A PROPOS DE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Philippe Lombard
(Irem de Lorraine)

Au travers des deux tentatives de réponse parues dans le numéro 398, j'ai pris connaissance de l'«**Avis de recherche n° 27**» : «*Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposition ne sont-ils pas, en fait, un même mode de raisonnement ? Existe-t-il des démonstrations où seul un des deux types de raisonnement convient ?* ». J'aimerais vous faire part de quelques éléments de réflexion sur la première question qui ne me semblent pas avoir été suffisamment pris en compte dans les contributions précédentes.

1 — Le principe de contraposition

Rappelons d'abord sur un exemple ce que l'on entend habituellement par notion de *contraposée*. Le théorème de Pythagore :

(1) Un triangle ABC rectangle en C vérifie $a^2 + b^2 = c^2$, [A ⇒ B]

admet pour formulation dite "contraposée" :

(2) Un triangle tel que $a^2 + b^2 \neq c^2$ n'est pas rectangle en C.[nonB ⇒ nonA]

Ce deuxième énoncé n'a évidemment rien à voir avec la "réciproque de Pythagore", il ne fait que tirer "négativement" la conséquence de l'énoncé direct. On peut appeler "principe de contraposition" le raisonnement élémentaire qui consiste à passer d'un énoncé "direct" de type [A $\Rightarrow$ B] à sa *formulation contraposée* de type [nonB $\Rightarrow$ nonA].

Sans aborder pour le moment la question de justifier ce principe, il convient impérativement de garder à l'esprit la portée relativement limitée d'un tel mécanisme. En effet, de la même façon que (2) est une traduction "en négatif" de (1), on peut voir que (1) s'obtient en contraposant l'énoncé (2). En réalité, les formulations (1) et (2) sont des formulations *équivalentes* du théorème de Pythagore. C'est-à-dire qu'en toute rigueur il ne convient pas de parler de "la contraposée du théorème de Pythagore" mais de "la contraposée de l'énoncé classique du théorème de Pythagore". Le sentiment qui résulte de la différence est presque essentiellement de nature esthétique et provient surtout de l'habitude, de la tendance, à éviter des formulations négatives inutiles, voire de la méfiance vis-à-vis des doubles négations. Il a d'ailleurs fait couler beaucoup d'encre intuitivo-constructiviste, mais ce n'est pas ici notre sujet... Retenons simplement que la notion de contraposition n'est que *relative aux formulations* des propriétés mais ne modifie pas, dans la pratique habituelle, le *contenu* de celles-ci.

Que doit-on dès lors appeler "raisonnement par contraposition"? Il ne peut s'agir de démontrer un énoncé de type [A $\Rightarrow$ B] en faisant (par exemple) appel à "la contraposée du théorème de Pythagore", ce qui n'a qu'un sens conventionnel et ne recouvre aucune distinction au niveau logique. Il s'agira en revanche de démontrer *d'abord* l'énoncé [nonB $\Rightarrow$ nonA] avant d'en déduire (au besoin, et grâce au principe de contraposition) une *formulation de la propriété* qui corresponde cette fois à l'énoncé [A $\Rightarrow$ B]. Notons donc une première conclusion qui atténue quelque peu la portée de l'expression "raisonner par contraposition" : si je décide de démontrer le théorème de Pythagore sous sa forme (1) *en raisonnant par contraposition*, cela signifie tout au plus que je vais m'efforcer de démontrer l'énoncé (2), puisque je ferai appel au "principe de contraposition" pour passer à la formulation (1)...La question posée par "l'Avis de recherche" revient dans ces conditions à celle-ci : est-ce qu'un tel raisonnement est, en fait, un raisonnement par l'absurde ? et aussi à celle-là: un raisonnement "par l'absurde" peut-il toujours se ramener au seul "principe de contraposition"?

II — Le principe de non-contradiction

Je partirai de l'exemple déjà évoqué dans le premier commentaire de cet "Avis de recherche" et qui se rapporte à la démonstration de l'énoncé suivant :

" si le carré d'un entier n est pair, alors n est pair ".

Nous le formaliserons de la façon suivante :

$$n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair} \qquad [\,A \Rightarrow B\,].$$

Envisageons pour commencer trois types de démonstrations :

R1 — *type direct* : « Je suppose que 2 divise $n^2 = n\times n$. Comme un nombre premier qui divise un produit divise nécessairement un des facteurs (variante du lemme de Gauss), il s'ensuit que 2 divise n . cqfd. »

R2 — *type contraposé* : «D'après le principe de contraposition, il suffit de montrer que [n impair $\Rightarrow n^2$ impair]. Supposons donc $n = 2k + 1$ et calculons n^2 : $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Cette expression montre immédiatement que n^2 est impair. cqfd. »

R3 — *type "par l'absurde I "* : «Supposons que n soit impair. On peut poser $n = 2k + 1$, on obtient l'égalité : $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, qui montre que n^2 est impair. Cela est contraire à l'hypothèse, donc n est nécessairement pair. cqfd. »

Ces trois raisonnements sont corrects et il n'y a évidemment guère de différence entre le deuxième et le troisième dans la mesure où la contradiction mise en lumière n'est autre que "nonA". Dès lors ces deux dernières démarches se résument à mettre en évidence que [nonB $\Rightarrow$ nonA], et la seule nuance tient dans le fait que les raisonnements ne font pas appel au même principe pour conclure et se légitimer. Le second repose sur le "principe de contraposition" alors que le troisième en appelle à un "principe de non-contradiction" permettant de fonder le raisonnement "par l'absurde". Notons simplement au passage qu'il n'y a, en réalité, aucune supériorité de l'un sur l'autre : on peut tout au plus remarquer que le troisième raisonnement peut apporter une certaine légitimation à la démarche de contraposition elle-même, en la rapportant à une façon de penser qui peut paraître moins "formelle", au sens où Bkouche emploie ce mot dans sa réponse du n° 398.

Mais remarquons aussi que le "principe de contraposition" peut être justifié à partir du "principe de non-contradiction" par un raisonnement qui est précisément du type R3... Démontrons en effet que, *sachant* [A$\Rightarrow$ B], *nous aurons* [nonB $\Rightarrow$ nonA] :

R3' — *type "par l'absurde I "* : « Supposons [nonB] et raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons [non[nonA]], c'est-à-dire [A]. Comme [A $\Rightarrow$ B], nous en déduisons [B], ce qui est contraire à l'hypothèse. cqfd.»

III — Les "faux" raisonnements par l'absurde

Considérons maintenant la variante suivante de l'énoncé R_3 :

R_4 — *type "par l'absurde II "* : « Supposons n impair. Alors $n + 1$ est pair, et il en va de même de son carré : $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Or, par hypothèse, n^2 est pair, si bien que $n^2 + 2n + 1$ est nécessairement impair, ce qui est absurde. Donc n est nécessairement pair. cqfd.»

Malgré le côté un peu simpliste dû à la situation retenue, on voit que la contradiction ne porte plus cette fois sur le couple [A ; nonA], mais *sur une propriété nouvelle* : la parité de $n^2 + 2n + 1$. Le raisonnement se schématise désormais sous la forme :

1°) [nonB $\Rightarrow$ C] ,
2°) [A $\Rightarrow$ nonC] ,
3°) impossibilité de conserver [nonB] à cause du "principe de non-contradiction".

Il n'est plus légitime de confondre purement et simplement cette nouvelle démarche (qui contient le raisonnement R_3 comme cas particulier) avec le raisonnement de "type contraposé" : c'est indiscutablement la réunion d'un raisonnement de "type direct" et d'un raisonnement de "type contraposé" qui provoque la rencontre de deux propositions contradictoires... Nous admettrons pour le moment que nous avons fait le tour des possibilités et nous les résumerons en disant :

> « Un raisonnement consiste à prouver [A $\Rightarrow$ B] "par l'absurde" s'il revient à trouver une propriété [C] pour laquelle on puisse établir à la fois le fait que [nonB $\Rightarrow$ C] et [A $\Rightarrow$ non C], de façon à conclure que [nonB] est impossible au nom du "principe de non-contradiction".»

Bien qu'il y ait là une certaine dose de "formalisme", toujours au sens où Bkouche emploie ce mot dans la réponse déjà citée tentons dès à présent de tirer une première morale de l'histoire...

Comme on le voit, un raisonnement "par l'absurde" ne fait aucunement appel au "principe de contraposition" pour se légitimer, il repose entièrement sur le "principe de non-contradiction". On peut cependant - si on le désire - le justifier à l'aide du "principe de contraposition" en le transformant en un raisonnement complet de "type contraposé". En effet, en appliquant le dit principe à l'étape [A $\Rightarrow$ nonC], on sait donc que [(non non)C $\Rightarrow$ nonA] et on dispose alors de l'enchaînement :

$$[\text{nonB} \Rightarrow \text{C}] \text{ suivi de } [\text{C} \Rightarrow \text{nonA}]$$

qui permet donc de prouver que [nonB ⇒ nonA] .

Mais allons plus loin: il suffirait de faire usage du même "principe de contraposition" pour renverser tous les énoncés concernés et obtenir une formulation directe du raisonnement prouvant que [A ⇒ B]... Et inversement, toute démonstration simple en (au moins) deux temps du type :

[hypothèse H] ⇒ [étape intermédiaire E] ⇒ [conclusion C]

peut tout aussi bien être *racontée* comme une démonstration de "type contraposé" ou comme une démonstration "par l'absurde", et ceci au seul prix d'un passage au contraposé de l'un des chaînons [H ⇒ E] et [E ⇒ C] !

C'est que, rappelons-le, la contraposition d'une proposition n'est en réalité qu'une notion relative à des choix privilégiés d'énoncés de référence. Et dès lors le seul intérêt des choix opérés réside dans l'optimisation des énoncés, dans la minimisation des négations empilées, dans la volonté d'éviter des doubles négations sujettes à cautions... Mais *sur le fond*, nous n'avons eu affaire jusqu'ici, au mieux, qu'à des raffinements d'ordre esthétique et, au pire, à des arguties de profs de maths destinées à faire croire qu'il y aurait des obligations à "raisonner" de telle ou telle manière, alors qu'il ne s'agit que de *rédiger une démonstration* selon tel ou tel procédé plus ou moins recevable par le maître ! La question est beaucoup plus grave qu'il n'y paraît : *à quoi bon faire croire que l'on apprend à raisonner à un élève si l'enseignement revient tout bonnement à le noyer sous des exigences dérisoires, dont la justification impossible est un simple galimatias pédant qui n'a pas grand chose à voir avec le but recherché ?*

Quittons un instant la salle de classe pour rejoindre le monde "aristotélicien" où les mots donnent souvent un « sens aux choses » et où les raisonnements les plus sophistiqués se coulent obligatoirement dans le moule de la langue naturelle. Il n'est pas besoin de fréquenter longtemps les cours de récréations pour recevoir les exemples paradigmatiques de "raisonnements par l'absurde" qui nourrissent, de génération en génération, l'inconscient logique collectif :

R(2-3)" — « Si ma t... , elle serait mon oncle... ».

Ou, légèrement plus complexe :

R4' — « Si ma t... , on l'appellerait mon oncle... » !

La *vox populi* n'a pas besoin de recourir à «l'algèbre de la logique» pour s'inventer des archétypes de démonstration et même pour en ciseler des formulations elliptiques propres à n'en conserver que les éléments indispensables...

IV — Les "vrais" raisonnements par l'absurde

Revenons au havre de paix du mathématicien offert par les considérations formalisées, car toutes les remarques précédentes ne suffisent pas (heureusement) à répondre à la question posée au départ. Elles ne prennent pas en compte une cinquième démonstration possible de notre exercice de référence :

R_5 — type *"par l'absurde III"* : « Supposons n impair. Alors il existe un entier k tel que : $n - 2k = 1$. Si nous multiplions cette égalité par n , il vient : $n^2 - 2kn = n$; mais comme, par hypothèse, n^2 est pair, le premier membre est divisible par 2… donc le second membre également : n est pair, ce qui est absurde ! cqfd. »

En termes formels, nous avons oublié précédemment une possibilité : celle où la proposition C qui témoigne de la contradiction est la propriété B elle-même… Notez que le raisonnement se généralise au cas où 2 est un premier quelconque si l'on utilise l'identité de Bezout. Vous pouvez d'ailleurs (à titre de récréation et seulement si le problème vous préoccupe encore) réaliser aussi le même phénomène à propos de la sœur de votre propre mère… Vous n'utiliserez évidemment pas le théorème de Bezout, mais plutôt l'irréfutable principe bien connu selon lequel une énormité quelconque vous fait parfois vous exclamer : « … à ce compte-là, moi je suis le président de la République ! » ; vous direz :

R_5' — « Si ma t… , elle serait l'Impératrice Joséphine !… ».

Bien que la démarche soit cette fois plus difficile, on voit ici encore que la contradiction ne porte plus sur un télescopage au niveau de l'énoncé [A] mais résulte de la perplexité induite — par poursuite implicite du raisonnement — au niveau de la proposition [B] … Cela étant, il est clair que l'aboutissement d'une telle démonstration n'est possible que parce que nous avons en fait utilisé non seulement [nonB], mais aussi [A] pour obtenir [B]. Et cet exemple nous rappelle donc d'abord que nous devons modifier notre schématisation générale en disant :

> « Un raisonnement consiste à prouver [A ⇒ B] par l'absurde quand il revient à trouver une propriété [C] pour laquelle on puisse établir à la fois [[nonB et A] ⇒ C] et [[nonB et A] ⇒ non C], de façon à conclure que [nonB] est impossible par appel au "principe de non-contradiction".»

Cette démarche est bien "légitime" (au nom du principe de non-contradiction) car la rencontre de [C] et de [nonC] amène, en l'occurrence, à conclure que la proposition [A et nonB] est fausse, donc que [A] et [nonB] ne peuvent être vraies simultanément ; donc que le fait de supposer [A] interdit [nonB], c'est-à-dire que [A] *oblige bien* [B] *à être vérifiée*.

En revanche, l'exemple du raisonnement R_5 (qui montre que la contradiction peut naître au niveau de [B] et [nonB]) met en évidence qu'il y a là un *schéma de pensée* particulièrement difficile à maîtriser. Comment, en effet, faire comprendre à un élève le mécanisme d'une démarche d'apparence aussi paradoxale que celle-ci :

1°) « Je viens de prouver que *n* est pair, mais cette démonstration est *irrecevable* parce qu'elle repose sur l'hypothèse que *n* était impair ! »,
2°) « Cela étant, *le seul fait que j'aie pu établir* cette démonstration irrecevable prouve que *n* est pair, car il ne peut pas être impair !! ».

En d'autres termes : le raisonnement qui établit [B] doit être rejeté comme preuve au premier degré mais suffit pour édifier une preuve au second degré…

Non sans leur faire remarquer qu'il y a là, cette fois, une *véritable motivation à l'apprentissage du raisonnement*, je laisse le soin aux pédagogues de proposer des solutions idoines à ce problème didactique. Je terminerai simplement en signalant que l'obstacle peut être formulé de façon tout à fait formelle : contrairement aux exemples du paragraphe III, les raisonnements du type de celui de R_5 ne me semblent pas *pouvoir être remplacés par des raisonnements directs* par simple application du "principe de contraposition".

En effet, à partir du moment où est apparu le télescopage [B et nonB], tout le champ logique induit par l'hypothèse [A et nonB] devient contradictoire. On peut évidemment "faire semblant" de ne pas en tenir compte pour rédiger artificiellement des cheminements de type contraposé, mais il devient impossible d'échapper à l'envahissement de l'univers par cette contradiction qui est venue "court-circuiter" le raisonnement. C'est, au fond, cela la véritable notion de "raisonnement par l'absurde", et celle-ci ne se laisse malheureusement pas apprivoiser par le seul "principe de contraposition" : le monde est brutalement livré à la perplexité la plus complète, tous les paradoxes deviennent permis. Et, dans ces conditions, les dynasties mêmes pourraient bien vaciller, victime des soupçons sans doute les moins fondés…

V — Applications…

Pour illustrer les considérations précédentes et tenter d'aller plus loin, nous pouvons nous attacher à un autre exemple (évoqué lui aussi dans les réponses précédentes) : « Le double d'un carré ne peut être un carré ».

Nous commencerons par chercher une présentation de l'énoncé susceptible de "coller" au genre de formalisation que nous avons utilisé jusqu'ici et nous traduirons donc l'exercice sous la forme :

" si n est un carré, alors $2n$ n'est pas un carré "

ou encore :

n carré $\Rightarrow$ $2n$ non carré [A $\Rightarrow$ B] .

Fondons (dans un premier temps) nos raisonnements sur les propriétés de décomposition d'un nombre en facteurs premiers et appelons $\varepsilon_2(m)$ l'exposant du nombre premier 2 dans la décomposition d'un nombre quelconque m. Il est facile de voir que nous disposons du théorème suivant :

« Si m est un carré, alors le nombre $\varepsilon_2(m)$ est pair » < théorème Th >

Mais on notera (cf. le § I) que ceci n'est qu'une *formulation possible* du théorème < Th > ; la phrase contraposée qui consiste à dire :

«Si le nombre $\varepsilon_2(m)$ est impair, alors m n'est pas un carré »

exprime exactement la même propriété. Si bien que l'appel à < Th > peut être fait sans plus de commentaires sous l'un ou l'autre de ces deux énoncés...

Nantis du bagage <Th>, nous pouvons maintenant dégager un "raisonnement" qui fournit une solution à l'exercice et dont la "clef" est simplement le fait que $\varepsilon_2(n)$ et $\varepsilon_2(2n)$ ne peuvent être de la même parité puisque $\varepsilon_2(2n) = \varepsilon_2(n) + 1$ (formule < F >). A partir de là nous pouvons aisément *rédiger* l'équivalent des quatre schémas de démonstration rencontrés aux §.II-III :

R'1 — *type direct* : « Soit n un carré, le théorème < Th > implique que $\varepsilon_2(n)$ est pair. La formule < F > permet alors de voir que $\varepsilon_2(2n)$ est impair, donc le théorème < Th > permet d'affirmer que $2n$ n'est pas un carré. cqfd. »

R'2 — *type contraposé* : « Par contraposition, il suffit de montrer que si $2n$ est un carré alors n n'est pas un carré. Supposons donc que $2n$ soit un carré ; d'après le théorème < Th > on sait que $\varepsilon_2(2n)$ est pair et la formule < F > permet alors de voir que $\varepsilon_2(n)$ est impair. Donc le théorème < Th > permet d'affirmer que n n'est pas un carré. cqfd. »

R'3 — *type "par l'absurde I"* : « Supposons que $2n$ soit un carré. Le théorème < Th > implique que $\varepsilon_2(2n)$ est pair et, d'après la formule < F >, on voit que $\varepsilon_2(n)$ est impair. Ceci implique donc (d'après le théorème < Th >) que n n'est pas un carré et cela est contraire à l'hypothèse, donc $2n$ ne peut pas être un carré. cqfd. »

R'4 — *type "par l'absurde II"* : « Supposons que $2n$ soit un carré. Le théorème < Th > implique que $\varepsilon_2(2n)$ est pair. Or n est lui aussi un carré et $\varepsilon_2(n)$ est donc pair, ce qui est absurde compte tenu de la formule < F >. cqfd. »

Sans nous préoccuper du côté "littéraire" de ces rédactions (leur lourdeur vient en grande partie du fait que j'ai cherché à suivre un cheminement aisément formalisable) il est clair — répétons-le — que ces quatre énoncés sont indiscutablement "corrects" au niveau du raisonnement et ne sont en réalité que des "mises en musique" différentes d'un *même* raisonnement. Il est curieux de voir émerger actuellement des débats au sein du corps professoral pour chercher à savoir si l'un plutôt que l'autre doit être préconisé, voire pour décréter de façon imprudente que celui-ci ou celui-là est carrément maladroit... Le nombre des élèves capables d'en rédiger correctement un est-il si énorme pour qu'il faille, en plus, les sélectionner arbitrairement sur le choix qu'il ont retenu ? Apporte-t-on vraiment quelque chose *à ceux qui ne trouvent pas le fond du raisonnement* en leur rendant la tâche encore plus complexe dans un labyrinthe purement formel ?

Ne serait-ce pas plutôt un "signe des temps" ? Il y a une vingtaine d'années, ceux qui réfléchissent sur le contenu de leur enseignement étaient agités de polémiques sur l'importance des "structures". Aujourd'hui, l'ambition de transmettre "la" mathématique ne fait plus recette, mais elle a été remplacée par une nouvelle mode : l'enseignement des mathématiques n'a d'autre but que "d'apprendre à raisonner"... Soit. Mais quels en sont donc les "moyens" ? Autant on peut trouver légitime qu'il soit formateur d'inciter *les élèves qui ont trouvé* un raisonnement à le *rédiger* de façon correcte. Autant il me semble dangereux de se mettre à légiférer à propos de considérations secondaires sur lesquelles — pourquoi ne pas le reconnaître ? — la plupart des professeurs eux-mêmes n'ont pas vraiment les idées claires !

VI — Un contre-exemple

Mais revenons à notre exercice < n carré $\Rightarrow$ $2n$ non carré >... Je ne connais pas de démonstration bâtie sur le schéma R5 ou qui soit, à tout le moins, effectivement construite selon la définition retenue au §. IV. Cela pourrait sans doute faire l'objet d'un nouvel "Avis de recherche"...

Bien évidemment, il est difficile de ne pas penser à :

R6 — *type "par l'absurde IV"* : «Supposons que n et $2n$ soient tous deux des carrés : $2n = q^2$ et $n = p^2$. En divisant, il vient : $2 = (q/p)^2$. Or ceci est absurde car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. cqfd »

Je ne m'avancerai pas beaucoup en affirmant que cette démonstration sera préférée par la plupart des lecteurs à toutes celles qui précèdent. Et on peut même penser qu'elle fait partie de "l'inconscient logique collectif" d'un certain nombre de générations de profs de maths, au point qu'ils se prennent parfois à rêver que les « si ma t… » des cours de récréation soient un jour remplacés par des :

R6' — « Si $2n^2$ était un carré, alors $\sqrt{2}$ serait rationnel !… ».

Au risque de choquer, il convient toutefois d'attirer l'attention sur le fait que *considérer que la démonstration* R6 *est un raisonnement par l'absurde meilleur que les raisonnements précédents* relève de ce qu'il faut bien considérer comme deux demi-escroqueries…

1°) La première est au *niveau formel car ce n'est pas vraiment un raisonnement par l'absurde* : on peut certes faire rentrer R6 dans le cadre défini au paragraphe IV :

- je suppose [[A] et [nonB]] et j'en déduis [C = " $\sqrt{2}$ est rationnel"],
- mais je *sais* d'autre part que [nonC] est vrai, donc je n'ai même pas besoin de rédiger une preuve que [[A] et [nonB]] $\Rightarrow$ [nonC],
- j'ai bien la contradiction qui justifie le raisonnement par l'absurde.

L'ennui est d'abord que cela est un peu "tiré par les cheveux", mais surtout qu'en toute honnêteté nous sommes en réalité en face d'un nouveau schéma de raisonnement bien classique, mais pour lequel le formalisme employé jusqu'ici est assez mal adapté. En effet, ce que nous suivons comme démarche dans R6 se comprend beaucoup mieux sous la forme :

« je suppose que < n carré $\Rightarrow$ $2n$ non carré > est faux

et j'en déduis que < $\sqrt{2}$ rationnel > est vrai ».

Ou si l'on préfère : non[[A] et [nonB]] $\Rightarrow$ [nonC], et l'on voit sous cette présentation que ceci se ramène exactement, *par contraposition*, à l'énoncé :

[C] $\Rightarrow$ [[A] et [nonB]].

Autant dire que R6 a pour strict *équivalent* : « Je sais que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc je ne peux avoir, parmi les entiers, une égalité du type $2p^2 = q^2$ et ceci implique bien que, si un entier n est un carré, $2n$ ne peut être lui aussi un carré.» En d'autres termes: cette pseudo-démonstration "par l'absurde" n'est rien d'autre qu'une des quatre variantes de types R1 à R4 construites autour d'une même idée. Pire: la formulation R6' ne permet même pas de savoir si l'on a choisi une démarche de type R3 ou de type R2, c'est-à-dire si l'on préfère le "raisonnement par l'absurde" ou le "raisonnement par contraposée" !

2°) La seconde "demi-escroquerie", sans doute plus grave, est au *niveau du* *raisonnement car il n'est pas nécessairement «honnête»* : comment R_6 peut-il convaincre, en effet, que l'affirmation :

$$< n \text{ carré } \Rightarrow 2n \text{ non carré} >$$

est bien vraie ? Cela repose sur le fait "connu" que $< \sqrt{2}$ est irrationnel $>$, mais ne venons-nous pas de remarquer que ces deux affirmations sont très proches ? Or elles le sont au point d'être *équivalentes*. Cela n'est évidemment pas grave en soi mais, ici encore, l'honnêteté intellectuelle amène naturellement à se demander *comment on démontre que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel* !

Il est clair que si toutes les démonstrations classiques de cette propriété passaient en fait par le "lemme" : $< n$ carré $\Rightarrow 2n$ non carré $>$ la formulation R_6 ne ferait que cacher la difficulté en renvoyant le lecteur à "ceux qui ont bien été obligés de trouver une démonstration de ce résultat" !

Rassurons-nous... mais le problème n'est alors que provisoirement repoussé : il est tout aussi clair que si *toutes les démonstration connues* reposent sur le théorème <Th> qui nous a servi à établir les premiers exemples de démonstrations, alors les formulations R_1 à R_4 sont largement plus "performantes" que R_6 : elles peuvent fournir, du même coup, une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$!

Concluons : ***il ne vous reste plus qu'à rendre convaincante la démonstration*** R_6... ***en utilisant par exemple l'exercice qui nous a accompagné au long des premiers paragraphes.***