

Suite et fin

ou

Le travail exemplaire d'une élève de Première S sur les suites

Alain Mercier (Bordeaux)
et Suzanne

*Le texte «Suite et fin» est de Suzanne,
et les commentaires sont extraits de la thèse présentée
à l'Université de Bordeaux I par Alain MERCIER.*

Suzanne propose à son professeur de mathématiques un texte où elle met en représentation son rapport à la convergence des suites. Celui-ci ne sait pas trop qu'en faire, et le fait lire à un collègue : nous avons ainsi eu accès à un travail personnel exemplaire. Suzanne en effet a trouvé un moyen d'explorer le champ de problèmes que l'enseignement lui avait ouvert, et de mener cette exploration indépendamment de la pauvreté des outils techniques qui lui ont été enseignés.

Le programme de Première S sur les suites numériques est précis : *«L'objectif général est de familiariser les élèves avec la description de situations discrètes simples à l'aide de suites, de mettre ainsi en évidence quelques modes de génération de suites et quelques résultats sur le comportement global et asymptotique des suites.»* [...] l'élève qui écrit le texte ci-dessous explore très précisément ce double champ de problèmes. Nous y trouvons les questions relatives à la rapidité de la convergence que donne la

comparaison des suites de référence entre elles (avec l'étude de cette question d'apparence paradoxale : quelle que soit la rapidité de la convergence, le nombre de pas nécessaire est infini). Nous y trouvons les questions de la relativité des nombres, qui définissent chacun une position sur la droite réelle, [...], et l'exploration de cette sorte d'uniformité de la répartition des nombres que seul le continu peut garantir. Nous y trouvons enfin cette idée naturellement présente : *une suite connaît sa limite*, même si elle n'en connaît pas l'identité. Suzanne [...] se tient strictement dans le cadre de pensée qui lui a été proposé, et qui est apparemment solidement construit, puisqu'il résiste au questionnement en profondeur auquel le soumet cette élève. Nous pourrions donc reconnaître le texte proposé comme l'énoncé d'une *expérience de pensée* a priori sur un champ de problèmes mathématiques. [...] Suzanne a passé le bac avec 19 en mathématiques, puis a été admise en classes préparatoires au Lycée Louis le Grand.

═══════════ Suite et fin ═══════════

Je vais vous raconter mon histoire, tout en tendant, puisque je n'ai rien à faire. Tout d'abord, je me présente, je m'appelle (u). C'est évidemment le nom le plus banal que l'on puisse donner à une suite. Quant à mon comportement habituel : je tends vers zéro. En fait, depuis mon premier âge ; depuis que n a passé le zéro, je sais que je n'atteindrai jamais mon but. Mais, et ne vous faites pas d'illusions je suis consciente que c'est totalement idiot, j'espère toujours. On le voit, à l'horizon, le zéro, comme un énorme oeuf sur un tout petit coquetier. Il rayonne et domine tout \mathbb{R} mais c'est peut-être l'obsession de mon but qui me le montre ainsi.

Quand n ne valait encore que $3,52 \cdot 10^5$, j'ai croisé une autre suite (v) qui allait en sens inverse et qui me disait être partie de zéro et aller vers deux. D'après elle, zéro est tout petit et très facile à atteindre, elle m'a dit aussi que les n qu'il lui restait avant d'atteindre deux étaient bien plus nombreux que ceux qui étaient passés depuis le zéro jusqu'au lieu où nous étions. Je l'ai remerciée, parce qu'elle s'éloignait déjà de moi, mais ce qu'elle m'avait dit m'intriguait parce que j'étais passée par deux il n'y avait pas trop de n et que je sentais qu'il m'en faudrait bien plus pour aller jusqu'au zéro. Je me souviens avoir eu ce jour là des peurs de mortel.

J'avais peur que n s'arrête, ou qu'il recule. En effet, pourquoi n ne reculerait-il pas et pourquoi n'atteindrait-il pas son but : il pourrait alors se reposer et laisser tomber toutes les suites définies sur \mathbb{R} comme des cadavres de valeurs sur le bord du chemin. C'est la jeunesse et l'inexpérience qui m'emportaient dans ces réflexions philosophiques, tout à fait inutiles car je

Bulletin APMEP 405 - Juin-Juillet 1996

ne crois pas qu'il soit un jour venu à l'idée de n de s'arrêter, et encore moins de reculer !

Moi, je songe parfois à m'arrêter. Le paysage est joli ici. C'est calme mais pas ennuyeux, il faut se méfier tout le temps, toute erreur est fatale dans \mathbb{R} . Peut-être en est-il de même ailleurs. Le paysage ? C'est un ensemble de collines vert très clair et une route un peu trop jaune qui monte et descend de moins l'infini à plus l'infini ; et l'on est toujours situé au sommet d'une colline. Au dessus, le ciel est bleu sombre, parsemé de quelques nuages roses à l'horizon. On a l'impression que c'est la route qui illumine le reste du paysage. Tous les éléments de \mathbb{R} sont sur cette route. On ne dirait pas comme ça, elle ressemble plutôt à une petite route de campagne. L'autre jour, j'ai vu un x qui venait de $+\infty$ et qui partait à toute vitesse vers $-\infty$. Il avait l'air très consciencieux dans son travail. Moi, ce qui me désespère, c'est que je vais de plus en plus doucement, je sens que je n'arriverai jamais à zéro.

Et puis x est repassé en courant : il avait essayé par inattention des valeurs interdites et ça avait endommagé f , alors, pour se faire pardonner il recommençait tout. Il aurait pu faire attention ; une valeur interdite est facile à reconnaître : elle est enfermée dans un grand tube de verre vertical qui s'élève jusqu'à perte de vue.

Et plus ça va plus je me traîne ! C'est l'âge sans doute, mais qu'est-ce que l'âge quand on est immortel ? J'ai entendu dire, il n'y a pas longtemps, que ce n'était pas pour toutes les suites pareil. Le témoignage provenait d'y, qui avait trouvé une valeur fixe pour quelques instants. On nous épargne ça, quand même, à nous les suites. Mais ça ne nous enlève pas tous les soucis. Tenez, il n'a pas très longtemps j'ai vu une suite qui pleurait. Elle m'assurait qu'elle n'atteindrait jamais $\frac{2}{3}$. Elle avançait vraiment très lentement et je lui conseillai naïvement d'accélérer mais je crois qu'elle n'avait plus le moral à ça. Elle me faisait presque pitié. Je l'ai très vite dépassée malgré mon allure de tortue et j'ai pensé à elle en passant à $\frac{2}{3}$.

A ce moment-là, j'ai aperçu une suite arithmétique qui passait le zéro d'un pas régulier et qui se dirigeait, l'air ravi, vers $+\infty$. Je l'ai croisée un peu plus tard. Elle s'appelait (A), elle était très sereine et elle m'assurait, mais c'est ridicule, qu'elle irait toujours de cette allure reposante et dynamique. « Pourquoi irais-je plus vite, demandait-elle sur un ton qui n'admettait pas de réponse, de toute façon j'arriverai au même endroit que celle-là par exemple. » Celle-là n'était autre que (A'), qui courait presque vers l'infini, avec un air très affairé. « Que sa raison soit plus grande que la mienne, peu

m'importe, reprit (A) après avoir gentiment souri à (A'), du moment que la raison n'est pas nulle, on tend toujours vers l'infini, d'un côté ou de l'autre.» La voix de (A) était reposante, on sentait que la monotonie de son parcours n'avait pas altéré son caractère : « Chaque point se ressemble, continuait-elle sur sa lancée, dans ce paysage de féerie douce, naïf, intime, bien que chaque point cache des infinités tout aussi grandes que \mathbb{R} lui-même. » Et déjà (A) s'éloignait de sa progression arithmétique. Ses phrases me laissèrent perplexe et je pensais qu'il m'était difficile, peut-être même impossible d'avoir une raison plus grande que celle de A. Je me félicitais aussi de ne pas avoir conversé avec A'. Sa raison étant supérieure, le trouble dans lequel elle m'aurait mis aurait sans doute été plus grand. J'étais éblouie et je regardais avec étonnement cette route qui s'étalait à mes pieds, je n'arrivais pas à m'imaginer que chaque espace entre deux valeurs soit aussi infini que \mathbb{R} lui-même. Un grand vertige me prit et je faillis tomber, ce qui aurait été très gênant, je me serais allongée sur plusieurs valeurs et je ne sais pas si j'aurais pu me relever. Ça aurait été l'anéantissement de (u). En passant par ces valeurs, les suites auraient dit : « ici s'est achevée (u) : gardez la tête froide, cela vaut mieux ! » Je conclusais rapidement de toutes ces réflexions que les suites arithmétiques possédaient la sagesse, grâce à leur raison.

J'eus pourtant l'affreuse surprise, peu de temps après, de voir que tel n'était pas le cas. Je passais devant une suite arithmétique dont je ne connaissais pas le nom, mais dont la raison était nulle. Permettez moi de vous dire que je préfère ne pas avoir de raison plutôt que d'en avoir une nulle : la suite sautillait sur place, elle regardait le sol à ses pieds avec une joie extraordinaire, comme si elle ne voyait que cet endroit-là. Elle semblait avoir réalisé son rêve, sans sembler avoir l'idée de chercher une autre activité : elle stationnait. Je me dis alors, pleine de dégoût, que si jamais un jour j'atteignais le zéro, ce qui ne devrait plus tarder, je me trouverais un autre point pour converger et je trouvais plus prudent de commencer à réfléchir à la question. Mes pas m'avaient amenée un peu plus loin, et je recommençais à haïr le zéro. J'avais l'impression que tous le fuyaient. Il y en a même qui le fuyaient vers les deux infinis à la fois. Honnêtement, je n'aimerais pas diverger comme celles-là, si je préfère encore mon petit parcours in fini à leurs sauts désordonnés.

J'ai croisé, il y a à peine quelques n , la suite $(\sin(n))$ avec n en degrés. Elle m'a dit qu'elle passait très souvent par zéro et qu'elle était même partie de là. Là elle m'a épatée. Vous vous doutez bien que je l'ai harcelée de questions. Elle s'est montrée très polie, très douce. Elle donnait l'impression de mener une vie régulière, tout en courbes et pas du tout monotone. Elle mit un temps fou pour m'expliquer que le zéro n'était qu'un point comme

celui où nous étions : « lumière tendre », « herbe ni rase ni folle »... elle n'en finissait plus ...« un ciel sombre », « une clarté qui venait du sol, ou de l'obscurité même », elle ne savait pas trop. « Oui, d'accord, l'interrompis-je, mais en quoi est-ce que cela diffère des autres points ? » « Tu sais, recommençait-elle, voilà une « infinité » de n que je vais de un à moins un ...et patati et patata. » « N'y a-t-il pas d'autres différences ? » dis-je d'un ton irrité en espérant mieux comprendre cette fois-là, et le zéro m'aveuglait malgré moi et malgré l'infinité de points qui nous séparaient. « La différence est donc nette, comme entre ce point et celui-ci » et elle me montrait un point que nous venions de passer, et qui était tout à fait semblable à celui sur lequel nous étions. Peu de temps après, je croisais une autre suite (v) comme il y en a tant ici. « Ce point, là bas, dit-elle en me montrant du doigt celui que venait de me montrer $\sin(n)$, est-il, toi qui semble être passée par là, est-il plus beau et plus grand que tous les autres réunis et brille-t-il autant que ça de près ? » Je regardais le point en question et ne voyais qu'herbe verte. Il me semblait qu'un pas m'avait suffi pour venir de ce point jusqu'à (v) . « Je converge vers LA » dit-elle pudiquement, comme pour s'excuser.

Un coup d'œil pour zéro, un coup d'œil vers ce point, puis vers (v) qui ne l'atteindra jamais. « Il est magnifique », dis-je, et je lui décris mon zéro « On le voit depuis les deux infinis (elle ne voulut pas croire qu'il y en avait deux) comme une étoile à l'horizon, il y fait à la fois plus chaud et plus froid et l'herbe y est plus douce que partout ailleurs ». Voyant que je pleurais, (v) ne me posa pas de questions. Puis n devint $n+1$ et j'avançai un peu vers mes limites et (v) imperceptiblement vers les siennes.

Je crois que j'ai fini. En fait, avant même que n décrive \mathbb{N} tous mes déplacements étaient prévus et il était prévu que je n'atteindrai jamais zéro. Même si une vulgaire petite calculatrice indique zéro n'importe quand. Je sais bien que je suis si près de zéro qu'une légère erreur de parallaxe peut tromper tout \mathbb{R} , sauf moi. Tiens, voilà une suite qui arrive, je suis sûre qu'elle ne sait pas, elle, qu'elle n'atteindra jamais sa limite, qui du reste semble être $+\infty$...Oh! il y en a qui ont de la chance! Moi, quand j'aurai atteint le zéro, je tendrai peut-être aussi vers l'infini.

U.