour résoudre une équation ; aujourd'hui, ce n'est plus nécessaire, parce qu'on a fait de tels progrès dans les notations que cela devient un mécanisme simple. Mon ambition, lorsque je dis "comprendre les mathématiques", est limitée : il s'agit de pouvoir utiliser l'instrument mathématique pour des problèmes simples de gestion ou d'économie (algèbre, programmation linéaire, mathématiques financières, exponentielles et logarithmes, calcul des probabilités et analyse combinatoire).

Aujourd'hui donc, je pense que toute personne qui accepte de reprendre les mathématiques à la base (peut-être dès les mécanismes de l'addition) et

2. Les exigences au CNAM sont fortes. Il faut pour obtenir un diplôme, être reçu avec la moyenne à différentes "valeurs" ; aucune compensation n'est possible. Le diplôme de Premier Cycle d'Economie et Gestion comprend 7 valeurs, dont une de mathématiques et une de statistique.
3. Je pense répondre un peu à la demande formulée par Francis SLAWNY, "Que reste-t-il des maths... après ?", dans les *Chantiers de pédagogie mathématique* de septembre 1993.

qui y consacre suffisament de temps, peut arriver au niveau que je viens de décrire.

Les faits sur lesquels je m'appuie sont ceux que je rencontre chaque jour. Je n'ai pas réussi à trouver comment pourrait se formuler une enquête statistique rigoureuse sur la question. Je ne peux que citer quelques cas qui me semblent typiques de situations courantes.

Antoine vint me trouver à la sortie d'un cours ; il ne comprenait pas la limite infinie d'une fonction $f(x)$. Après quelques minutes, un peu lasse, je lui demande de calculer $f(1000)$: il en était incapable ! Chaque année, dans un amphithéâtre de 700 personnes, le nombre de ceux qui ne savent pas calculer la valeur numérique d'une expression algébrique pour des valeurs données de la variable est énorme (peut être 200). Je ne parle pas des erreurs que je rencontre couramment dans les copies :

$3 \times 0 = 3$ (car "zéro, ce n'est rien !")

$\frac{3}{0} = 3$ (pour la même raison)

$(3ab)^3 = 3ab^3$

$\frac{2x+3}{2x+5} = \frac{3}{5}$ (on simplifie par $2x$)

$f(x) = 3x + 6 = x + 2$ (confusion fonction-égalité)

$\frac{0}{4}$ est "impossible"...

D'autres erreurs viennent de mauvaises connaissances de base en français, me semble-t-il. Déterminer la ou les inconnues d'un problème concret donne lieu aux réponses les plus fantaisistes[4] et, de façon générale, comprendre une question concrète s'avère bien difficile.

Tout cela, je le crois, peut se corriger à condition de prendre *un nouveau départ*.

Plus inquiétante est la catégorie d'auditeurs qui se disent "forts" dont j'ai parlé au début. Pour moi, il s'agit de personnes qui se font illusion, souvent en travaillant beaucoup, mais qui apprennent "par cœur" les solutions sans les comprendre vraiment. Je citerai deux cas types.

Bernard me félicite à la sortie d'un cours sur primitives et intégrales : "J'ai tout compris, et pourtant, je ne sais pas ce que c'est qu'une dérivée....".

4. Je regrette vivement l'habitude qui s'est instaurée, contrairement aux programmes, de donner, dans les sujets de baccalauréat, les inconnues et leur signification, notamment en ce qui concerne les programmes linéaires au Baccalauréat G. Les vraies difficultés sont ainsi escamotées.

Il avait même "compris" ma phrase d'introduction : "Si vous ne savez pas ce que c'est qu'une dérivée vous ne pouvez suivre ce cours !"

Quand à Claude, il travaille follement, mais s'avère tout à fait incapable de traiter un problème nouveau. Je découvre sa "méthode" à l'occasion de l'étude d'une fonction trinôme. Il connait le "plan d'étude" sur lequel j'insiste toujours ; il sait dériver une fonction trinôme, mais il a appris par cœur les limites, la forme du tableau de variations et celle de la courbe. Il fait même le tableau de valeurs pour le tracé de la courbe. Avec un choc, je m'aperçois que sa courbe (peu soignée par ailleurs !) ne passe par aucun des points dont les coordonnées figurent sur le tableau de valeurs, bien qu'elle ait une allure générale exacte. Claude a appris par cœur un plan et des résultats, y compris la forme de la courbe, mais ne s'est jamais demandé comment les parties du plan se relient entre elles ; pour lui la dérivée ne servait à rien (sinon à satisfaire son professeur !).

Mes essais[5]

Depuis une quinzaine d'années et plus, je propose sous des formes diverses, des "mises à niveau". Au départ, je pensais qu'il n'était besoin que d'une "remise dans le bain" et que s'exercer une ou deux heures par semaine sur les fondements devrait suffire à les remettre en mémoire. Ceci est vrai pour certains, et je propose des "quarts d'heure" facultatifs, liés aux cours d'amphithéâtre, à ceux qui peuvent avoir simplement oublié vocabulaire et méthodes.

Mais pour les autres, il s'agit - je le vois de plus en plus - d'un mauvais départ dès l'école primaire... Il faut refaire l'itinéraire qui n'a jamais été fait, même si, par des phénomènes dont Claude représente la caricature, la personne a réussi à faire suffisamment de mathématiques pour parvenir au baccalauréat, voire au delà.

Dominique[6] vient de m'en fournir un exemple. Pour redécouvrir les représentations graphiques dans un système d'axes, je propose, en "activité préliminaire" une réflexion sur les échelles[7] :

"Quelle distance vraie représentent 5 cm :

a) Sur mon plan de Paris (échelle 1 cm = 250 m),

b) Sur ma carte du monde (échelle 1/80 000 000) ?"

---

5. J'ai publié les cours ainsi proposés chez Delagrave, sous le titre de "FORT EN MATH avec un peu de travail", deux volumes, "Mise à niveau 3e" et "Mise à niveau Terminales économiques", 1993 et 1994.

6. Dominique est l'exemple type des personnes que je voudrais aider. Elle a environ 40 ans, et s'est toujours considérée comme "nulle en math".

7. Fort en maths, Mise à niveau 3°

Pour Dominique comme pour la plupart des 20 élèves qui suivent le cours, le a) n'a pas posé problème. Par contre, presque personne n'a su faire le b). A l'ensemble des élèves j'ai expliqué - et cela a paru leur suffire ! - que cela signifiait que 80 000 000 cm étaient représentés par 1 cm, ou 80 000 000 dm par un dm. Mais Dominique est revenue à la charge : elle ne comprenait pas que la réduction puisse être indépendante de l'unité choisie. Nous avons eu une longue discussion sur les réductions ; c'est peut-être en parlant de photocopies réduites que le "déclic" s'est fait en elle, du moins je l'espère. Il s'agit de notions qu'un bon élève de CM2 doit avoir...

Je propose donc un départ à zéro, avec chaque semaine une séance[8] de deux heures en petit groupe, un court devoir à rendre et de nombreux exercices à faire. Voici les points sur lesquels j'insiste.

Prendre un nouveau départ

La première étape, la plus difficile pour certains, et d'accepter d'avoir des lacunes, de passer de la catégorie de ceux qui se disent "forts" à celle de ceux qui savent qu'il leur manque beaucoup. Bien au delà des mathématiques, cette attitude fondamentale est celle qui fait les vrais savants ; on est souvent frappé de constater que les personnalités de haut niveau comme les membres de l'Institut sont souvent celles qui sont les plus capables de reconnaître ce qu'elles ne savent pas et d'écouter des personnes bien moins qualifiés leur donner des informations sur des points précis.

Cette étape, instinctive pour certains, est un grave obstacle pour d'autres. Devant un auditoire nombreux, je n'ai guère de moyens d'y aider. Des "tests" de début d'année font prendre conscience à certains de leurs lacunes, mais c'est surtout à l'occasion d'entretiens personnels, souvent bien tard, en examinant une copie d'examen, que j'arrive à signaler à l'auditeur ce qui lui manque, et à quel niveau il doit travailler.

Garder son bon sens

La plupart des élèves ont l'impression de "changer de planète" en faisant des mathématiques. J'ai aimé l'exemple de Catherine[9] qui, confrontée aux pourcentages, était incapable de donner la formule, mais cependant trouvait les résultats exacts ou approximativement exacts. Elle ne savait pas formaliser, mais gardait les pieds sur terre, et déterminait ce que nous appelons couramment un ordre de grandeur. Hélas ! c'est bien souvent le contraire qui se

8. Exemples des intitulés de séances : opérations dans les nombres, usage de parenthèses, puissances entières, monômes, polynômes, équations de 1er degré, pourcentages...

9. Dans l'article cité de Francis SLAWNY.

produit ; les auditeurs que je rencontre apprennent des formules et les appliquent plus ou moins bien, sans faire la relation entre leur résultat et le problème posé.

Emilie est venue se plaindre de sa note d'examen. Dans son esprit, elle méritait au moins 15 et je lui avais attribué 2 ! Nous étions bien sur des planètes différentes ! Voici l'une des questions : dans un restaurant, une personne sur 3 choisit un plat de pommes de terre frites ; il vient 3 000 personnes par jour ; combien faut-il préparer de portions de pommes de terre frites pour avoir 95 chances sur 100 de satisfaire la clientèle, en supposant que le nombre de portions suive une loi normale ? Emilie avait répondu 2,33, valeur exacte de la variable centrée réduite qu'il fallait, bien entendu, transformer, et n'admettait pas son erreur. Après discussion, un "déclic" s'est fait en elle : 2,33 n'est pas entier, il faut un entier, donc, réponse : 2 ! J'ai passé une heure avec elle, mais je ne suis pas sûre qu'elle soit sortie convaincue ; pourtant, si je l'avais rencontrée dans ce restaurant, sans l'étiquette mathématique, elle aurait certainement répondu qu'il fallait 1000 portions !

Voici une autre expérience, collective cette fois. Un sujet d'examen de statistique consistait à déterminer une droite de régression représentant le pourcentage de la population active française employée dans l'agriculture, en fonction du temps. La corrélation (négative !) était satisfaisante sur la période donnée et la plupart ont déterminé la droite. Mais une question "vicieuse" suivait : "peut-on utiliser l'équation de cette droite pour prévoir le pourcentage d'agriculteurs en 2030 ? Si oui, donnez la prévision". L'équation donnait, en 2030 : -6%. Tel est le prestige des mathématiques qu'à peine 10% des élèves ont déclaré que l'équation de la droite serait inutilisable et que le pourcentage d'agriculteurs ne continuerait pas à baisser linéairement. Quelques uns, sans se poser de question, ont écrit "-6%". D'autres ont dit que ce ne pouvait être négatif, et que donc il y aurait 0% d'agriculteurs en France en 2030 sans se demander comment les Français se nourriront ; d'autres, allègrement, ont traduit : soit 6% d'agriculteurs (les signes "-" ne servent à rien !) soit une diminution du pourcentage d'agriculteurs de 6% (changement inconscient de variable !). C'est probablement le même mécanisme qui fait que lorsqu'on parle d'analyse combinatoire ou de calcul des probabilités, les élèves se croient obligés d'écrire des C_n^p , même si cela n'a rien à voir avec la question - ou que certains éprouvent le besoin de désigner par des lettres, en algèbre linéaire, même des nombres connus - quand ce ne sont pas des noms communs.

Aussi systématiquement que possible, mes exercices ont un départ concret. Je ne cherche pas à former de futurs agrégés de mathématiques, mais des personnes qui, devant un problème pratique, sauront le "traduire" en langage mathématique, le résoudre (éventuellement avec l'aide d'un ordinateur) et surtout interpréter le résultat. J'insiste pour qu'aucune "lettre" (représentant une variable, une inconnue, un ensemble, une proposition) ne soit écrite sans être définie, et pour que les résultats soient formulés en langage courant (en espérant qu'Emilie sursautera si elle écrit que le restaurateur doit préparer 2,33 portions !).

Chercher des exercices

Nous l'avons vu, mon Claude caricatural (mais réel) a des émules. Je suis sans cesse assaillie d'élèves qui me demandent des corrigés, ou qui, à la sortie d'un cours, souhaitent compléter leurs notes car il leur manque une ligne de la "bonne parole" que j'ai prononcée (et souvent, je le vois sur leurs cahiers, bien d'autres lignes plus utiles qu'il ne leur est pas venu à l'idée de noter). Beaucoup, en tout cas, se font des illusions, parce qu'à force de consulter les solutions, ils "savent" "avec leur mémoire" faire l'exercice , ce qui les laisse démunis devant un autre exercice semblable.

Même avec des adultes, je suis obligée d'insister - et pas toujours avec succès - pour qu'ils acceptent de rester longuement avec un énoncé et une feuille blanche, sans aller chercher la solution toute faite. En petits groupes d'exercices dirigés, je distribue souvent des énoncés, et je demande à tous de chercher ; je les laisse parfois un quart d'heure, en circulant dans les rangs, sans que rien ne se passe au tableau. Hélas ! force est de constater que certains perdent entièrement ce quart d'heure à attendre le moment où la solution leur sera donnée. Or, je ne crois pas qu'on puisse comprendre un exercice si on ne l'a pas cherché (si l'on n'a pas "séché" dessus !). J'essaye de donner un mode d'emploi des corrigés : à ne regarder qu'au bout d'au moins 10 minutes, et seulement d'un coup d'œil, pour parvenir à démarrer, puis, plus tard, pour se corriger.

Se corriger en respectant sa propre forme d'esprit.

Mais, si je n'aime pas les corrigés, bien que j'en propose toujours dans mes livres, c'est aussi parce qu'ils sont forcément réducteurs. L'auteur du corrigé a une méthode, qui correspond à sa forme d'esprit, mais celle de l'élève peut être différente et cependant aussi performante[10]. Même si l'on propose plusieurs méthodes, il n'est pas certain qu'on guidera l'élève dans la direction qui lui convient le mieux. Je pratique, avec les auditeurs du CNAM, l'auto-correction ; ils arrivent avec un devoir fait à la maison ;

10. Avez-vous eu l'occasion de comparer les dizaines de méthodes (exactes) qui permettent de simplifier une expression algébrique d'un niveau de 5^e ou 4^e ?

lorsque je corrige au tableau, ces auditeurs gardent leur devoir et je les invite à prendre le rôle du professeur. J'ai grand mal à obtenir qu'ils ne barrent pas purement et simplement les raisonnements ou calculs qui aboutissent à un résultat faux, pour recopier en rouge "ma" solution à côté. Ce n'est que par une longue insistance que j'obtiens qu'ils jouent à ce que j'appelle le petit jeu "chercher l'erreur", et donc qu'ils découvrent ce qu'il y a de juste dans leur devoir et où ils se sont trompés. Or, je ne crois pas qu'un progrès soit possible si l'on ne découvre pas ses erreurs là où elles sont; ou en revient à apprendre par cœur une solution, peut-être bonne, mais qu'on n'a pas fait sienne et qu'on ne saura appliquer dans un cas un peu différent.

Le soin

Quand on regarde un devoir rendu par Dominique, celle dont j'ai parlé plus haut, on peut percevoir ce qui fait qu'elle est si faible en mathématiques : tout est écrit n'importe comment, les lignes s'entrechoquent, aucun signe n'indique à quelle question elle répond et les sous-entendus (non écrits) représentent à peu près le double de ce qu'elle a écrit.

Je suis frappée du dédain des adultes (mais je crains que l'habitude ne se soit prise bien jeune) pour les "petits moyens" : prendre une règle, un crayon à papier et un papier quadrillé pour faire un graphique, indiquer les numéros des questions que l'on traite, ne rien écrire que l'on n'aie défini... Je les invite souvent à relire leurs écrits 8 ou 15 jours après pour constater ce qui est illisible pour tout autre qu'eux-mêmes et au moment où ils écrivent (quel danger représente le "je me comprends" que l'on entend si fréquemment !). Je compare souvent leur attitude à la mienne... lorsque je fais la cuisine en négligeant de mesurer les quantités, les temps (méfiez-vous si vous venez prendre un repas chez moi !).

*

Voici quelques unes de mes constatations ! Je suis loin d'avoir trouvé la solution, même si, je l'espère, j'ai pu aider quelques élèves, au long des années, à sortir de leur soi-disant "nullité". Je serais heureuse de confronter ces réflexions avec celles de mes collègues.

Il me semble que nous ne devons pas, en tout cas, baisser les bras en laissant de coté des élèves classés "irrécupérables". D'une part, ils sont certainement récupérables, d'autre part, si nous ne les aidons pas, c'est leur vie entière à laquelle il manquera quelque chose d'important. Je ne prétends pas que le raisonnement mathématique soit la seule manière de penser, loin de là... notre liberté lui échappera toujours ; mais je prétends que pour vivre et travailler aujourd'hui, il faut être capable de logique ; il faut savoir partir d'une réalité concrète, la comprendre et la traduire (ou en traduire une partie !) sous une forme logique ou mathématique, souvent la mettre sur ordinateur... et réfléchir aux solutions avec un esprit critique. Il faut aussi être capable de communiquer, de mettre ses idées en ordre.

Tout cela peut être aidé par une bonne formation mathématique... même si nos élèves ne sont pas tous destinés à passer leur vie à calculer des intégrales triples. C'est pourquoi notre tâche est passionnante.