Les conférences des Journées Nationales
de Grenoble 1995

Systèmes dynamiques : à la recherche de SOLUTIONS PERIODIQUES

Etienne GHYS
Directeur de recherche au CNRS
à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Parler des mathématiques d'aujourd'hui, c'est trop difficile, trop insensé. Il n'est pas possible d'avoir un point de vue trop vaste. Aussi j'ai simplement choisi deux exemples de mathématiques récentes, mais sans grande prétention. Et je vais suivre la seule voie qui me paraît raisonnable : la voie historique. Je vais vous parler de systèmes dynamiques, et d'orbites périodiques, en commençant très loin, au 16ème siècle, et en vous menant jusqu'en 1994-1995.

Au XVI^e siècle donc, vous savez tous que Kepler est fameux pour avoir été l'un des premiers à observer le mouvement du système solaire avec une grande précision et nous lui devons ses trois lois bien connues : la première dit que les planètes décrivent des ellipses autour du soleil ; la deuxième indique la manière dont les planètes décrivent ces ellipses ; la troisième donne la période d'une planète en fonction du grand axe de son ellipse.

Mais je voudrais insister sur une chose extrêmement importante qu'on oublie de dire, et que j'aurais envie d'appeler la " zéroième " loi de Kepler : *les planètes suivent des trajectoires périodiques*. C'est une merveille, dont nous ne sommes pas assez conscients, vu son importance dans la vie de tous

1 Le texte présenté ici est une ratranscription de mon exposé oral qui avait été enregistré sur magnétophone. Les illustrations sont des copies des transparents présentés. Je remercie chaleureusement Madame Claude Pariselle qui a bien voulu se charger de ce travail de retranscription

2 Docteur ès sciences mathématiques, Etienne GHYS est membre correspondant de l'Académie des Sciences. Ses travaux actuels portent sur la géométrie et les systèmes dynamiques

les jours. Or c'est en fait une chose qu'on ne comprend pas très bien : pourquoi les orbites du système solaire sont-elles périodiques ? Le sont-elles exactement ? Qu'est-ce qu'une orbite périodique et quelles conditions cela exige-t-il ?

Il est évident que l'importance fondamentale de ces questions fait que les mathématiciens ont envie de regarder cela de près. Bien entendu, à l'époque de Kepler, il ne s'agissait que de descriptions. Kepler était un observateur extrêmement astucieux, mais qui ne cherchait pas d'explication.

Le premier qui a cherché à expliquer le mouvement des planètes est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps : Isaac Newton. En 1685, il a publié son oeuvre magistrale, l'un des textes sans doute les plus importants de toute l'histoire des sciences : *«Principes mathématiques de la philosophie naturelle»* (traduit en français par la Marquise du Châtelet). Ce texte absolument merveilleux fonde la mécanique et le calcul différentiel. Newton explique ce qu'est une dérivée, il définit proprement ce qu'est une vitesse, une accélération, il écrit la loi $F = m\gamma$, et à partir de la loi de gravitation il explique ce qu'avait constaté Kepler. Ce livre, et les méthodes qu'il développe, sont à la base d'une bonne partie des mathématiques contemporaines ; ils sont aussi en quelque sorte le fondement du déterminisme.

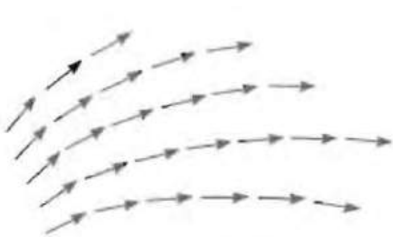
Je voudrais maintenant parler d'un concept qui sera central dans tout mon exposé. Ce concept ne se trouve pas à proprement parler dans le livre de Newton, mais on peut le trouver entre les lignes. Il s'agit de la notion de champ de vecteurs.

Un champ de vecteurs vous pouvez l'imaginer de nombreuses manières ;

Champ de vecteurs

C'est une application (de classe C^1*) qui associe un vecteur à chaque point d'un certain domaine du plan (ou de $\mathbb{R}^n$)

* " de classe C1 " signifie différentiable avec une dérivée continue. Mais je vous dis tout de suite que je ne suis pas venu ici faire un cours de mathématiques formelles, et que par la suite je serai parfois obligé de tricher, de ne pas donner les hypothèses exactes et complètes.



la plus intuitive est de penser à du liquide en mouvement : en chaque point, vous avez la vitesse instantanée d'une particule du fluide, et vous obtenez ainsi un champ de vecteurs (le champ de vitesses) sur votre domaine. Mais, si j'ai fait un schéma en dimension 2, il est absolument indispensable, dès qu'on veut faire des choses un peu sérieuses, de travailler avec des espaces de configuration plus compliquée comme nous le verrons plus loin. Il faut donc penser à des espaces de dimension supérieure et c'est pourquoi j'ai écrit $\mathbb{R}^n$. Dans un champ de vecteurs, la notion fondamentale est celle d'orbite. Le mot a la même signification qu'en astronomie :

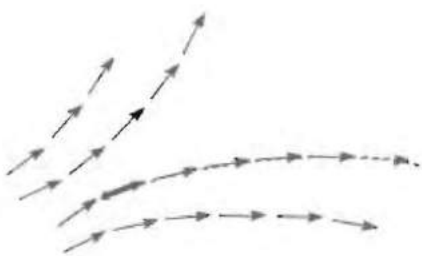
Une **orbite** d'un champ de vecteurs est une courbe
qui est partout tangente au champ.

Le théorème essentiel, qui était pressentie par beaucoup de mathématiciens, y compris Newton, a pour la première fois été démontré par notre grand analyste du XVIIIe siècle : Cauchy.

Cette petite phrase ne paraît pas grand chose, mais ce théorème est absolument crucial puisqu'il nous définit en quelque sorte ce qu'est le déterminisme. Etant donné un point initial, il existe une unique orbite passant par ce point. Cela a engendré un optimisme absolument délirant au XIXe siècle ; tout était résolu : il n'y avait qu'à écrire l'équation différentielle du champ de vecteurs ; en la résolvant on pourrait décrire le mouvement de n'importe quel système. Voici l'illustration de l'optimisme un peu fou des mathématiciens et physiciens du XIXe siècle : une phrase de Laplace qui est restée une définition classique du déterminisme.

Théorème de Cauchy :

Par chaque point passe une unique orbite



«Nous devons considérer l'état présent de l'univers comme la conséquence de son état passé et comme la cause de son état futur. Une intelligence qui à un certain moment connaîtrait toutes les forces qui contrôlent la nature ainsique les situations relatives de toutes les entités qui composent la nature - si elle était suffisamment grande pour développer toute l'analyse mathématique de ces données - décrirait, dans une seule formule, aussi bien les mouvements des corps les plus importants de l'univers que ceux du moindre atome. Rien ne serait incertain pour cette intelligence ; le futur et le passé seraient présents à ses yeux.»

Pierre S. de Laplace (1814)

On sent l'enthousiasme de Laplace. Le théorème de Cauchy affirme l'existence et l'unicité des orbites d'un champ de vecteurs. Il n'y a plus qu'à résoudre des équations différentielles et on aura «dans une seule formule» la solution de tout. Encore faut-il être suffisamment malin pour les résoudre. Même Laplace en était conscient (voyez la petite phrase entre tirets), mais au début du XIX^e siècle, on pensait encore qu'il suffisait d'attendre que les mathématiciens travaillent, avancent, résolvent suffisamment d'équations différentielles, et que, tôt ou tard, on aurait toutes les solutions.

Mais, pour illustrer un peu le problème, prenons son prototype, l'étude de la mécanique céleste. Avec un petit logiciel, on peut s'amuser à simuler le mouvement de quelques planètes : on crée un soleil, quelques planètes, on leur donne des vitesses initiales, on les lance dans l'espace intersidéral....de l'ordinateur, et on observe ce qui se passe.

Masses nulles

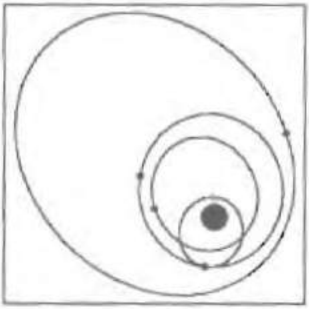
Universe Type : Unbounded	Force Type : Gravity
Gravity : 1.00000	Friction : 0.00000
Stepsize : 0.10000	Screen Size : 492,575

Initial State

	Mass	Position		Velocity	
1	0.0000e+0	7.9240e+2	-7.6210e+2	6.4000e+0	-6.6800e+1
2	1.0000e+6	5.4500e+2	-6.7500e+2	0.0000e+0	0.0000e+0
3	0.0000e+0	6.5800e+2	-1.2937e+3	-4.6000e+1	-1.8500e+1
4	0.0000e+0	1.3200e+2	1.3160e+2	-2.1900e+1	-1.6800e+1
5	0.0000e+0	8.0500e+2	-1.3500e+2	2.4000e+1	-2.9000e+1

Current State

	Mass	Position		Velocity	
1	0.0000e+0	4.4141e+2	-1.1183e+3	-3.4340e+1	7.2066e+0
2	1.0000e+6	5.4500e+2	-6.7500e+2	0.0000e+0	0.0000e+0
3	0.0000e+0	1.2054e+3	7.0947e+1	1.0719e+1	-3.4154e+1
4	0.0000e+0	-1.1668e+2	-2.7517e+2	-6.7848e+0	-3.3083e+1
5	0.0000e+0	9.7247e+0	-5.9437e+2	-1.2891e+1	4.0240e+1



Ici, vous avez un gros soleil et quatre planètes de masse négligeable par rapport à celle du soleil. Aussi chacune est soumise à l'attraction du soleil, sans subir de perturbation due aux autres. Et elle suit tranquillement une orbite elliptique, telle que l'avait décrite Kepler, telle que l'avait prévue Newton.

Dans un deuxième temps, j'ai repris le même système initial en donnant une masse non nulle aux planètes.

Masses non nulles

Universe Type : Unbounded — Force Type : Gravity

Gravity : 1.00000 — Friction : 0.00000

Stepsize : 0.10000 — Screen Size : 442,574

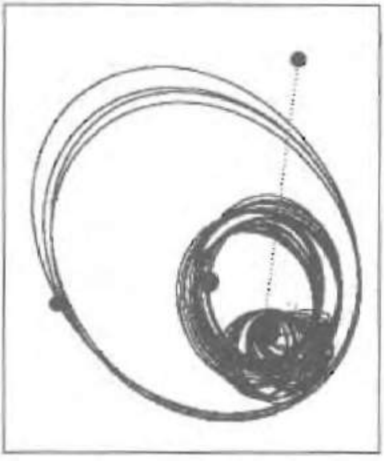
Initial State

	Mass	Position		Velocity	
1	1.0000e+3	7.8500e+2	-7.6500e+2	6.4000e+0	-6.6800e+1
2	1.0000e+6	5.4500e+2	-6.7500e+2	0.0000e+0	0.0000e+0
3	1.0000e+3	6.5500e+2	-1.2950e+3	-4.6000e+1	-1.8500e+1
4	1.0000e+4	1.3500e+2	1.3500e+2	-2.1900e+1	-1.6800e+1
5	1.0000e+0	8.0500e+2	-1.3500e+2	2.4000e+1	-2.9000e+1

Current State

	Mass	Position		Velocity	
1	1.0000e+3	7.2614e+2	1.4157e+3	3.5287e+1	3.8378e+2
2	1.0000e+6	5.4500e+2	-6.7500e+2	0.0000e+0	0.0000e+0
3	1.0000e+3	-1.0783e+3	-5.2209e+2	- 1.3453e+1	1.9900e+1
4	1.0000e+4	9.9684e+2	-6.7938e+2	2.6933e+1	4.7235e+1
5	1,0000e+4	9.6622e+1	-3.1161e+2	9.3578e+1	4.0466e+1

Alors il s'est passé une chose absolument catastrophique : au bout de quelques tours l'une des planètes a tout simplement été éjectée du système. Vous voyez que c'est des choses qu'on aimerait comprendre : est-ce que ça pourrait arriver dans notre système solaire ? Je vous dis tout de suite que j'ai un peu triché, histoire de forcer les événements : j'ai fait en sorte que deux



planètes aient des orbites presque tangentes. Ainsi, de temps à autre elles sont très proches l'une de l'autre. Et puis j'ai triché très fort avec deux planètes qui ne tournent pas dans le même sens. Ainsi quand elles arrivent l'une en face de l'autre, elles peuvent créer une perturbation extrêmement forte, qui éjecte l'une des planètes. Bien sûr ce n'est qu'un exemple d'école, et la planète terre ne peut pas être éjectée au bout de quelques tours !

L'ordre de grandeur du rapport entre les perturbations dues aux autres planètes, et l'attraction du soleil est de l'ordre du millième. Mais au bout d'un temps très long, c'est tout de même important. Alors quel est ce miracle qui fait que rien de grave ne se passe ?

Bien entendu les mathématiciens du XIX^e siècle ont attaqué cette question de front. avec Laplace, c'est un autre mathématicien français, Lagrange, grand fondateur de la mécanique céleste, qui a essayé de résoudre ces questions, ou du moins d'avancer.

Mais voyez sur quel genre d'équations on tombe quand on veut comprendre le mouvement d'une planète soumise, en plus de la force d'attraction du soleil, à des forces perturbatrices. Six quantités, p, e, ω, i, Ω, τ* qui évoluent au cours du temps avec des équations extrêmement compliquées - pourtant écrites dans le bon système de coordonnées, introduit par Lagrange.

1. $\frac{dp}{dt} = 2r\widetilde{T},$

2. $\frac{de}{dt} = \widetilde{S}\sin v + \left[\cos v + (e + \cos v)\,\frac{r}{p}\right]\widetilde{T}$

3. $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\,\widetilde{S} + \frac{\sin v}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\widetilde{T} - \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cotg} i\,\widetilde{W},$

4. $\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos u\,\widetilde{W},$

5. $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i}\,\widetilde{W},$

6. $\frac{d\tau^*}{dt} = \frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(eN \sin v - \cos v\right)\widetilde{S} + \frac{p}{r}N\widetilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2}$

Au lieu de l'équation pour le demi-périmètre focal p, on peut utiliser l'équation pour le demi-grand axe a :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2 e \sin v}{p}\widetilde{S} + \frac{2a^2}{r}\widetilde{T}$$

auquel cas on exprimera p en fonction de a et de e dans les seconds membres des équations. Ici

$$\widetilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}S,\ \widetilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}T,\ \widetilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}W,$$

où S, T, W sont respectivement l'accélération radiale, transversale et normale intervenant dans les perturbations... On suppose que S, T et W sont exprimées explicitement en fonction des éléments osculateurs et du temps. On constate souvent que S, T, W ne dépendent pas du temps explicitement mais par l'entremise de l'anomalie vraie v ou de l'argument de la latitude u qui interviennent explicitement dans S, T et W.

Il y a peu d'espoir de résoudre des équations si compliquées. Alors tout ce qu'on peut faire, c'est des approximations. C'est ce qu'on fait les mathématiciens du XIX^e siècle (essentiellement Laplace, Lagrange). Ils ont cherché à comprendre le fonctionnement du système solaire à terme - disons 100000 ans - et tout leur travail s'appuyait sur des méthodes d'approximation.

Le premier qui a vraiment changé la situation, le mathématicien qui à mon avis a eu la plus grande influence, le fondateur - parmi beaucoup d'autres choses - de la théorie des systèmes dynamiques, c'est Henri Poincaré.

Je donne quelques détails sur sa carrière : il est né en 1854 à Nancy et, très jeune, a été remarqué comme extrêmement brillant. Mais puisque je m'adresse à des enseignants en grande partie du secondaire, je voudrais signaler que Poincaré a eu 0 en maths au bac. Il semble qu'il n'ait pas été capable de résoudre un problème consistant à trouver la somme d'une série géométrique convergente. C'est absolument stupéfiant quand on pense que Poincaré a été par la suite le grand maître des séries ! Comme il n'était pas mauvais dans les autres matières, il a quand même réussi le bac de justesse, mais c'est une histoire incroyable. Faites attention si vous voyez passer Henri Poincaré dans l'une de vos classes !

Dès le début de sa carrière, en 1881, Poincaré attaque le problème des équations différentielles des champs de vecteurs, et de leurs orbites. Mais avec un point de vue résolument nouveau. Il dit « n'essayons pas de résoudre ces équations différentielles, c'est trop compliqué, nous n'y arriverons pas. Essayons plutôt d'étudier qualitativement les orbites.» Poincaré illustre sa méthode en faisant le parallèle avec l'étude d'une fonction comme on la fait dans le secondaire : quand on a déterminé les extrema, points d'inflexion, branches paraboliques, asymptotes,... on connaît qualitativement tellement bien la fonction que ce n'est pas la peine d'aller plus loin.

De même l'idée de Poincaré est d'essayer de mettre au point une théorie qui permette de décrire les orbites des champs de vecteurs par quelques éléments caractéristiques, les analogues des asymptotes, points d'inflexion,... Une théorie qui permette de comprendre au mieux les champs de vecteurs pour lesquels il n'est pas raisonnable d'espérer trouver une formule donnant leurs orbites. «Cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt de premier ordre. Diverses questions fort importantes d'analyse et de mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons par exemple le problème des trois corps.* Ne peut-on demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel, ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ? Ne peut-on se demander si la distance de deux corps augmentera ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres».

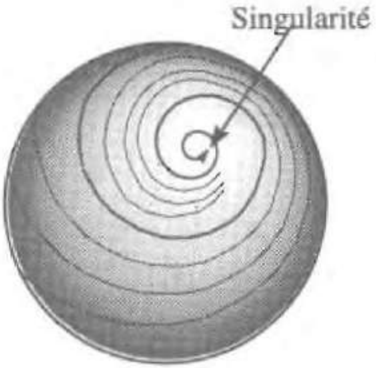
Cette citation de Poincaré est l'acte de naissance d'une nouvelle théorie : il ne s'agit plus d'analyse, de résolution d'équations différentielles mais il s'agit de faire du qualitatif, de la géométrie.

Voici, juste pour illustrer cette méthode qualitative, deux exemples de théorèmes obtenus par Poincaré. Les théorèmes de Poincaré portent souvent deux noms car Poincaré était tellement génial que les autres mathématiciens avaient du mal à comprendre ses articles. Il fallait qu'ils soient digérés, compris, développés par quelqu'un d'autre.

Voici d'abord le théorème de Poincaré-Hopf (Hopf - 1894/1971 est un mathématicien allemand qui a passé la plus grande partie de sa carrière à Zurich) :

* c'est le problème du mouvement de trois corps célestes, de masses non nulles, qui s'attirent mutuellement.

Théorème de Poincaré-Hopf



Tout champ de vecteurs sur la sphère est nul en au moins un point.

Ceci n'en est qu'une version toute simple. On se place ici non pas dans un domaine du plan, ou de $\mathbb{R}^n$, mais sur une sphère. Et l'on suppose que l'on a sur cette sphère un champ de vecteurs, en chaque point un vecteur tangent à la sphère. Si vous voulez, vous pouvez imaginer le champs des vitesses du vent sur la terre - en supposant, ce qui est totalement déraisonnable, que l'épaisseur de l'atmosphère est nulle.

Le théorème de Poincaré-Hopf dit que, quelle que soit la façon dont le vent se répartit sur la terre -en supposant qu'il est continu, ce qui est aussi une question discutable- il y a au moins un point de la terre où la vitesse du vent est nulle. Cela correspond, en termes d'orbites, à une position d'équilibre, à ce qu'on appelle une singularité. Ces singularités font bien sûr partie des points remarquables -analogues aux points d'inflexions, extrema,...- que Poincaré étudie. Leur connaissance est même absolument cruciale pour essayer de comprendre le comportement du système global.

Le deuxième théorème que je voulais citer est celui de Poincaré-Bendixson. Voici rapidement de quoi il s'agit :

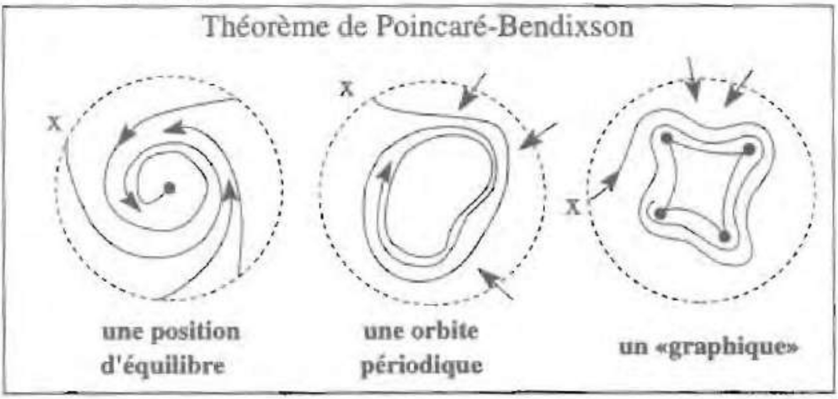
On considère comme tout à l'heure un champ de vecteurs dans un domaine du plan, et on suppose qu'il existe une courbe fermée -ici le cercle tracé en pointillé- qui délimite un domaine dans lequel les orbites du champ de vecteurs rentrent (et n'en sortent pas). Quel peut être alors le futur de ces orbites ? Le théorème de Poincaré-Bendixson dit qu'il peut se passer trois choses :

1 - Les orbites peuvent converger vers une singularité.

2 - Elles peuvent converger vers une orbite périodique (ce qui est le

sujet de ma conférence aujourd'hui).

3 - Elles peuvent enfin converger vers ce qui s'appelle un «graphique», quelque chose qui est périodique, mais «marqué» en quelque sorte par des points singuliers. Je n'en parlerai pas aujourd'hui, j'ignorerai ce troisième cas.



On pourrait dire que ce théorème montre que la vie est simple : vous avez des orbites qui rentrent dans un disque, et il ne leur arrive rien de bien méchant : ou bien elles convergent vers une position d'équilibre, ou bien vers une trajectoire périodique.

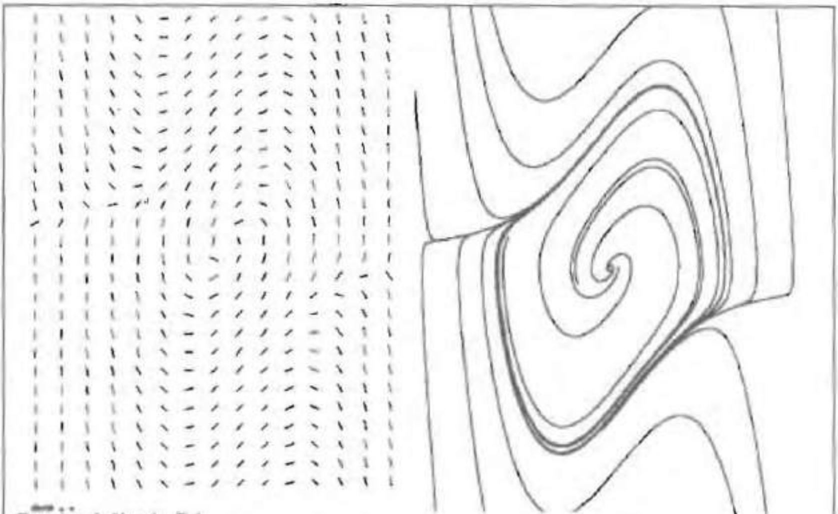
Mais je voudrais insister sur un point important. C'est que ce théorème est vrai en dimension 2. Poincaré n'a jamais dit que c'était vrai en dimension supérieure, mais certains de ses lecteurs n'ont pas vraiment compris ce point. Il a fallu du temps avant de se rendre compte de l'importance de l'aspect bi-dimensionnel, et cela a exagéré l'optimisme des scientifiques du début du XX^e siècle. D'autant que cela renvoie à ce à quoi nous sommes habitués en physique : après un certain régime transitoire, on arrive à un régime permanent : ou bien le système se stabilise, ou bien il a des oscillations périodiques.

Mais c'est trop simpliste. Les choses sont en fait plus compliquées. Poincaré le savait, mais il n'a pas insisté assez lourdement, si bien que ses successeurs se sont un peu fourvoyés. La preuve que Poincaré le savait, c'est que dans le célèbre mémoire «*sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*» qu'il a fait à l'occasion du soixantième anniversaire du roi Oscar II de Suède, il a explicitement mentionné l'existence de nombreuses orbites périodiques ayant un comportement extrêmement compliqué, qu'il avait très bien compris. L'histoire de ce mémoire est d'ailleurs intéressante.

Poincaré a remporté le prix (2 500 couronnes) de ce grand concours international organisé par l'Académie des Sciences de Suède. Et puis, lors de la correction des épreuves, il s'est rendu compte que son mémoire était faux : il avait encore fait preuve d'un optimisme exagéré en pensant à tort que certaines séries convergeaient (toujours les séries !). Catastrophe pour l'organisateur du prix qui, entouré des plus grands mathématiciens de l'époque (Weierstrass et Hermite entre autres), avait élu le mémoire de Poincaré !. Alors ce dernier, confus, promet de travailler dur pour faire quelque chose. Et, avec sa très grande puissance, il y arrive : moins de six mois après il livre un nouveau mémoire, vraiment remarquable.

Mais le pauvre Poincaré fut obligé de payer de ses deniers la fabrication du deuxième mémoire (3 500 couronnes) et il a perdu mille couronnes dans l'histoire, ce qui n'était pas une plaisanterie (pour donner un ordre de grandeur, l'organisateur du prix avait à l'époque une rétribution de 10 000 couronnes).

Revenons au théorème de Poincaré-Bendixson. Voici un exemple très simple d'application, en dimension 2, de la méthode qualitative de Poincaré. Il s'agit d'une équation différentielle très connue, l'équation de Van der Pol. Elle intervient dans les variations de tension électrique dans un néon (les oscillations de relaxation). Elle n'est pas très compliquée, mais on n'arrive pas à la résoudre explicitement. Voici le champ de vecteurs et, tracées avec un logiciel, les trajectoires solutions de l'équation de Van der Pol.



Equation de Van der Pol

dx/dt = y ; dy/dt = -y*(x*x-1)-x

-4.24299 < x < 4.05607 ; -3.65599 < y < 3.82312

-10 < a < 10

-7.5 < b < 7.5

Vous voyez qu'apparaît une singularité au milieu. Cette singularité est répulsive et toutes les orbites convergent vers un cycle limite que l'image informatique fait apparaître. Mais le théorème de Poincaré-Bendixson permet de démontrer l'existence de ce cycle périodique et pour un mathématicien c'est bien sûr très différent de voir et de démontrer.

Nous sommes là au début du XX^e siècle (l'équation de Van der Pol date des années 1920-1930). Enthousiasme général : grâce aux méthodes de Poincaré tout va être très facile, on pourra démontrer que tout converge vers des solutions périodiques, des points fixes, ou des choses très simples. Pour vous montrer à quel point l'excès d'optimisme peut induire en erreur les mathématiciens, voici une copie d'un article du grand mathématicien américain Stephen Smale, le successeur de Poincaré, celui qui a renouvelé sa théorie des systèmes dynamiques.

Smale, qui a maintenant une soixantaine d'années, s'attaque en 59 au problème des champs des vecteurs et de leurs orbites en dimension n (et pas seulement en dimension 2 comme Poincaré). Il veut travailler non pas sur une équation différentielle particulière, mais sur les champs de vecteurs en général. Et il conjecture qu'un champs de vecteurs n'a en général qu'un nombre fini d'orbites périodiques.

ON DYNAMICAL SYSTEMS
by STEPHEN SMALE (1959)

> The set of all C^{∞} vector fields on M with the C^1 topology (roughly X and X' are close if they are pointwise close and their first derivatives are pointwise close) form a space, say B. In view of the preceding paragraph we should look for a set C (B where C is open and dense in B and moreover is amenable to classification in some sense. Although we are far from answering this, we would like to propose a candidate for such a C.
> We say X belongs to C if it satisfies the following five conditions :
> (1) There are a finite number of singular points of X, say β_1 , ... , β_k , each of simple type. This means that at each β_i, the matrix of first partial derivatives of X in local coordinates has eigenvalues with real part non-zero.
> **(2) There are a finite number of closed orbits of X, say β_{k+1}, ... , β_m, each of simple type. This means that no characteristic exponent (...) of β_i, $i > k$, has absolute value 1.**

Bien sûr Smale savait qu'il existe des champs de vecteurs ayant une infinité d'orbites périodiques. On peut construire des exemples, ne serait-ce que le mouvement keplerien où les planètes ont toutes des orbites périodiques, mais Smale pensait que, dans ces exemples, ce fait était dû à une particularité de l'équation, et il a conjecturé en 59 que, en dehors de certains cas particuliers, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites périodiques (voir phrase ***encadrée***). Cette conjecture, complètement fausse, fait sourire aujourd'hui. Mais c'est parce que nous avons derrière nous le travail de nombreux mathématiciens, à commencer par Smale lui-même, qui, autour des années 65, a trouvé de nombreux contre-exemples. En fait c'est dommage que Smale n'ait pas travaillé avec d'autres scientifiques que des mathématiciens. C'est dommage qu'il n'ait pas rencontré un météorologiste aujourd'hui très connu, Lorenz. En 63, Lorenz a travaillé sur les équations différentielles qui régissent le mouvement de l'atmosphère. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles qui sont extrêmement compliquées (beaucoup plus que pour le mouvement des planètes), et Lorenz a fait ce que font beaucoup de physiciens, il a développé en série de Fourier certaines fonctions, et puis il a tronqué les harmoniques les plus grandes pour se ramener à une équation différentielle plus simple. Il y a été très fort, puisqu'il n'a gardé que trois variables et s'est donc ramené à un champ de vecteurs dans l'espace de dimension 3. Ses équations, qui donnent le vecteur au point (x,y,z) sont simples : b, σ et r sont des constantes et vous voyez que l'équation est linéaire pour dx/dt et presque linéaire pour les deux autres (il n'y a qu'un terme non linéaire : $-xz$ pour dy/dt et xy pour dz/dt).

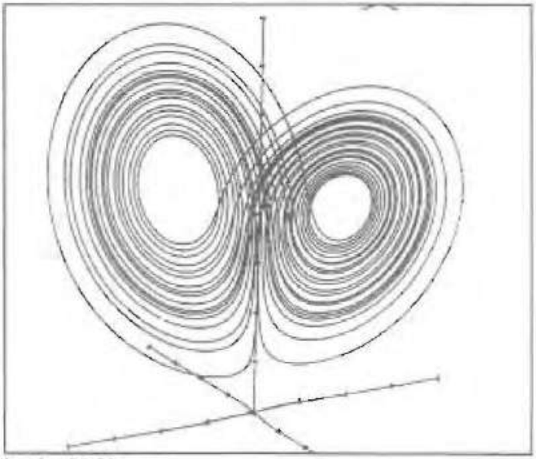
Equations de Lorenz (1963)

deterministic non periodic flows

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \;;\; \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \;;\; \frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$(b = 8/3 \;;\; \sigma = 10 \;;\; r = 28)$

Lorenz a fait tourner son ordinateur (rudimentaire à l'époque) et il est tombé sur cette figure aujourd'hui très célèbre qui s'appelle l'attracteur de Lorenz.



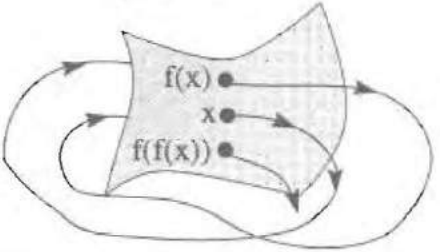
Tout à l'heure, je vous ai montré des orbites dans le cas du théorème de Poincaré-Bendixson : les orbites rentrantes convergent (après quelques zig-zags) vers un point fixe ou au pire vers une orbite périodique. Mais dans l'espèce de papillon compliqué que vous voyez là, les orbites spiralent dans tous les sens et, pour employer un mot à la mode, c'est absolument chaotique. Vous pouvez par exemple avoir une orbite périodique qui tourne 7 fois dans un sens, puis 3 fois dans l'autre sens, puis encore 7 fois dans un sens, 6 fois dans l'autre avant de revenir au point de départ. Quand on regarde de près, on trouve à l'intérieur de cet objet compliqué, une infinité d'orbites périodiques, dont les périodes tendent vers l'infini. Vous pensez peut-être qu'on peut faire quelque chose, changer un peu les coefficients, ou rajouter un petit terme non linéaire. Mais en fait, si vous «trafiquez» cette équation, la figure reste et, on peut maintenant le démontrer, elle est stable par perturbation. L'attracteur de Lorenz est là, avec son infinité d'orbites périodiques, et on ne peut rien y faire. C'est fondamental parce que, si l'on veut comprendre un peu le mouvement atmosphérique, on tombe sur des équations différentielles qui, même si on les trivialise au point d'en arriver à un modèle naïf de dimension 3, sont déjà d'une complexité extrême.

J'arrête là l'histoire, car cela me mènerait trop loin. Il y a beaucoup de choses compliquées à raconter. Mais j'ai choisi deux exemples. Je vous présenterai en détail le premier et pour le second je ferai comme disent les américains : juste agiter un peu les bras pour vous montrer quelques petites choses.

Avant tout il faut introduire quelque chose qui est encore dû à Poincaré et qui s'appelle l'application de premier retour de Poincaré. Vous avez un champ de vecteurs, que j'imagine de dimension 3, vous prenez une section transversale, c'est-à-dire un petit bout de surface S transverse aux orbites et vous suivez la trajectoire d'un point X jusqu'au moment où elle revient taper dans S. Vous obtenez ainsi une application f de S dans S.

Application de premier retour de Poincaré

$f : S \to S$

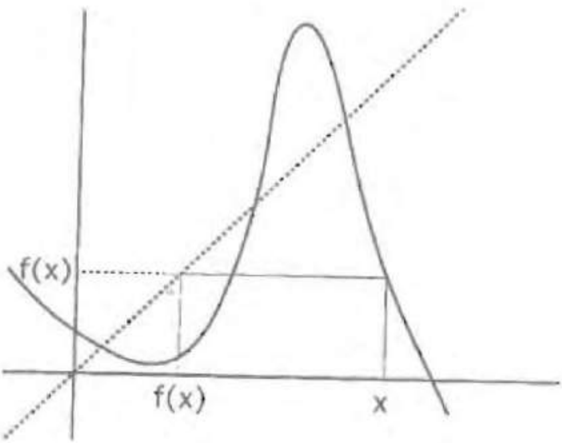


La trajectoire de x va couper successivement S aux points x, $f(x)$, $f \circ f(x)$, ... De sorte que comprendre comment est fait le champ de vecteurs, comment sont faites les orbites, c'est à peu près la même chose que comprendre comment sont faites les itérations de f : f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ...

Une orbite périodique correspond à un point périodique x de f. Cela permet d'étudier un champ de vecteurs sans se compliquer la vie avec des équations différentielles qui, de toute façon, sont trop difficiles à résoudre.

Je vous propose de regarder un cas particulier, le cas le plus simple où la transversale S est de dimension 1.

Pour mon prémier exemple, je considère une application f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



On note f^k la composition $\overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{k \text{ fois}}$.

Un point x est un **point périodique de période k** si $f^k(x) = x$ et si $f(x)$, $f^2(x)$, ... , $f^{(k-1)}(x)$ sont différents de x.

Je vais vous parler d'un théorème publié en 1975 par deux mathématiciens américains, Li et Yorke, et qui a eu beaucoup de succès avec un titre superbe : "La période 3 entraine le chaos ". En fait ce théorème avait aussi été publié en 64 par Sarkovskii, mais avec un titre moins médiatique...

T.Y. Li & J. Yorke :	**Sarkovskii :**
Period three implies chaos (1975)	***Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself (1964)***

Je vais énoncer ce théorème, et puis, si vous me le permettez, je vais vous le démontrer. Parce que les maths sans preuve, ça n'est rien. Les maths ne sont pas que des preuves, mais, j'insiste lourdement, il faut démontrer quand on fait des maths. Et malgré toutes les mises en garde de mes collègues, je tiens à montrer l'exemple en vous faisant une démonstration pendant ma conférence.

Il faut d'abord que je vous décrive une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$ tout à fait amusante. La voici :

L'ordre de Sarkovskii $\lhd$

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \ldots \lhd (2n+1) \lhd \ldots$$
$$6 \lhd 10 \lhd 14 \lhd 18 \lhd \ldots \lhd 2(2n+1) \lhd \ldots$$
$$12 \lhd 20 \lhd 28 \lhd 36 \lhd \ldots \lhd 4(2n+1) \lhd \ldots$$
$$\ldots$$
$$3.2^k \lhd 5.2^k \lhd 7.2^k \lhd 9.2^k \lhd \ldots \lhd (2n+1).2^k \lhd \ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots \lhd 64 \lhd 32 \lhd 16 \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd(1$$

On range d'abord, dans l'ordre habituel, tous les nombres impairs (sauf 1). Puis, après eux, tous les doubles d'impairs, et ensuite les quadruples d'impairs, etc... En continuant ainsi indéfiniment, il ne manque que les puissances de 2, que l'on range dans l'ordre contraire de l'ordre habituel et ainsi cela se termine par 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Venons-en au théorème, qui me plaît pour sa généralité et sa simplicité, et qui est optimal (on ne peut pas l'améliorer). Le voici :

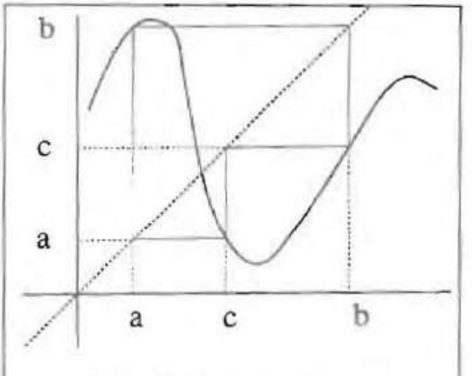
THEOREME DE SARKOVSKII

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.
Soient m et n deux entiers non nuls tels que : $m \lhd n$.
Si f possède un point périodique de période m, alors f possède aussi un point périodique de période n.
Par exemple, si f possède un point périodique de période 3, alors f possède des points périodiques de toutes les périodes (et, en particulier, une infinité d'orbites périodiques).

Si par exemple, vous avez un point périodique de période 9, ce théorème garantit l'existence de points périodiques de toutes les périodes, sauf peut-être 3, 5 et 7.

Je vais seulement démontrer le cas particulier où $m = 3$, qui est d'ailleurs le théorème de Li et Yorke. Ces derniers avaient démontré le cas particulier de la période 3 sans avoir conscience de la structure ordonnée dans l'ensemble de toutes les périodes.

A titre d'exemple, regardez ce graphe d'une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec un point a de période 3. Le théorème de Sarkovskii dit que sur ce graphe là je peux trouver un point périodique de période 7 par exemple.



$f(a)=b$; $f(b)=c$; $f(c)=a$

Et c'est ce que je vais démontrer, en commençant par trois lemmes.

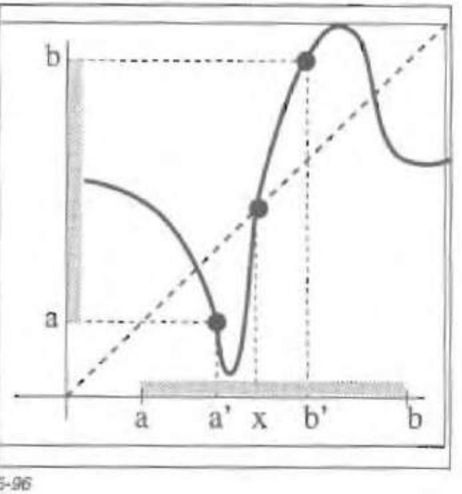
Lemme 1: Soit $J = [a,b]$ un intervalle fermé tel que $J \subset f(J)$. Alors J contient un point fixe de f.

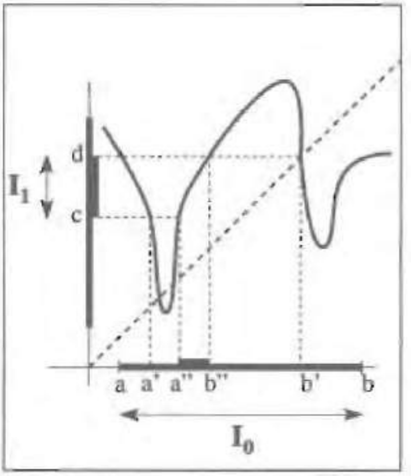
Démonstration : Soient $a' \in [a,b]$ tel que $f(a') = a$ et
$b' \in [a,b]$ tel que $f(b') = b$.

La quantité $f(x) - x$ est négative ou nulle pour $x = a'$ et positive ou nulle pour $x = b'$. Elle s'annule donc en un certain point de $[a',b'] \subset [a,b]$.

CQFD

Comme vous le voyez, la preuve est d'une redoutable simplicité : le fait que $f(J)$ recouvre J assure l'existence de a' et b'.
$f(a') - a = a - a' < 0$ puisque $a' \in J = [a,b]$
et $f(b') - b' = b - b' \geq 0$ puisque $b' \in J = [a,b]$.
f étant continue, la différence $f(x) - x$ aussi. Et comme elle change de signe, elle s'annule entre a' et b', ce qui donne un point fixe de f.





Lemme 2 : Si $\mathrm{I}_1 \subset f(\mathrm{I}_0)$, il existe un intervalle J_0 contenu dans I_0 tel que

$$f(\mathrm{J}_0) = \mathrm{I}_1.$$

C'est très intuitif (voir la figure), mais voici la démonstration formelle.

Démonstration :
$\mathrm{I}_0 = [a,b]$ et $\mathrm{I}_1 = [c,d]$.
Soit $a' \in [a,b]$ tel que $f(a') = c$.
Soit $b' \in [a,b]$ tel que $f(b') = d$.
On suppose par exemple que $a' < b'$ (sinon raisonnement analogue)
Soit $a'' = \max \{x \in [a',b'] \mid f(x) = c\}$
Soit $b'' = \min \{x \in [a'',b'] \mid f(x) = d\}$
Pour tout x de $[a'',b'']$,
on a $c \leq f(x) \leq d$, $f(a'') = c$ et $f(b'') = d$ c'est-à-dire que $f([a'',b'']) = [c,d]$.
L'intervalle $\mathrm{J}_0 = [a'',b'']$ fait l'affaire...

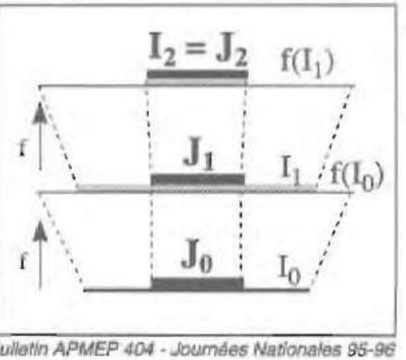
CQFD

(L'existence de a' et b' est assurée par le fait que $f(\mathrm{I}_0)$ recouvre I_1 . a'' est la "dernière fois" où $f(x) = c$ et b la "première fois" où $f(x) = d$)

Passons au troisième et dernier lemme. On a ici affaire à une suite d'intervalles, et on itère le second lemme en faisant une récurrence.

Lemme 3 : Si $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_n$ est une suite finie d'intervalles fermés telle que :

$\mathrm{I}_1 \subset f(\mathrm{I}_0), \mathrm{I}_2 \subset f(\mathrm{I}_1)$, etc..., $\mathrm{I}_n \subset f(\mathrm{I}_{n-1})$,
alors il existe des intervalles fermés $\mathrm{J}_0, \mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_n$ tels que :
$\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}_0,\ f(\mathrm{J}_0) = \mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I}_1, f^2(\mathrm{J}_0) = \mathrm{J}_2 \subset \mathrm{I}_2, \dots, f^n(\mathrm{J}_0) = \mathrm{J}_n = \mathrm{I}_n$.

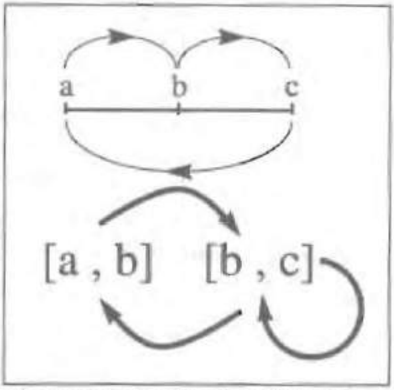


Démonstration :
Pour $n = 1$, c'est le lemme 2.
Pour $n = 2$: il existe $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I}_1$ tel que $f(\mathrm{J}_1) = \mathrm{I}_2$.
On a $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I}_1 \subset f(\mathrm{I}_0)$.
Il existe $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}_0$ tel que $f(\mathrm{J}_0) = \mathrm{J}_1$.
L'intervalle J_0 fait l'affaire.
Le cas général se fait **par récurrence**.

CQFD

Je peux maintenant démontrer le théorème. Rappelez-vous : si f possède un point périodique de période 3, elle admet un point périodique de n'importe quelle période.

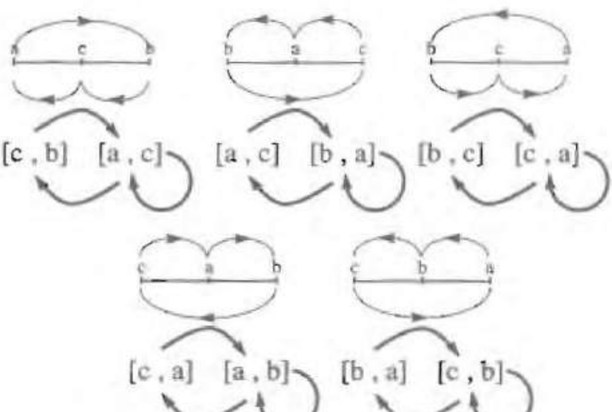
Je suppose que j'ai un point a, périodique de période 3. a a pour image b, qui donne c, qui revient sur a. Voici la figure dans le cas où $a < b < c$. L'image de $[a,b]$ recouvre au moins $[b,c]$ puisque $f(a) = b$ et $f(b) = c$.



De même l'image de $[b,c]$ recouvre au moins $[a,c]$ et a fortiori elle recouvre les intervalles $[b,c]$ et $[a,b]$ qui sont inclus dans $[a,c]$.

La figure ci-contre schématise ces recouvrements.

Il y a cinq autres cas possibles en ce qui concerne l'ordre des réels a ,b, c. Mais dans chaque cas on a un schéma de recouvrement du même type (à l'ordre des lettres près).



Je ne ferai donc la démonstration que pour la premier cas ($a < b < c$). Pour fabriquer un point périodique de période 7 par exemple, il suffit de regarder la suite de huit intervalles :

$$[a,b]\ [b,c]\ \ [b,c]\ [b,c]\ \ [b,c]\ [b,c]\ \ [b,c]\ [a,b]$$

D'après le premier schéma de recouvrement, l'image de chacun recouvre le suivant. Donc d'après le lemme 3 appliqué à cette suite d'intervalles, on peut trouver à l'intérieur de $[a,b]$ un sous intervalle J_0 tel que $f^7(I_0) = I_7 = [a,b]$.

Ainsi $f^7(I_0)$ recouvre I_0 (qui est inclus dans $[a,b]$) et, d'après le lemme 1, I_0 contient un point fixe de f^7. Ayant trouvé un point x tel que $f^7(x) = x$, il reste juste à vérifier que ce point n'est pas périodique de période plus petite. Mais c'est évident puisque, au cours de sa trajectoire, x part de $[a,b]$ et va dans $[b,c]$ les six fois suivantes pour ne revenir dans $[a,b]$ que la septième fois. x est bien un point de période 7. Et ce que j'ai fait avec $n = 7$, je peux le faire avec n'importe quel nombre n. (pour $n = 1$, il suffit d'appliquer le lemme 1 à l'intervalle $[b,c]$).

Fin de la démonstration :

Soit a un point périodique de période 3, $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$. On suppose $a \leq b \leq c$.

Pour n ≥ 1, on pose : $I_0 = [a,b]$; $I_1 = I_2 = \dots = I_{n-1} = [b,c]$; $I_n = [a,b]$.

D'après le lemme 3, il existe des intervalles fermés $J_0, J_1, \dots, J_n$ tels que :

$J_0 \subset [a,b]$,

$f(J_0) = J_1 \subset [b,c]$,

$f^2(J_0) = J_2 \subset [b,c]$,

...

$f^{n-1}(J_0) = J_{n-1} \subset [b,c]$,

$f^n(J_0) = J_n = [a,b]$.

D'après le lemme 1, il existe un point x de J_0 tel que $f^n(x) = x$. Puisque les points $f^i(x)$ pour $0 < i < n$ sont dans l'intervalle $[b,c]$, ils sont différents de x : x est un point périodique de période exactement n.

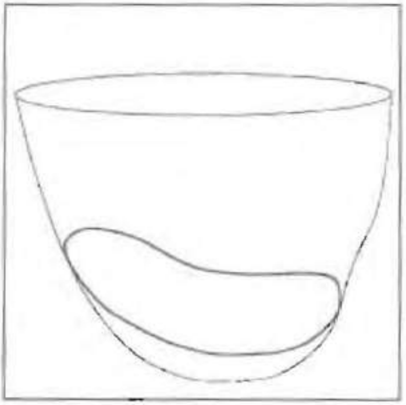
CQFD

La démonstration du théorème de Sarkovskii dans le cas général utilise essentiellement le même genre de méthodes.

Je voulais vous montrer cela d'une part pour faire une démonstration, mais aussi pour vous montrer qu'il y a des théorèmes du XX^e siècle qui ne sont pas si difficiles.

Je vais maintenant passer à mon deuxième exemple et vous parler d'une autre recherche au sujet des orbites périodiques. Ce sujet remonte lui aussi jusqu'à Poincaré, lorsqu'il cherchait à comprendre les orbites dans les mouvements des corps célestes.

La conjecture dont je vais vous parler date de 1948 et est due à un mathématicien allemand immigré aux Etats-Unis, Seifert.



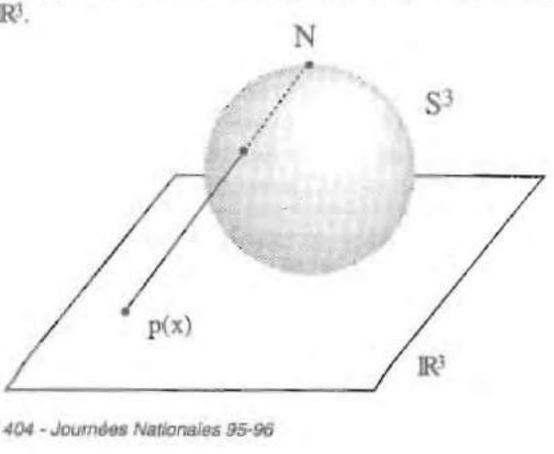
En voici d'abord une forme imagée :

Imaginez une cuvette telle que, si vous lancez une bille dans cette cuvette, toutes les trajectoires possibles sont périodiques, exactement de la même façon que, quand vous lancez une planète sans forces perturbatrices autour du soleil, toutes les trajectoires sont périodiques.

Imaginez maintenant qu'on déforme un tout petit peu la cuvette. Lorsque la bille passe dans la région déformée, cela créé une petite perturbation qu'on aimerait pouvoir étudier, comme on aimerait pouvoir étudier le mouvement des planètes du système solaire en tenant compte non seulement de l'attraction principale du soleil, mais aussi des petites perturbations dues aux interactions des planètes. Et bien la conjecture de Seifert prévoit que, quelle que soit la façon dont on déforme la cuvette, il subsiste toujours au moins une orbite périodique.

Cette conjecture a engendré de nombreuses questions qui ne sont pas toutes résolues aujourd'hui. Mais il faut d'abord que je vous parle de la sphère de dimension 3. De la même façon que la sphère de dimension 2 est plongée dans $\mathbb{R}^3$, la sphère de dimension 3 est plongée dans $\mathbb{R}^4$. Mais comme il est difficile d'imaginer $\mathbb{R}^4$, on peut utiliser la projection stéréographique.

Je fais bien sûr une figure comme je peux, c'est-à-dire en dimension 3 ou plutôt 2 ! Ceci représente $\mathbb{R}^4$. Dans $\mathbb{R}^4$, j'ai dessiné la sphère de dimension 3, un point que j'appelle pôle nord, et le sous espace tangent au pôle Sud qui est bien sûr $\mathbb{R}^3$.



La projection stéréographique réalise une bijection entre S^3 - {N} et $\mathbb{R}^3$ de sorte que, pour imaginer ce qu'est S^3, on peut oublier le pôle Nord et identifier canoniquement à $\mathbb{R}^3$ ce qui reste.

Pour dire les choses clairement : de même que, pour la vie de tous les jours, on peut identifier la terre à un plan, vous pourrez, dans tout ce que je vais dire par la suite, penser $\mathbb{R}^3$ chaque fois que je parlerai de la sphère de dimension 3. Vous ne vous tromperez pas beaucoup : il ne vous manquera qu'un point. Mais si vous voulez faire mieux, vous pouvez rajouter un point à l'infini pour avoir le compactifié d'Alexandrov.

Alors voici ce qu'a conjecturé Seifert en 1948 :

Conjecture de Seifert (1948)
Tout champ de vecteurs sur la sphère S3 possède une singularité ou une orbite périodique.

Quel est le rapport avec la cuvette de tout à l'heure ? Pour le dire très rapidement : le lancer d'une bille dans la cuvette est décrit par quatre nombres : x et y pour donner la position de départ, Vx et Vy pour donner la vitesse initiale. Le fait que l'énergie totale (potentielle et cinétique) soit constante conduit à l'équation $x^2 + y^2 + v_x^2 + v_y^2 = 1$. Autrement dit tout se passe en fait comme sur une sphère unitaire dans un espace de dimension 4 et c'est ainsi que Seifert a été naturellement amené à poser ainsi sa conjecture en 1948.

1974 : Contre-exemple de classe C^1 par P. Schweitzer

En 74 coup de tonnerre : le mathématicien (américain à l'époque, brésilien maintenant) Paul Schweitzer construit un contre-exemple de classe C^1. Il faut dire que Seifert avait posé sa conjecture sans préciser si le champ de vecteurs devait être C^1, ou C^2, ou C^∞, ou analytique,... Schweitzer a fait ce qu'il a pu avec un contre-exemple dérivable une fois, mais pas deux. Et il ne pouvait absolument pas se départir du fait que son exemple n'était pas deux fois différentiable. Cela était-il lié à l'exemple ou à la conjecture ?

1988 : Contre-exemple de classe C^2 par J. Harrison

Parmi les mathématiciens qui ont travaillé à cette question, Jenny Harrison, mathématicienne anglaise, a travaillé dur pour parvenir à un contre-exemple de classe C^2.

Sa construction, pour gagner une dérivée, était d'une complexité inouïe et elle a mis beaucoup de temps à convaincre ses collègues que cela marchait. Cette complexité a démoralisé beaucoup de monde ; on avait l'impression qu'un contre-exemple C^3 était inaccessible. Il manquait une idée.

1994 : Contre-exemple de classe C^∞ par K. Kuperberg

Cette idée, c'est une mathématicienne polonaise qui a émigré aux Etats-Unis il y a une quinzaine d'années, Krystina Kuperberg, qui l'a eue. Krystina Kuperberg a réussi le tour de force de fabriquer un contre-exemple C^∞, et même analytique, tout ce dont on peut rêver !

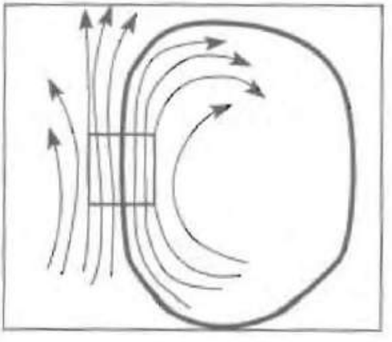
Ici, je ne vais rien démontrer, je vais juste vous montrer quelques dessins. Mais ce n'est pas si difficile, cela n'utilise pas de technologie compliquée, c'est juste un peu de chirurgie. Si j'avais, disons deux heures de plus, je pourrais vous expliquer tous les détails.

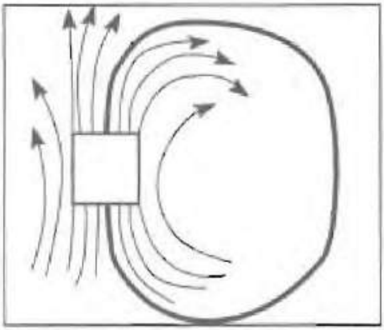
Krystina Kuperberg a eu la bonne idée de ne pas essayer de poursuivre ce qu'avaient fait P. Schweitzer et J. Harrison, mais de chercher quelque chose de très différent. Elle a eu une idée très simple et très jolie en reprenant une idée du mathématicien américain Wilson, qui remonte aux années 60. Wilson n'avait pas réussi à construire un contre-exemple, mais il avait inventé le concept de piège pour un champ de vecteurs.

L'idée de Wilson est la suivante : si l'on veut construire un champ de vecteurs sans orbite périodique, on commence par prendre n'importe quel champ de vecteurs. Malheureusement il a une orbite périodique, que l'on va casser, que l'on va faire tomber dans un piège.

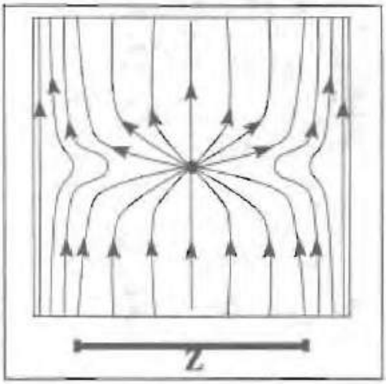
Voici une B.D. qui illustre en dimension 2 la méthode des pièges de Wilson :

1°) Prenez sur l'orbite périodique un petit carré dont deux des côtés sont transverses au champ, et deux sont tangents.

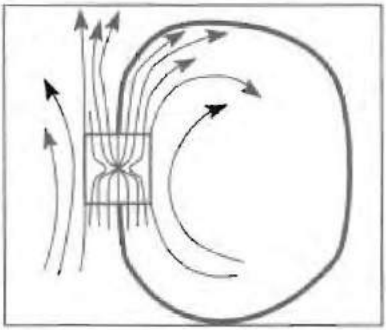




2°) Avec des ciseaux, retirez le petit carré. Votre orbite périodique est cassée, mais vous avez un trou dans votre champ de vecteurs, c'est un peu gênant. Alors, il va falloir coller une rustine.



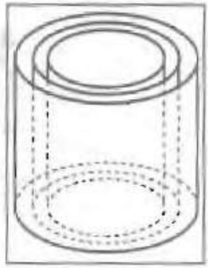
3°) Voici le champ de vecteurs que vous pouvez prendre pour rustine. Il est, comme il se doit, tangent à deux côtés du carré, et transverse aux deux autres, et au milieu il y a une singularité. Alors qu'arrive t-il aux orbites ?
Si une orbite rentre hors de la zone Z, elle ressort exactement en face. Par contre, si elle rentre dans la zone Z, elle est happée par le point singulier, et ne sort plus. Elle est prise au piège.



4°) Il ne vous reste plus qu'à coller la rustine dans le trou. L'orbite périodique initiale a été piégée. Et vous n'avez pas, ce faisant, créé d'autres orbites périodiques puisque les orbites qui entrent et ressortent le font exactement comme avant. Autrement dit la structure des orbites à l'extérieur de la rustine est inchangé.

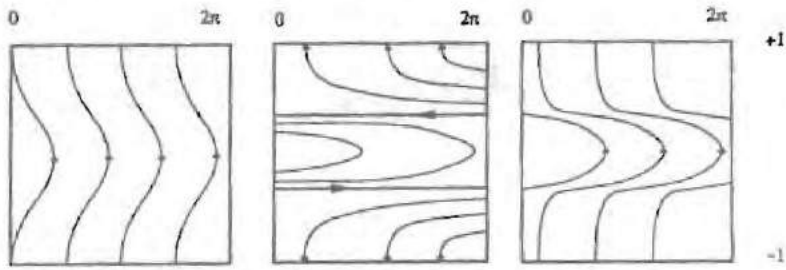
Oui, mais le problème posé par la conjecture de Seifert est de casser les orbites périodiques sans pour autant introduire de singularité et c'est pour cela que l'idée de Wilson ne lui a pas permis de construire un contre-exemple. Cependant l'idée de piège est bonne, et Schweitzer (qui a construit un contre-exemple C^1) a lui aussi utilisé un piège. Un piège qui a une topologie compliquée. Je ne veux pas vous l'expliquer, cela nous mènerait trop loin et de toute façon le mérite de K. Kuperberg a été de ne pas suivre la même voie : elle a gardé l'idée du piège, elle a gardé l'idée que la topologie peut-être extrêmement compliquée, mais elle a complètement changé ce qu'il y a à l'intérieur du piège.

LE PIEGE DE KUPERBERG



Je vais vous le montrer rapidement, avec quelques dessins, juste pour vous convaincre que l'idée est simple. Il fallait y penser !
Tout d'abord voici le point de départ, un piège très élémentaire, dû aussi à Wilson. Il a la forme d'une boîte de conserve remplie par des cylindres coaxiaux.

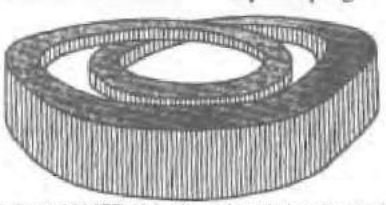
Et si je l'épluche comme un oignon, j'obtiens ces carrés qui décrivent le champ de vecteurs qu'on met à l'intérieur.

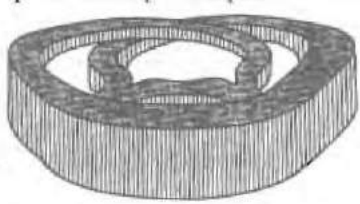


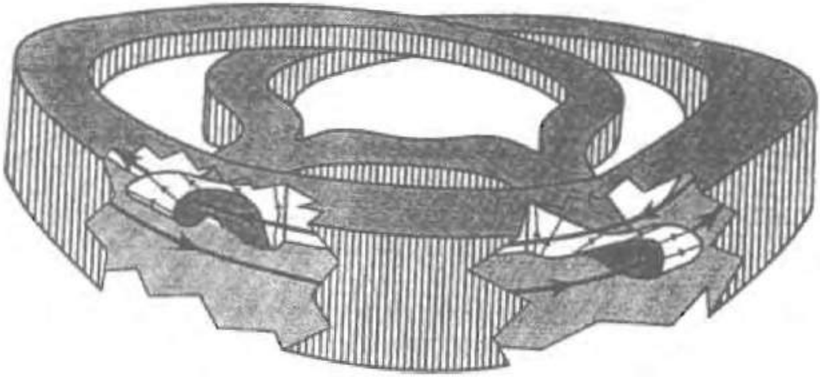
r = 1 ou 3 | r = 2 | r = 2

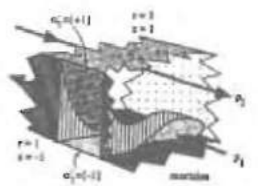
Sur les cylindres qui sont près du bord extérieur, ou du bord intérieur, les orbites vont gentiment de bas en haut : elles traversent, entrent et sortent. Mais pour un cylindre intermédiaire, elles sont barrées par deux orbites périodiques. Piège sans intérêt puisqu'en voulant piéger des orbites périodiques, il introduit deux nouvelles orbites périodiques.

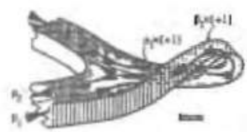
L'idée de Kuperberg, c'est de demander au serpent de se mordre la queue, au piège de se piéger lui-même. C'est très astucieux. Le piège va se pénétrer lui-même de façon à piéger ses propres orbites périodiques.











Et ça marche ! Vous apercevez dans la figure du milieu les deux orbites périodiques interceptées par l'auto-insertion du piège dans lui-même.
Les trois dernières figures sont des schémas locaux qui en quelque sorte, contiennent la preuve. Une preuve visuelle.

Bien sûr l'intérieur du piège est compliqué, mais l'idée est simple et en ayant cette idée, Krystina Kuperberg a damé le pion à tous les spécialistes d'analyse. C'est ce que j'aime en maths : l'astuce.

Krystina Kuperberg n'a pas pour autant mis ses collègues au chômage, et les choses avancent très vite.

En 94, le mathématicien allemand Hofer étudie les champs de vecteurs "contact " (une propriété des champs de vecteurs qui proviennent de systèmes mécaniques ; il est donc intéressant d'étudier les champs de vecteurs "contact " ; et l'exemple de Kuperberg ne l'est pas). Ne peut-on reformuler la conjecture de Seifert en rajoutant l'hypothèse "contact" ? Et bien oui :

Théorème (H. Hofer 1994)

Tout champ de vecteurs de type "contact" sur la sphère S^3 admet une orbite périodique.

Ainsi la conjecture est fausse pour les champs de vecteurs quelconques, vraie pour les champs de vecteurs "contact". Entre les deux, il y a les champs de vecteurs qui préservent le volume. Qu'en est-il pour eux ? En 1995, Greg Kuperberg (le fils de Krystina) reprend la question et trouve un contre-exemple C^1.

Pour C^∞, la question reste ouverte. Peut-être aura-t-on avancé l'année prochaine.

Théorème (G. Kuperberg 1995)

Il existe un champ de vecteurs de classe C^1 sur S^3 qui préserve le volume et qui ne possède ni position d'équilibre ni orbite périodique.

Problème :

Un champ de vecteurs de classe C^∞ sur S^3 qui préserve le volume possède-t-il nécessairement une orbite périodique ou une position d'équilibre ?

Des questions ouvertes, il y en a tant qu'on veut. Je vais terminer en vous citant quelques exemples. L'une des plus vieilles questions des systèmes dynamiques est ce qu'on appelle le closing lemma : un champ de vecteurs peut ne pas avoir d'orbite périodique, mais dans ce cas peut-on, par une toute petite perturbation, s'arranger pour qu'il en ait une ?

Closing lemma :

Peut-on approcher tout champ de vecteurs par un autre qui possède une orbite périodique ?

En 68-70, C. Pugh (le mari de J. Harrison) démontre que oui, à condition de ne pas être trop gourmand sur l'approximation.

C. Pugh : oui

si on ne cherche à approcher que les premières dérivées des champs de vecteurs.

Inconnu si on cherche à approcher aussi les dérivées secondes ...

C'est l'une des questions ouvertes les plus difficiles des systèmes dynamiques.

Autrement dit on peut poser la question ainsi : est-ce que les champs de vecteurs ont en général des orbites périodiques ? Alors tout dépend de ce qu'on met derrière "en général". Si c'est au sens de la topologie C^1, la réponse est oui ; au sens de C^2 on n'en sait rien. Après plus de 100 ans d'étude des systèmes dynamiques on ne sait toujours pas si oui ou non la plupart des champs de vecteurs ont des orbites périodiques.

En conclusion,

J'ai trois choses à vous dire, de façon plus générale.

La première c'est qu'on n'imagine pas assez à quel point le nombre de problèmes ouverts est immense. La difficulté n'est pas de trouver des problèmes, mais de les sélectionner. Environ deux millions d'articles de mathématiques ont été écrits depuis Archimède. Cette production double tous les douze ans. Sur ces deux millions d'articles, un million d'entre eux ont été écrits depuis douze ans ! Ça fait peur !

Les physiciens ont d'ailleurs une blague à ce propos. En physique, il y a moins de revues qu'en mathématiques, mais elles sont plus grosses, et un physicien peut voir presque à l'oeil nu avancer la revue dans sa bibliothèque. L'un d'entre eux avait calculé qu'en 2005 la page de couverture du dernier numéro paru aurait dépassé la vitesse de la lumière. Ce qui, concluait-il, n'est pas en contradiction avec la physique relativiste, car il n'y a aucun transport d'information !

La deuxième chose que je voulais vous dire est la suivante : les mathématiques d'aujourd'hui ne sont pas plus difficiles que celles d'il y a cent ans. Il y a encore place pour des mathématiques simples, et pour des gens qui ont des idées astucieuses. Je crois qu'il est important de le dire aux jeunes qui commencent à faire des mathématiques.

Enfin, j'ai déjà parlé de ***la troisième*** chose, mais j'insiste, non seulement en tant que mathématicien mais aussi en tant que parent d'élèves : s'il vous plaît, **faites des démonstrations dans vos cours** !.