Graphiques et Analyse

Raymond Chuzeville - Sylviane Gasquet
et les 25 participants

Objectif :

Cet atelier se proposait de faire apparaître le flou actuel concernant l'utilisation des courbes représentatives des fonctions de référence et de faire émerger des questions précises sur lesquelles la communauté mathématique devrait prendre position publiquement.

Déroulement :

Premier temps :

A l'aide d'un rétroprojecteur, des réponses d'élèves sont proposées aux participants, et la discussion porte sur la validité de la preuve proposée par l'élève. Ici c'est l'élève qui prend l'initiative d'une réponse graphique en s'appuyant essentiellement sur les courbes de références.

En fin d'atelier, les réponses "d'Alfred" sont distribuées sous forme de questionnaires que les participants diffuseront auprès de leurs collègues. Nous avons reçus 95 questionnaires remplis et des lettres d'accompagnement diverses[1]. Le bilan de l'atelier s'appuie autant sur la discussion lors des journées que sur les réponses écrites, ces dernières permettant des citations exactes de collègues.

---

1 Les non réponses signalées sont extraites des 95 questionnaires comportant en général des réponses. Elles signifient l'incapacité de se décider... (il y a souvent des points d'interrogation à côté). Les questionnaires retournés absolument vides mais avec des commentaires au dos ne sont pas comptabilisés en non réponses, mais en non-participation.

Second temps :

Discussion à partir d'un problème dont le texte part des représentations graphiques d'une courbe et d'une droite (non reproduit ici).

A - COMPTE RENDU DES RÉACTIONS AUX RÉPONSES D'ALFRED

Trois remarques préalables:

➞ "***Alfred est un élève imaginaire*** dont on sait bien que les parents sont profs de maths..." écrit un collègue non dépourvu d'humour! (Flûte, nous voici découverts!) et vous êtes nombreux à avoir réagi ainsi. Disons que la conception actuelle de l'enseignement des mathématiques rend peu probable l'existence d'Alfred. Mais quand on lit "Dériver est si naturel pour les élèves", on peut tout de même se demander d'où viennent les réactions dites "naturelles"... D'ailleurs une collègue dit aussi "je me demande si beaucoup d'élèves sont conscients du fait que $f(x)/x$ représente une pente - mais sans doute parce je n'ai pas l'habitude de faire ce genre de lien" et un autre : "Je doute qu'une telle maîtrise des graphiques soit fréquente (mais il se peut qu'elle soit à révéler)".

➞ ***"Difficile de répondre quand on ne connaît pas le contexte".***

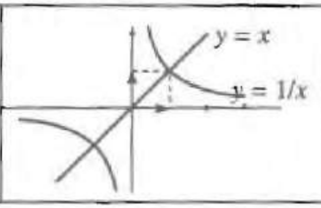
«On ne peut donner de réponse précise à ce questionnaire que si l'on sait ce que le professeur d'Alfred autorise» ou encore *«tout dépend du contrat passé avec la classe»*. Y aurait-il les mathématiques de M. Durand et celles de Mme Dupont ? Décider si les réponses d'Alfred ont valeur de preuve ou non, est-ce que cela dépend *«s'il s'agit d'un résultat intermédiaire, auquel cas j'admets les réponses rapides»*?

➞ ***"Comment allez-vous exploiter ces réponses?"***

Bien sûr nous ne songeons pas à analyser vos réponses de façon quantitative, c'est-à-dire aligner des pourcentages, d'abord à cause du nombre de réponses mais surtout parce que les enseignants dans la mouvance d'une association de bénévoles ne sauraient constituer un échantillon représentatif de l'ensemble des professeurs de mathématiques.

Par ce travail, nous cherchions seulement une aide pour faire émerger les questions et montrer la nécessité d'une réflexion urgente et collective sur les réponses à leur donner. Nous remercions donc tous les collègues qui ont participé à l'atelier et ceux qui nous ont répondu par écrit.

A PROPOS DE LA QUESTION 1

1) **Résoudre l'*in*équation** $\frac{1}{x} \geq x$		donc $S =]-\infty, -1] \cup]0, 1]$

Maximum : 40	moitié : 47	aucun point : 4	non réponse : 4

"Résoudre signifie de façon implicite : justifier par le calcul". Voilà qui est explicitement dit ! Cette habitude vient sans aucun doute du fait que lorsqu'on attend une résolution graphique, on dit «résoudre graphiquement». «Résoudre l'inéquation est une question floue» dit encore un collègue... *Mais «trouver le coupable» dans une affaire policière, est-ce une question floue?*

Question a) Un verbe demandant une réponse "Résoudre..." " Etudiez le signe..." " Etudier le sens de variation..;" doit-il imposer la méthode à suivre?

Question b) Quels résultats peut utiliser un élève en présence de deux courbes de références? Leur position relative fait-elle partie "du cours"?

Même si la lecture graphique est admise, comment faut-il rédiger? "il faut des explications", "j'attends la formulation décrivant l'observation qui mène au résultat" dit un collègue... "Je n'admets pas: je vois que"...*Mais que dire sinon "je lis sur le graphique..."*?

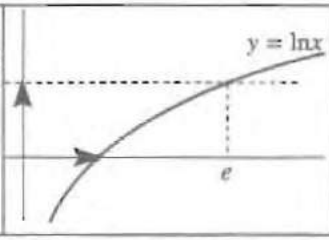
Question c) Quel type de rédaction attend-on lorsque l'argumentation est basée sur les représentations graphiques de courbes de référence?

«Suivant la qualité de la figure, je pourrais aller jusqu'à la totalité des points». Est-il nécessaire de rappeler la fonction ? de signaler les points particuliers (comme (1,1) et (-1,-1)) avec lignes de rappels sur les axes ? *Nous pensons que oui...*

Question d) Qu'est-ce donc qu'une figure correcte pour une courbe de référence?

Pour sourire un peu : « A l'aide d'un tableau de signes, l'élève montre qu'il est capable de résoudre graphiquement une inéquation de ce type.»

A PROPOS DE LA QUESTION 2

2) **Quel est le signe de $1 - \ln x$?** (d'après sujet 0 du bac S)		$1 - \ln x > 0$ quand $0 < x < e$

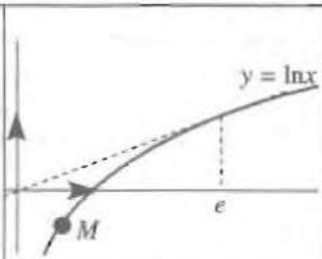
Maximum : 45	moitié : 41	aucun point : 6	non réponse : 3

Le graphique seul (sans écrire : la fonction logarithme est continue et croissante) semble insuffisant pour la moitié des collègues. (la continuité est-elle utile ici? N'est-ce pas seulement la croissance stricte qui joue ?) Pourtant un collègue fait remarquer : « le dessin n'apporte rien. Le passage de ($1 - \ln x > 0$) à ($0 < x < e$) n'est-il pas une connaissance de la fonction ln? le dessin ne traduit que l'étape intermédiaire ($\ln x < 1$)». *Nous ne sommes pas loin de penser comme lui...*

La représentation graphique affirme-t-elle le sens de variation ? la continuité ? la dérivabilité de la fonction ? On se retrouve ici avec le problème des conventions à expliciter (ceci est détaillé dans Fenêtre sur courbes). Cet exemple nous mène donc à la question suivante:

Question α) L'information donnée par la courbe d'une fonction de référence est-elle clairement définie ?

A PROPOS DE LA QUESTION 3

3) **Etudiez les variations de la fonction** $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$		M étant un point de la courbe représentant $\ln x$, alors $f(x)$ est le coefficient directeur de (OM). Donc $f(x)$ croît sur $]0,e]$ puis décroît sur $[e,+\infty[$, le maximum étant de $1/e$.

Maximum : 30	moitié : 43	aucun point : 19	non réponse : 3

Des réactions variées allant de "Idée astucieuse" à "méthode saugrenue".... Faut-il une "démonstration" pour dire que M étant un point de G_f, alors $f(x)/x$ est le coefficient directeur de (OM)? Actuellement, il semble qu'une démonstration soit attendue puisque cette question était posée au bac ES en Juin 95. N'est-ce pas la définition?

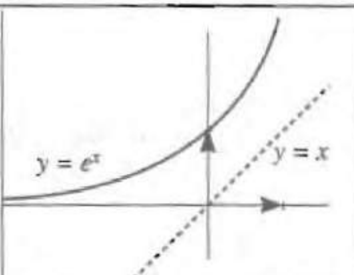
Question e) L'interprétation graphique de $f(x)/x$ est-elle un savoir exigible ?

«Tout dépend du dit et du non-dit de la courbe représentative de ln et de ses propriétés géométriques» disent en substances deux collègues. Autrement dit, sait-on que la tangente à la courbe ln au point $(e,1)$ passe par l'origine ? (idem pour la fonction exponentielle). Les participants à l'atelier disent qu'ils le font en cours et que c'est dans les manuels... Cela nous ramène à la question:

Question f) Ce que l'élève doit savoir à propos des courbes de références est-il défini avec précision.

Mais «il manque la justification du maximum. Elle est insuffisante graphiquement à moins d'évoquer la concavité qui n'est pas au programme.» Ce collègue (et d'autres sous des formulations différentes) soulève ici le vrai problème posé par la question 3 et sa suite (*suite qu'il ne nous parait pas indispensable de reproduire ici*).. Nous dirons seulement que la question portant explicitement: «discuter graphiquement...» les collègues ont mis plus souvent le maximum de points (53 sur 95). Les questions 3, suite de 3, suite de 4 et 5 abordent **le problème de la concavité.** Il s'agit là de questions plus prospectives. La concavité a été au programme sous forme algébrique (signe de la dérivée seconde), elle ne l'est plus, elle pourrait l'être à nouveau. Ce thème est repris plus loin.

A PROPOS DE LA QUESTION 4

4) **Justifier que la fonction** $x \mapsto g(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ **est définie sur IR**		Comme $e^x > x$ pour tout x, g est définie sur IR

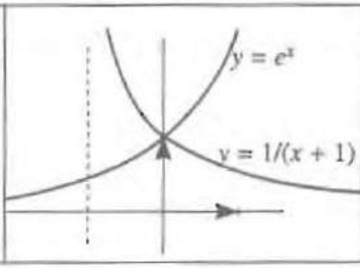
Maximum : 63	moitié : 20	aucun point : 9	non réponse : 3

Cette question, comme la question 1, renvoie aux connaissances concernant la position relative des courbes de références. Ces réponses sont à rapprocher de celles de la question 1 qui concernait les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto x$.
Pour la question 1, on avait obtenu :

Maximum : 40	moitié : 47	aucun point : 4	non réponse : 4

Avec la courbe exponentielle, il est vrai qu'on est certain de se situer en terminale. Est-ce cela qui entraîne une vingtaine de collègues à accepter l'argumentation graphique refusée pour l'hyperbole ?

A PROPOS DE 5 bis

5 bis) ***Que donnerait le réflexe de dériver?*** $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ ***Comment étudier le signe?***		D'après le graphique, $f'(x) < 0$ sur $]-1,0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$.

Maximum : 48	moitié : 33	aucun point : 9	non réponse : 5

Ici se pose **le problème de la résolution d'une inéquation $a(x) > b(x)$, quand il ne s'agit pas de fonctions de référence.**

«Je mets le maximum si l'élève explique comment il obtient le dessin de $y = 1/(x+1)$ ont dit deux collègues. Certes, il n'est pas question d'accepter sans aucune justification le tracé d'une translatée d'une courbe de référence, mais ensuite, quelle doit être la justification concernant la position relative de ces deux courbes ?»

Question g) Le graphique donne-t-il les coordonnées du point d'intersection ? ou bien **l'élève, guidé par le graphique, doit-il vérifier par le calcul ?** *(Nous penchons pour la seconde suggestion..)*

Lorsqu'il ne s'agit pas de deux courbes de références, peut-on se contenter du graphique pour affirmer qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection ? L'élève ne doit-il pas indiquer les sens de variation de chacune des fonctions ?

Afin que l'argumentation graphique n'enlève rien à la rigueur mathématique,

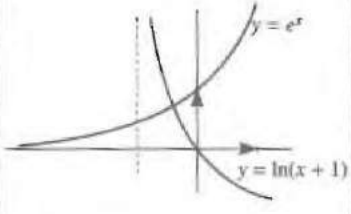
Question h) Ne faudrait-il pas expliciter un "théorème de l'unicité du croisement" :

> Si, sur un intervalle $[a,b]$, les fonctions f et g ont des sens de variations différents, alors si les courbes se coupent, le point d'intersection est unique et on peut en déduire le signe de $(f-g)$.

B. QUESTIONS SOULEVÉES PAR LA CONCAVITÉ

La concavité est apparue dans la question 3 et elle apparaît à nouveau dans la question 5. Ces questions ont été mises , on s'en doutera, avec préméditation!

A PROPOS DE LA QUESTION 5

5) **Etudiez le sens de variation de la fonction:** $x \mapsto f(x) =$ $e^x - \ln(x+1)$	 ***Autre version :*** Sur $]-1,0]$ $(e^x)' \leq +1$ et $(-\ln(x+1))' \leq -1$ Donc, pour la somme $f'(x) \leq 0$ de même sur $[0,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$.	***Version 1*** La courbe d'équation $y = -\ln(x+1)$ se déduit de celle de $y = \ln x$ par translation de vecteur $-\vec{i}$ et par symétrie d'axe (Ox). Pour $x = 0$, les pentes s'annulent * Sur $]-1,0]$, la pente négative l'emporte sur la pente positive donc la somme $f(x)$ décroît. De la même façon, sur $[0, +\infty[$, la somme croît.

Version 1 :	Maximum : 18	moitié : 37	aucun point : 33	non réponse : 7
Version 2	36	36	14	9

"L'affirmation d'Alfred «la pente négative l'emporte sur la pente positive» ne constitue pas une preuve suffisante. Je préfère la seconde version" est un commentaire qui résume assez bien les réactions reçues.

En ce qui concerne la version 2, un collègue écrit "A propos de «sur $]-1,0]$, $(e^x)' \leq +1$» Comment le sait-il ? fait-il un calcul ou observe-t-il la figure?" Manifestement, Alfred s'appuie sur la figure, donc il utilise effectivement la concavité de la courbe exponentielle. Est-il censé la connaître ?

Voici les réponses obtenues à ce propos concernant *LA COURBE EXPONENTIELLE*

- L'élève sait-il que le "creux de la courbe" est tourné vers le haut?

OUI : 58 NON : 25

- Sait-il que la courbe est au-dessus de ses tangentes?

OUI : 31 NON : 48

- Accepteriez vous qu'il utilise ce résultat?

OUI : 38 NON : 39

(les non réponses ne sont pas comptabilisées ici)

La réponse à la dernière question est aussi bien OUI alors que le collègue a dit NON aux deux précédentes... (sans doute en songeant : ce n'est pas une connaissance des programmes, mais si l'élève le sait, pourquoi ne l'utiliserait-il pas?). Mais signalons aussi que d'autres collègues répondent OUI aux deux premières questions, mais NON à la troisième... L'élève n'a pas le droit d'utiliser ce que l'on trouve normal qu'il connaisse!

Et qu'en est-il, plus généralement, *POUR LES COURBES DE REFERENCES* :

- L'élève doit-il connaître la concavité des courbes de référence

OUI : 37 NON : 45

- et de leurs translatées?

OUI : 33 NON : 49

- Accepteriez vous qu'il l'utilise?

OUI : 45 NON : 37

«L'étude de la concavité est hors programme. Les élèves savent seulement tracer une courbe en disposant leur feuille de façon que la main soit "à l'intérieur de la courbe". Il est hors de question d'utiliser cette notion en guise de démonstration.» ou encore «il doivent connaître l'allure des courbes mais pas plus» (deux collègues)

Ici aussi des enseignants répondent OUI à une question plus impérative : OUI l'élève DOIT SAVOIR... mais ensuite ils disent NON, je n'accepterais pas qu'il utilise. N'est-ce pas la peur que l'élève soit pénalisé s'il prend l'habitude d'utiliser cela dans un examen, puisque rien ne dit que ces réponses seraient acceptées par tous les correcteurs...

L'ensemble des réponses obtenues nous amènent aux réflexions suivantes:

Faut-il aborder la concavité?

Parmi les disciplines utilisant des représentations graphiques, les mathématiques risquent de se retrouver les seules à éviter de parler de la concavité.

La réflexion sur la concavité permet de donner du sens à des notions abordées dans certains problèmes (l'étude du sens de variation d'une dérivée par exemple).

Cette notion ouvre un large champ de problèmes où la réflexion l'emporte sur les calculs techniques, évitant ainsi de favoriser les élèves ayant des calculatrices sophistiquées.

Si oui, sous quelle forme?

Nous ne proposons pas de revenir à une définition algébrique de la concavité (signe de la dérivée seconde?) puisqu'on peut l'aborder autrement. Par exemple:

> Une première familiarisation avec cette notion peut se faire avec les courbes de références de seconde en utilisant le "creux" des courbes. Ne dit-on pas déjà "une parabole n'est pas bosselée", "elle n'est pas évasée", le "creux" est tourné du côté des $y>0$., et ne fait-on pas observer aux élèves qu'il n'en est pas de même pour une sinusoïde ?

Ensuite, nous proposons de définir la concavité par une approche graphique:

> C_f tourne sa concavité vers les $y > 0$ sur $[a,b]$ si, en chaque point M de coordonnées $(x; f(x))$, la courbe est au-dessus de la tangente en ce point et on admettra l'équivalence entre la définition précédente et "le creux de la courbe est toujours tourné vers le haut".

Et pour l'élève, quel serait le statut de la concavité?

- il devra connaître la concavité des courbes de références et seulement de celles-ci.
- lorsqu'une courbe est donnée par un texte, sa concavité devra être explicitée dans l'énoncé ou la légende du graphique.

La question reste posée sur l'utilisation de la concavité concernant les courbes des fonctions associées aux fonctions de références.

Admettra-t-on qu'une translation conserve la concavité ?

Qu'une Symétrie d'axe Ox l'inverse, qu'une symétrie d'axe Oy la

conserve?
Que les courbes représentant kf et $f(kx)$ ont la même concavité que celle de f pour $k > 0$?

Il nous paraît indispensable de statuer sur les points que nous venons d'aborder. La dispersion des réponses obtenues justifie totalement l'inquiétude des élèves: *"M'sieur, est-ce que j'ai le droit d'expliquer avec la courbe ?"* et l'embarras des enseignants pour leur répondre. Quelle cohérence pour Alfred: *"vous me faites apprendre des courbes... et vous n'êtes pas sûr que je puisse m'en servir?"*

Quelle image des mathématiques les élèves garderont-ils ?