Une recherche au collège : Comment tracer un segment avec une règle trop courte ?

M.Rousselet
Collège G. Duhamel
95220 Herblay

Comme beaucoup de mes collègues, je propose quelquefois à mes élèves des activités de recherches. Voici la dernière en date :

> *Ma salle de classe dispose du matériel standard : une règle graduée de 1 mètre de longueur, un compas, de la craie et ... un tableau noir d'environ 3,50 mètres de longueur.*
> *A la craie, je marque deux points A et B distants d'environ 3 mètres. Comment dessiner exactement le segment [AB] avec ces seuls instruments ?*

A ma connaissance, ce problème est inédit (1). L'idée m'en est venue à la suite de la lecture de l'ouvrage d'**Henri Lebesgue**, *Constructions à la règle et au compas*, mais je n'en ai pas trouvé la solution, qui est due à mon collègue **Jean-François Canet** (voir ci-après). Si la démarche est complexe, les connaissances mises en jeu sont élémentaires. C'est pourquoi j'ai pu pro

(1) Dans le cas contraire, j'aimerais avoir les références du ou des ouvrages qui traitent de cette question.

poser ce problème à des élèves de Troisième dans le cadre d'un "club" de recherche [3].

Les étapes de la recherche

Je vais à présent résumer les étapes de cette recherche, l'idée principale consistant à trouver un point du segment [AB] suffisamment proche de A.

Ces étapes seront présentées sous forme de propositions qui marqueront ainsi la nature de mes aides et suggestions. J'ai tenu à conserver le style quasiment "oral" dans lequel nous avons exprimé nos résultats.

Proposition 1 : Si la distance de deux points A et B est inférieure à L, on peut dessiner la droite (AB).

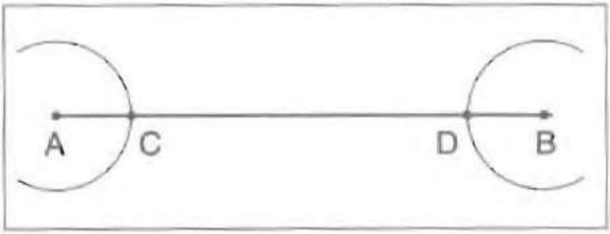
Preuve : Il suffit de dessiner le segment $[AB]$ puis de faire glisser la règle pour prolonger le tracé d'un côté ou de l'autre du segment.

Remarque : En réalité, ce n'est pas une droite qu'on dessinera ainsi, mais un segment qui pourra être aussi long que l'on voudra.

Corollaire : Soit A un point quelconque. On peut dessiner des "droites" qui passent par A.

Proposition 2 : Lorsqu'un segment $[AB]$ a été dessiné, on peut toujours marquer son milieu.

> *Preuve* : Si $[AB]$ est trop grand, on le "raccourcit" en déterminant, avec le compas, deux points C et D du segment tels que $AC = BD$. Le milieu de $[CD]$ est celui de $[AB]$.



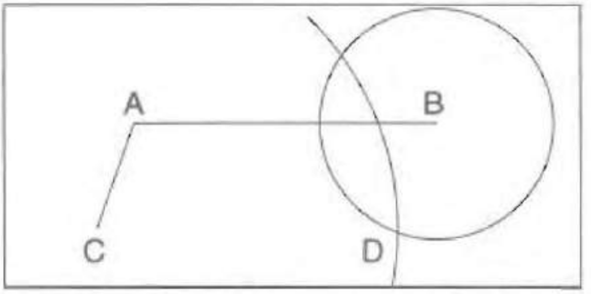
En répétant l'opération, on finira par déterminer un segment central suffisamment petit pour qu'on puisse construire son milieu avec la règle et le compas.

Proposition 3 : Lorsqu'un segment $[AB]$ a été dessiné, on peut toujours dessiner une parallèle à la droite (AB).

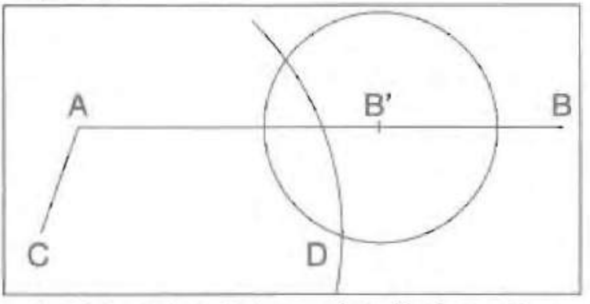
> *Preuve* : Si $[AB]$ est suffisamment court, on peut toujours trouver un point C assez proche de A tel qu'on puisse construire le parallélogramme $ABCD$.

---

(3) La recherche s'est faite en deux séances d'une heure, à une semaine d'intervalle.



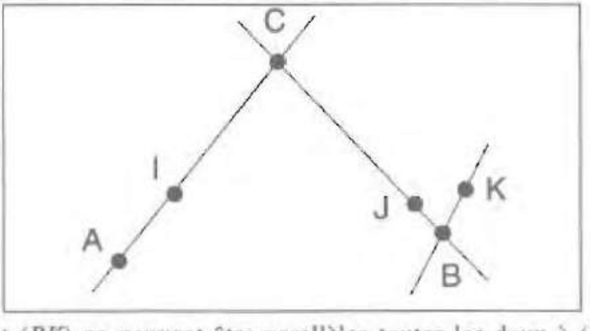
Si $[AB]$ est trop long, on peut toujours marquer un point B' sur $[AB]$ qui nous ramène au cas précédent.



Proposition 4 : Soient A et B deux points distincts. On peut toujours construire une droite qui passe par A et une droite qui passe par B de telle façon que ces deux droites soient sécantes.

Preuve : Marquons un point I suffisamment proche de A et deux points J et K suffisamment proches de B.

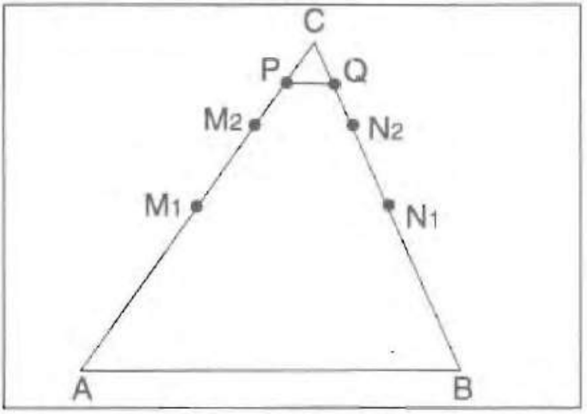
Construisons les trois droites (AI), (BJ) et (BK).



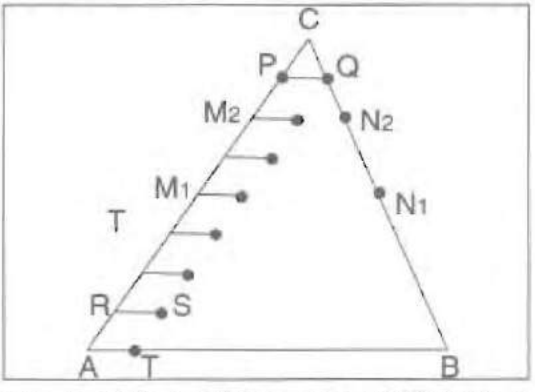
(BJ) et (BK) ne peuvent être parallèles toutes les deux à (AI). L'une d'elles, au moins, rencontre (AI), et c'est la droite cherchée.

Proposition 5 : Etant donné deux points A et B, on peut toujours dessiner le segment $[AB]$.

Preuve : Si $AB \leq L$, le problème est résolu. Supposons donc $AB > L$.
On peut construire deux droites sécantes (AC) et (BC). Construisons alors les milieux M_1 et N_1 des segments $[AC]$ et $[BC]$, puis les milieux M_2 et N_2 des segments $[M_1C]$ et $[N_1C]$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir deux points P et Q suffisamment proches de C.



On peut alors dessiner le segment $[PQ]$. D'après le théorème des milieux (vu en quatrième), ce segment est parallèle à (AB). Quitte à construire de nouveaux milieux, on peut maintenant dessiner une série de parallélogrammes qui "descendent" vers A jusqu'à l'obtention de deux points R et S suffisamment proches de A.



On termine par le tracé du parallélogramme $ARST$. (AT) est évidemment parallèle à (M_1N_1) donc à (AB). T appartient au segment $[AB]$.

Conclusion :

Les élèves ont jugé l'activité difficile mais ils ont été intéressés. L'opposition entre les connaissances utilisées, qui sont du niveau de la quatrième, et la complexité de la démarche les a surpris. Ils ont apprécié la totale liberté qui leur a été laissée pour inventer et proposer et ont eu l'impression, selon le mot de l'un d'entre eux, de faire des "vraies" mathématiques.