

Calculatrices : intégration, ou désintégration?

Luc Trouche

Équipe ERES, Université Montpellier II

Ma thèse est que l'utilisation des calculatrices graphiques a des effets importants sur les notions que les élèves construisent quand ils font des mathématiques. Ces effets jouent à plein si, comme c'est le cas la plupart du temps, les outils de calcul ne sont pas pris en compte par le professeur (1)..

Un exemple, la notion de limite de fonction

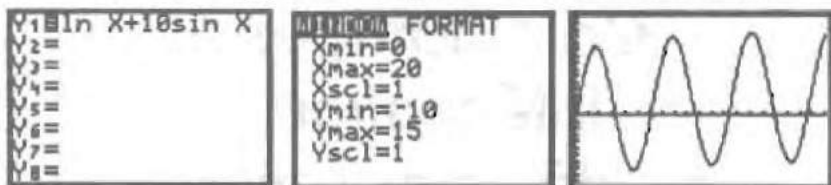
J'évoque le résultat d'une enquête passée en Mars 1995 en Deug A et en TS, chaque population (environ 100 élèves dans chaque cas) étant partagée entre élèves composant avec calculatrice, et élèves composant sans calculatrice. Les résultats (2) sont éloquentes : ainsi, à la question, «La fonction $\ln x + 10 \sin x$ a-t-elle pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?», les réponses "non" se répartissent ainsi (en pourcentage):

1 Trouche, 1992, *Calculatrices graphiques, statut pour l'élève, statut pour le maître*, DEA de didactique, Montpellier II, IREM de Montpellier.

2 On en trouvera une analyse plus détaillée dans les Actes du Colloque Inter-IREM d'Analyse, Jussieu 1995, publiés par l'IREM de Nice.

	Avec calculatrice	Sans calculatrice
TS	25	0
Deug A	20	0

Il y a un effet certain de la calculatrice sur ses réponses. On pourrait bien sûr objecter qu'il ne s'agit là que de l'impact de l'image de la fonction que renvoie la calculatrice, qui est certes, pour un novice, assez troublante...



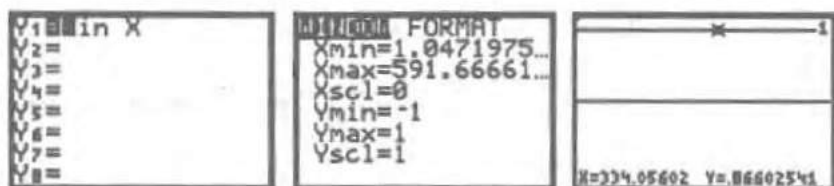
Cependant, les effets de la calculatrice ne s'arrêtent pas là : l'enquête montre que les élèves avec calculatrice utilisent davantage des procédures d'étude de limites liées aux variations de la fonction, et beaucoup moins des procédures liées à des majorations, ou minorations. Ainsi on peut penser que l'utilisation par les élèves de la calculatrice graphique va peser pour renforcer des modèles de limites assez primitifs : l'idée qu'une fonction tendant vers $+\infty$ est une fonction qui prend de grandes valeurs, ou des valeurs de plus en plus grandes.

Quelques pistes d'explication des phénomènes rencontrés.

Ces difficultés sont dues pour partie à la représentation des nombres et des fonctions par une calculatrice : drôle d'outil pour étudier les fonctions réelles qu'une machine pour laquelle tout nombre a un successeur...

Mieux, une machine telle que, entre deux nombres différents et leurs successeurs, il n'y a pas nécessairement la même distance : ainsi, le nombre qui suit 0 est (à peu près) 10^{-99} . Mais le nombre qui suit 10 est 10,000 000 000 001. Pas simple, de construire la notion de "voisinage d'un point" dans un tel contexte...

Cette discrétisation du continu a des effets spectaculaires bien connus pour la représentation graphique des fonctions, comme on le voit ci-dessous pour la fonction sinus, observée entre $\frac{\pi}{3}$, et $\frac{\pi}{3} + 94 \times 2\pi$. Comme la calculatrice TI82 a 95 colonnes de pixels, la fonction apparaît comme constante.



Ces problèmes sont amplifiés par le poids propre de l'image produite par l'écran. Il n'y a pas les mêmes caractères réducteurs et producteurs de l'image "papier/crayon" et de l'image "clavier/écran". L'image de l'écran est multiple, volatile. Atout pour les "bons" élèves, qui reconstituent comme un puzzle les différentes vues d'un même objet, difficulté pour les autres, pour lesquels une image chasse l'autre. L'image papier/crayon est statique, réside dans un contexte de cours. C'est un des "représentants" de la fonction. L'image clavier/écran, détachée de tout contexte d'enseignement, "profite" du rôle de concrétisation très puissant de l'écran. Ce n'est plus une représentation graphique de la fonction, cela en devient la présentation, avec tous les effets possibles de contagion de l'objet présenté par la machine sur l'objet mathématique lui-même.

A contextes différents, gestes différents. Les observations des élèves en action dans la résolution de problèmes sont assez éclairantes. Avec une calculatrice, moins de prise de note, moins de retour au cours, moins d'action sur une courbe donnée (si une courbe ne donne pas satisfaction, on en change). C'est le règne du prêt à penser, du prêt à jeter. Le temps perd de son épaisseur, le recul de son intérêt.

De sérieux problèmes à prendre en compte par l'enseignant... qui ne doit pas attendre de l'évolution des matériels une résorption des difficultés. Ainsi l'arrivée sur le marché de calculateurs formels comme les TI 92 ne fait que déplacer les problèmes : ces nouvelles calculatrices font certes des calculs exacts, mais quel rapport va s'établir entre calculs exacts et calculs approchés ? Ainsi, en mode "calcul exact", la TI 92 donne pour e^{3000} : " e^{3000} ", ce qui n'est pas une surprise... Mais en mode "calcul approché", on obtient pour la même expression la valeur de ∞ ! Quelle conception de l'infini ces résultats vont-ils contribuer à renforcer, sinon qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ est une fonction qui "prend de grandes valeurs" ?

Quelques pistes pour la prise en compte des problèmes posés.

Et d'abord ce qu'à mon avis, il ne faut pas faire...

On trouve, dans le *Bulletin de l'APMEP n°398* une version plus

"démarche scientifique", moins "automath", d'un problème du Bac C de 1994.

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$, dont une calculatrice graphique propose la courbe ci-contre.



La courbe affichée suggère différentes propriétés qu'on demande de confirmer, de préciser, ou d'infirmar par un calcul ou un raisonnement précis :

- f semble définie sur tout \mathbb{R} (on peut étudier les variations de $e^x - x$);
- f semble avoir pour asymptote horizontale les droites d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$; etc...

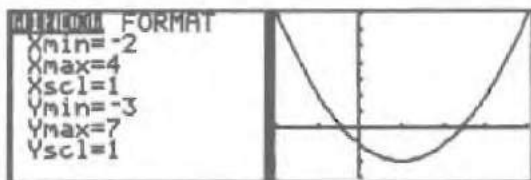
Disons le tout net, il s'agit là de conjectures assez artificielles... Quel "expert" dirait, sur la foi de la fenêtre affichée, qu'il s'agit d'une courbe définie sur \mathbb{R} , et qu'il semble y avoir telle ou telle asymptote? Développer un esprit critique chez nos élèves exige plus de prudence...

L'objectif de ce problème était de rompre avec une conception fossilisée des énoncés de bac, d'intégrer les calculatrices dans une démarche scientifique. Il semble bien que le remède, ici, est pire que le mal. On aura du mal, en tous cas, à convaincre les collègues réticents à intégrer les calculatrices dans leurs classes qu'il s'agit là de propositions de renouvellement radicales de notre enseignement. D'autres pistes existent-elles? Je le pense...

Première piste : développer une démarche de conjectures, preuves, réfutations...

Un exemple parmi d'autres ⁽³⁾

On considère la fonction g qui à x associe $x^2 - 2x - 1$ (graphique ci-contre). On se propose de chercher des fonctions f qui vérifient :



- si $f(x) < g(x)$, alors $f'(x) < 0$
- si $f(x) = g(x)$, alors $f'(x) = 0$
- si $f(x) > g(x)$, alors $f'(x) > 0$

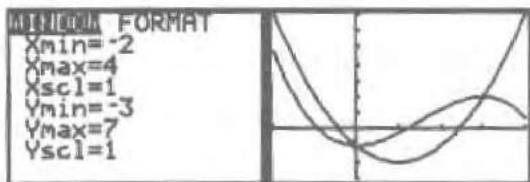
³ D'autres exemples dans les brochures 95 du groupe Analyse de l'IREM de Montpellier: *Des fonctions et des graphes*, et *Arithmétique*, le retour.

- a) Peut-on trouver des fonctions f décroissantes sur \mathbb{R} ?
 b) Peut-on trouver des fonctions f constantes sur \mathbb{R} ?
 c) Peut-on trouver des fonctions f croissantes sur \mathbb{R} ?

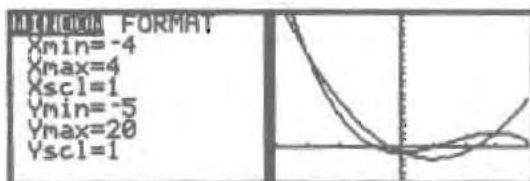
Répondre à ces questions nécessite de formuler des conjectures, d'éventuelles réfutations...

- d) Peut-on trouver des fonctions f décroissantes, puis croissantes, puis décroissantes ?

Les élèves dessinent, l'idée d'une cubique surgit, le professeur propose les points de contact pour un contrôle mutuel des calculs... Question : la fonction trouvée convient-elle ?



Hélas, non : un recul montre que la courbe de f recoupe celle de g . Question : peut-on trouver une autre courbe du troisième degré convenable ? Hélas non... Pourquoi ? C'est la comparaison à l'infini des fonctions puissances qui permet de trancher...



Hélas non... Pourquoi ? C'est la comparaison à l'infini des fonctions puissances qui permet de trancher...

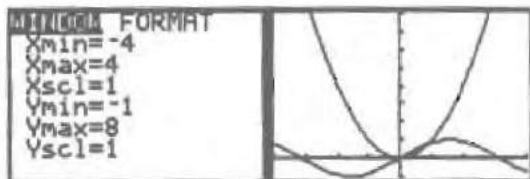
Une autre piste : donner des problèmes qui nécessitent des "visions larges".

C'était déjà une des fonctions du problème précédent. Pour comprendre qu'aucune fonction f tout le temps croissante ne pouvait convenir, il fallait aller "voir" ce qui se passait "tout en haut à gauche" de la parabole...

Autre exemple de problème, posé à une classe de TS cette année :

On considère les courbes S et P représentatives de la fonction sinus et de la fonction carré.

- a) Soit D tangente à P ; combien de tangentes à S parallèles à D ?
 b) Soit D tangente à S ; combien de tangentes à P parallèles à D ?



- c) Combien de tangentes communes à la courbe de la fonction sinus, et à la courbe de la fonction carré ?

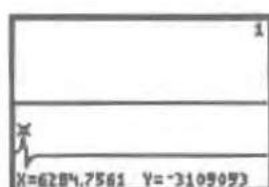
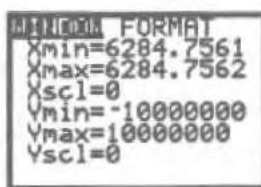
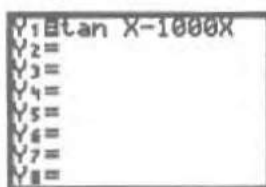
On comprend bien que ce n'est pas en restant dans le cadre de la fenêtre de la calculatrice que le problème pourra être appréhendé dans sa complexité... D'autant que, plus on observe les points de contact d'éventuelles tangentes près du sommet de la parabole, plus on perd "de vue" les sommets éloignés de la sinusoïde. Les élèves devant le problème, même sans consigne, font des dessins, font des gestes utilisant la règle, font glisser des parallèles... L'infini est là au centre des débats. Réactions instructives d'élèves: "il y a un nombre fini de tangentes, car, au bout d'un certain moment, les tangentes sont confondues avec l'axe des abscisses." Trancher la discussion suppose de chercher les tangentes, leurs équations...

Bref, l'objet de ce type d'énoncé est de créer une distance entre la machine et l'élève, de faire jouer la complémentarité des dessins papier/ crayon, et dessin machine.

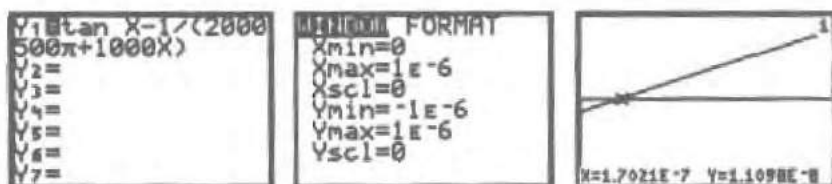
Une dernière piste : donner des problèmes dont la réalisation exige la mobilisation conjointe de la calculatrice, des résultats théoriques connus, des fonctions de référence.

Un exemple : trouver un encadrement à une précision donnée de α , 2000^{ème} (par exemple...) racine positive de l'équation $\tan x = 1000x$ (par exemple...).

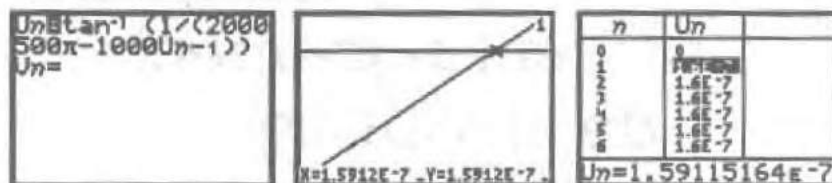
Résoudre le problème nécessite d'avoir une petite idée des variations de la fonction tangente, de localiser grossièrement la racine (elle est "juste avant" $2000,5\pi$), de déterminer une fenêtre adéquate pour l'encadrer. Les coefficients étant choisis pour cela, la visualisation de la racine va s'avérer très difficile :



Résoudre cette difficulté exige de changer de point de vue : au lieu de rechercher la racine α , on va chercher l'écart qu'il y a entre $2000,5\pi$ et α . Ce qui correspond à une démarche mathématique "habituelle". Ce changement de variable amène à la fenêtre ci-dessous, tout de même plus commode.



Enfin, on peut s'intéresser au contrôle de l'approximation trouvée, en construisant par exemple par la méthode du point fixe, une suite dont le nombre cherché soit la limite :



La suite converge très rapidement, et le premier terme donne le nombre cherché avec une précision de 10^{-15} . On peut se demander pourquoi, etc, etc.

Sans entrer dans le détail du problème, on voit bien son esprit : exiger la mobilisation de différents registres de représentation d'une fonction, à partir de la machine (courbe, tableau de valeurs...), ou hors machine, combiner détours théoriques et utilisation de la calculatrice...

Il ne s'agit pas dans le cadre de cet exposé (et de ce résumé...) de prétendre résoudre le problème de l'intégration des calculatrices dans les classes, mais simplement d'ouvrir quelques pistes. Aller plus loin suppose des conditions institutionnelles de programmes, d'uniformisation des matériels, etc...

Il me semble urgent de prendre cette question en considération, si on veut éviter le développement de deux phénomènes :

- pour les élèves, une situation de coupure entre les mathématiques qu'ils observent sur leurs calculatrices, et les mathématiques du maître. On a vu les dommages que cela pouvait avoir sur les notions construites ;
- pour les maîtres, un délitement du consensus sur l'analyse mathématique à enseigner. Le débat, récurrent, "faut-il autoriser les calculatrices aux examens", n'est que la partie immergée de l'iceberg...

La balle est dans le camp des responsables, mais aussi, dans une certaine mesure, du maître dans sa classe.