

Les conférences des Journées Nationales APMEP
de Grenoble 1995

Les différents visages du Plan Projectif

Jean Pierre PETIT (*)

Astrophysicien, directeur de recherche au CNRS¹

Ce texte a été rédigé à l'attention des gens qui venaient assister à ma conférence du 29 octobre 1995, à Grenoble.

Je pars du principe que les notions de géométrie présentées dans mes bandes dessinées Belin :

- LE GEOMETRICON

- LE TROU NOIR

- LE TOPOLOGICON

ont été assimilées.

Le "plan projectif" est un objet bizarre. Il en existe de toutes dimensions, supérieures à un². On traitera d'objets qui sont des représentations dans \mathbb{R}^2 du "Projectif P2". Dans le Topologicon le lecteur aura trouvé, décrite en long, en large et en travers, une représentations de ce P2 dans \mathbb{R}^3 : la surface de Boy. Il en existe d'autres. C'est ce que ce texte illustrera. On montrera aussi comment on peut passer d'un de ces objets à l'autre.

Au passage je signale deux albums, qui ont été publiés par un petit éditeur du midi, qui a fait faillite depuis (pas à cause de moi) et qui édite deux albums que les fans Lanturlu pourront se procurer en s'adressant au diffuseur, qui termine le stock :

Martin Lehberger 23 rue de Fleurus 75006 Paris.

* Spécialiste de cosmologie théorique et de logique formelle, Jean-Pierre PETIT est aussi auteur de bandes dessinées scientifiques (*Le Géométricon, L'Informagique, Tout est relatif...*) : son héros, Anselme Lanturlu, est bien connu des professeurs de mathématiques.

1 - 9 Tour d'Aygosi, 13100 Aix-en-Provence

2 - Ceux qui ont une dimension 2 sont orientables. Ceux qui ont une dimension impaire sont orientables. La surface de Boy, image de P2 est inorientable.

Bulletin APMEP 404 - Journées Nationales 95-96

Il s'agit des albums:

LE LOGOTRON (langage et logique) avec présentation vulgarisée du théorème de Gödel.

LE CHRONOLOGICON (le temps en cosmologie).

Commençons par quelques notions utiles. Le concept de courbure avait déjà été évoqué dans **LE TROU NOIR** en introduisant des POSICONES et des NEGACONES. Ici, on trouvera des:

POSICOINS ET NEGACOINS.

Les "coins" sont des points de concentration de courbure. Les arêtes ne contiennent aucune courbure. Les figures 6 et 7 montrent comment créer un posicoïn correspondant à une courbure concentrée égale à $+\pi/2$ et un négacoïn à une courbure concentrée égale à $-\pi/2$.

Les figures de démarrent pas à un, mais c'est normal.

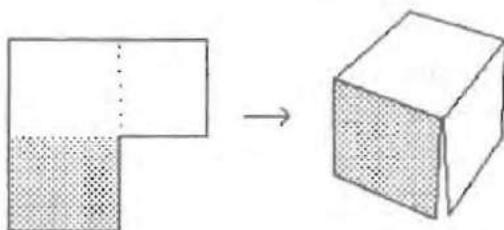


Figure 5a : Création d'un posicoïn de $+\pi/2$

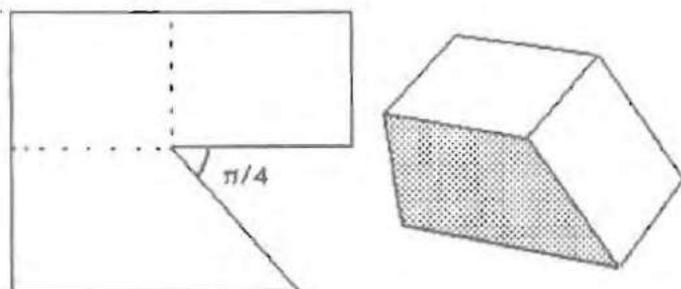


Figure 5b : Création d'un négacoïn $-\pi/2$.

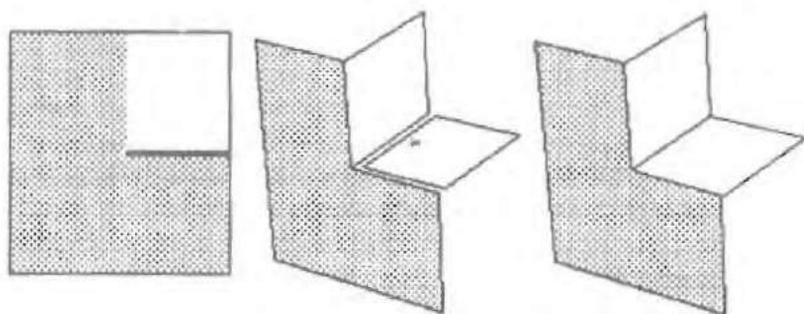


Figure 6; Création d'un négacoïn $-\pi/2$

A l'aide de huit posicoïns on peut créer un cube qui est une des représentations polyédriques de la sphère.

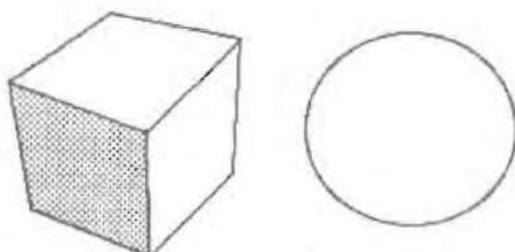


Figure 7 : le cube représentation polyédrique de la sphère

On retrouve la courbure totale de la sphère : 4π

Avec huit posicoïns et huit négacoïns on peut créer une représentation polyédrique du tore et retrouve sa courbure totale : zéro.

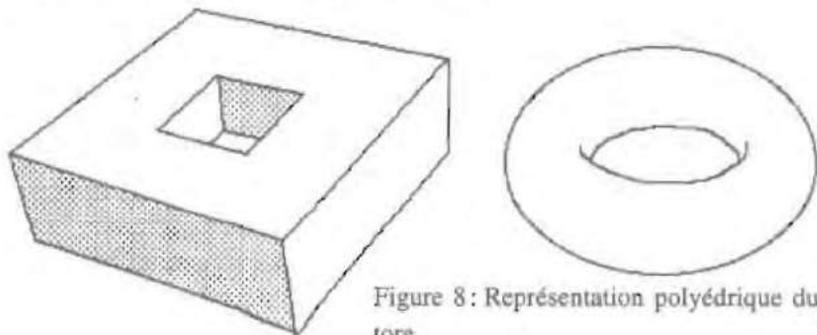


Figure 8: Représentation polyédrique du tore

POINTS CUSPIDAUX

La Cross-Cap est un des multiples visages empreintés par le plan projectif P^2 dans \mathbb{R}^3 . Il ne peut y être plongé. La Cross-Cap possède un ensemble d'auto-intersection qui se présente sous la forme d'un segment de droite, dont les extrémités correspondent à ce qu'on appelle des points cuspidaux.

Les figures 1, 2 et 3 montrent comment on peut former un point cuspidal dans des régions à courbure positive, négative, ou nulle.

Figure 1

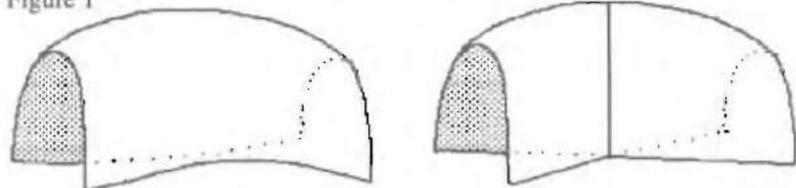


Figure 2

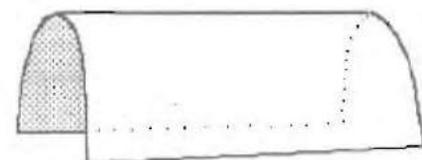
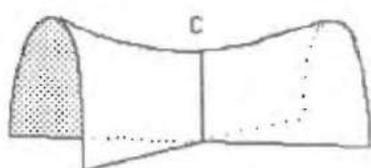
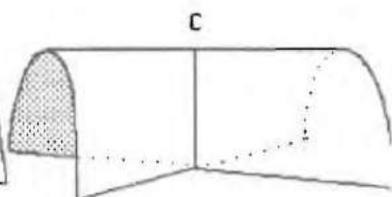
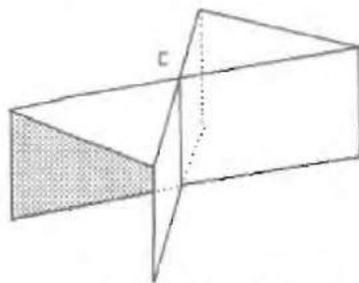


Figure 3



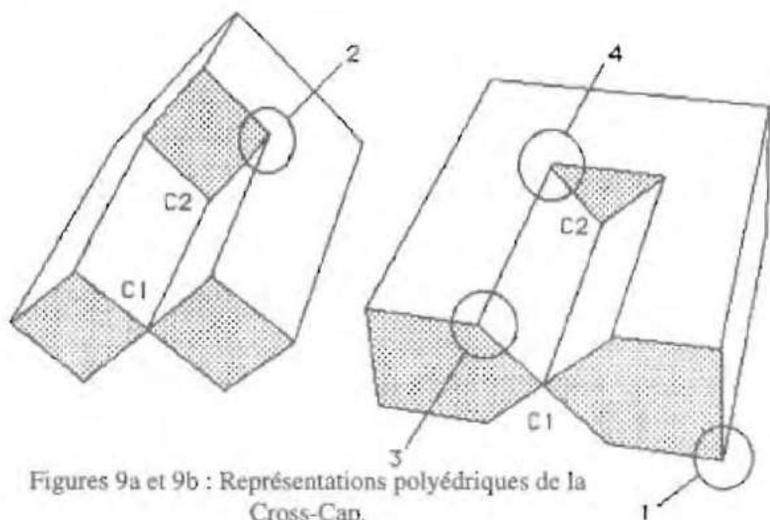
La figure 4 donne une représentation polyédrique du point cuspidal, dont nous allons nous servir par la suite.

Figure 4:
Représentation polyédrique d'un point cuspidal.



LA CROSS-CAP

Les figures 9a et 9b sont des représentations polyédriques de la Cross-Cap.



Figures 9a et 9b : Représentations polyédriques de la Cross-Cap.

On sait que la courbure totale de la Cross-Cap est égale à 2π . Comment la retrouver à partir d'une représentation polyédrique ?

La figure 10 permet de calculer la courbure concentrée dans un point cuspidal tel qu'il est présenté sur la figure 4.

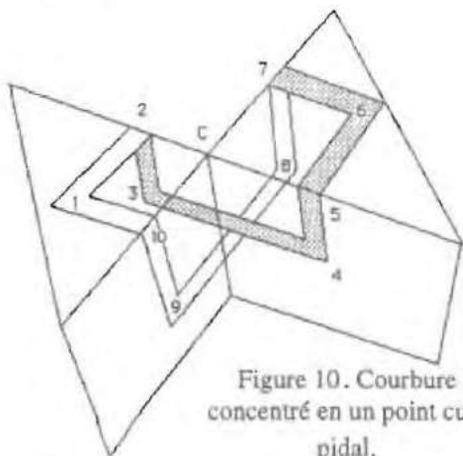


Figure 10. Courbure concentré en un point cuspidal.

Le trajet figuré comporte six angles droits. Les cassures 2, 5, 7 et 10 s'effectuent sur des arêtes et ne contiennent aucune courbure. Le trajet 1-2-3 s'effectue selon une géodésique de la surface.

La courbure concentrée en ce point cuspidal particulier, où les nappes de croisent selon des angles droits, est égale à $-\pi$.

Si on se réfère maintenant à la figure 9a et qu'on somme les courbures on trouve -2π . Il y a en effet :

- Douze posicoins $+\pi/2$
- Quatre négacoins $-\pi/2$
- Deux points cuspidaux $-\pi$
- Total 2π

Les figures 11 et 12 montrent l'identité des deux points cuspidaux C1 et C2.

Figure 11:
Assemblage
de deux
Cross-Cap
polyédriques.

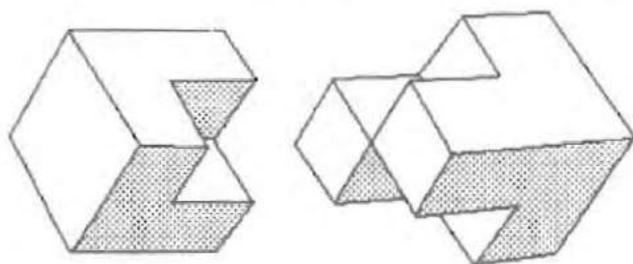
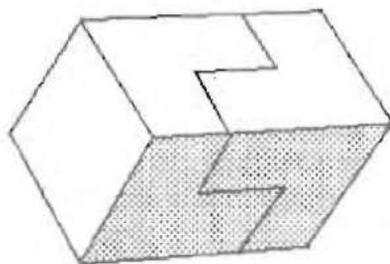
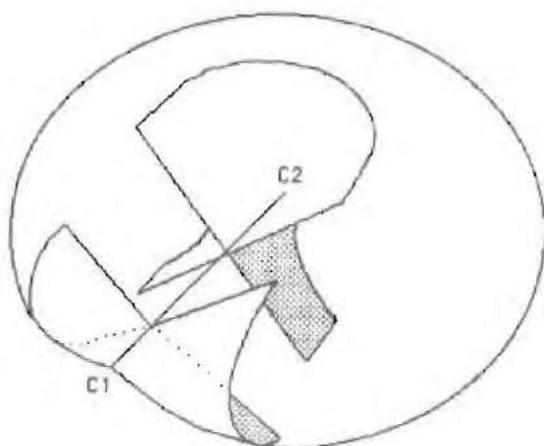


Figure 12:
L'assemblage
terminé



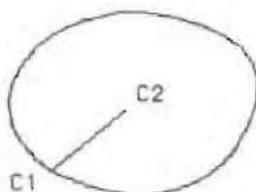
Après tout ceci nous sommes à même de bien comprendre la structure géométrique d'une Cross-Cap.

Figure 13 :
La Cross-Cap et
l'assemblage de ses
deux points cuspi-
daux.



La même, sans ces détails :

Figure 14:
La Cross-Cap et ses deux points
cuspidaux.



PERMUTATION DES POINTS CUSPIDAUX D'UNE CROSS-CAP.

Une adepte de Jacques Lacan, Jeanne Granier-Deferre, avait jadis publié un ouvrage intitulé "la Topologie selon Jacques Lacan". Comme si ce titre pouvait avoir un sens...

Les initiés savent que Lacan s'intéressa beaucoup, sur la fin de sa vie, à la topologie, et en particulier aux père-mutations.

Lacan avait en particulier modélisé "le fantasme fondamental" en utilisant une cross-cap. Pour les familiers de ce jargon de la psychanalyse lacanienne, le point organisateur est "l'objet petit à", ou "phallus linguistique". Bref Lacan, longtemps fasciné par le ruban de Mœbius, avait voulu situer celui-ci sur un objet unilatère, et son choix se porta sur la Cross Cap et sur un de ses points cuspidaux.

Quel lien entre le langage, la psy et les objets unilatères ? A cause de la dualité signifiant-signifié, il existe des chaînes de caractères qui offrent des lectures différentes selon qu'elles sont lues à l'endroit ou à l'envers, sur

le recto ou le verso. Je cite un exemple :

MOT

qui, inversé donne :

TOM

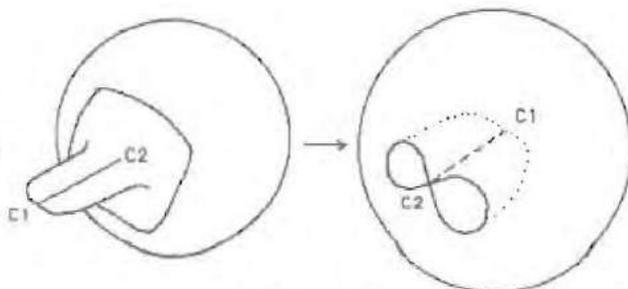
Lacan voulait ainsi, grâce à l'artifice d'une surface unilatère, évoquer ce double-sens des phrases, selon qu'on prend leur contenu en tant que signifiant ou en tant que signifié.

Il s'en suivait un discours fort compliqué (voir ses écrits, si vous en avez le courage), où une sorte de "trajectoire de langage", cerclant autour d'un "objet petit a", le "trait de la coupure", ou "refend", permettait... je ne sais plus quoi au juste. Mais qu'importe ! Toujours est-il que Lacan avait choisi de situer cet "objet petit a", son "phallus linguistique", en l'un des deux points cuspidaux de cette pauvre Cross-Cap, en négligeant l'autre, tout simplement.

Je fus un jour invité, en 1987, à parler lors d'un congrès de psychanalyse Lacanienne, à Aix. M'inspirant du prêche de Bénin, dans "Les Copains", de Jules Romains, j'exposais la transformation qui permettait de père-muter les deux points cuspidaux, comme ci-après :

Pour ce faire nous commençons par gonfler l'objet de manière à rassembler les deux points cuspidaux et le segment d'auto-intersection dans une région d'une sphère. Nous savons que nous pouvons retourner une sphère. La première version ayant été donnée par Anthony Phillips en 1967. Une seconde version fut ensuite inventée par le mathématicien Bernard Morin et publiée en 1979, aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (illustrée par l'auteur). On pourra aussi trouver la description complète de cette transformation dans le numéro de janvier 1979 de *Pour la Science*, ou dans l'ouvrage de la collection *Pour la Science*, consacré aux maths, qui a repris ce papier. Bref, servons-nous de cette faculté de retourner la sphère pour :

Figure
15a et 15b:
Avant et après
le retournement
de la sphère.



Le point cuspidal C1 est alors "à l'intérieur de la sphère". Il suffit de déformer l'objet selon les figures pour obtenir un résultat semblable à celui de la figure 15a. Mais les points cuspidaux ont alors été échangés.

Figures 16a et 16b:
On commence à déformer l'objet.

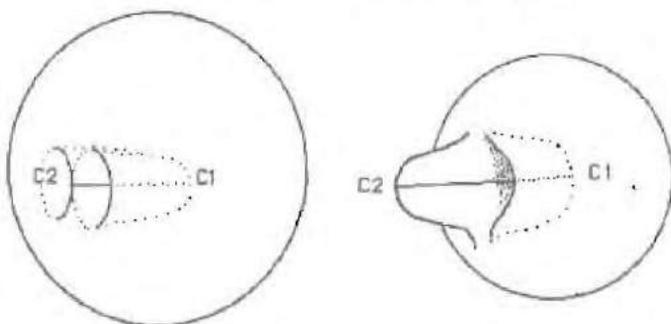
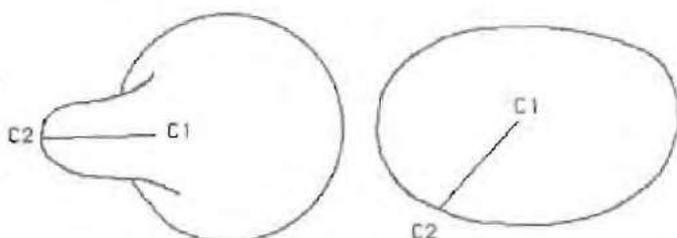


Figure 17a et 17b :
Dernière étape de la transformation.



Voilà donc nos deux points cuspidaux père-mutés. Ca n'est pas une découverte. N'importe quel géomètre savait cela possible. Mais pour les lacaniens, en ce jour de 1987, cette nouvelle créa une gêne indicible. Il y avait donc deux "Objet petit a", deux "phallus linguistiques". Lacan, avant de partir dans l'au-delà, leur avait joué un tour pendable. J'essayais vainement, tel un représentant en géométrie, de leur "vendre" la surface de Boy, qui n'avait qu'un pôle. Tout pouvait s'arranger. Il suffisait de mettre "l'objet petit a", le "phallus linguistique", en ce point. Le "trait de la coupure" s'inscrivait alors selon l'équateur (voir le Topologicon) et le "fantasme fondamental" retombait sur ses pattes. Mais le psychostress était intense et ils ne s'en remirent point.

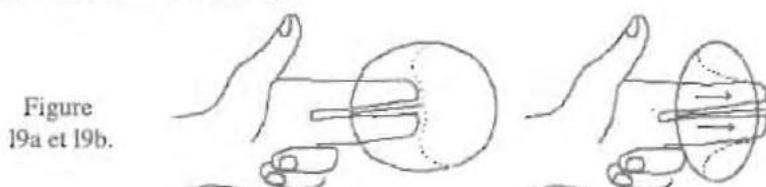
Il existe d'autres représentations de cet espace projectif P2, dont la surface romaine de Steiner. Les figures ci-après montrent comment, en jonglant avec les transformations, on peut passer de la Cross-Cap à la Steiner, via... la surface de Boy.

TRANSFORMATION DE LA CROSS-CAP EN SURFACE DE BOY VIA LA SURFACE ROMAINE DE STEINER

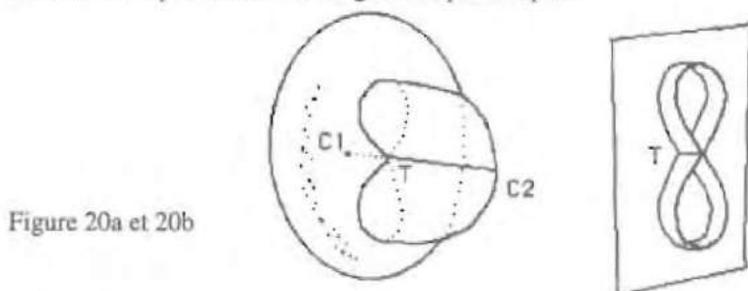
Reprenons la Cross-Cap. La figure 18b représente la surface "vue de profil". Ainsi on peut pincer le voisinage du segment d'auto-intersection entre deux doigts, comme indiqué.



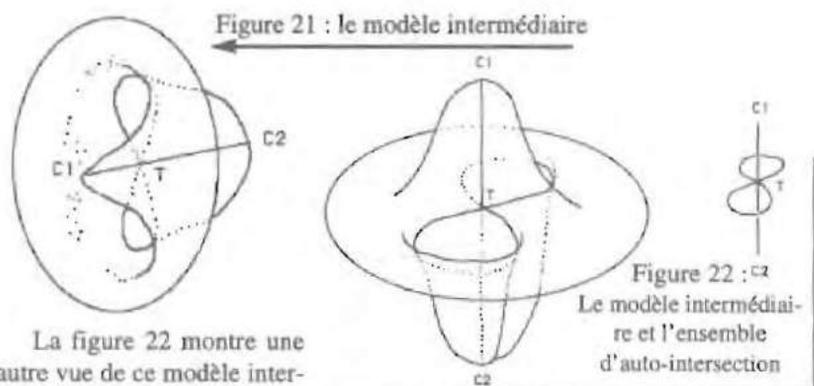
Il faut ensuite réaliser une opération semblable à un toucher vaginal de femelle de kangourou (c'est un monotrème et ses trompes de Fallope débouchent directement à la sortie).



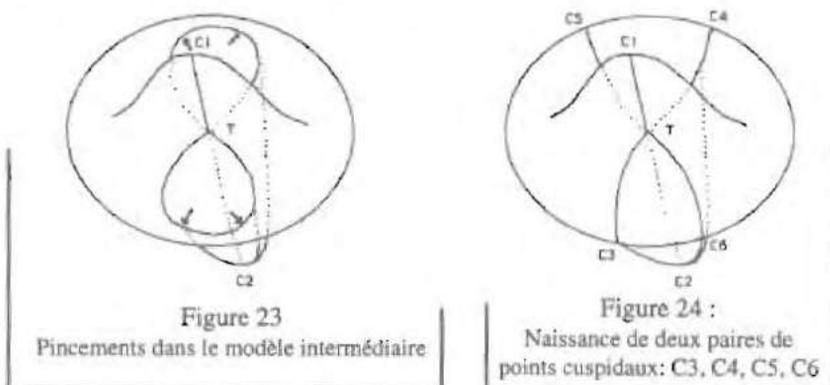
Le point cuspidal C2 traverse le "fond" de la Cross-Cap et apparaît "de l'autre côté". Au passage il se crée un point triple T, visible sur la vue 20a. En 20b on a représenté le voisinage de ce point triple.



Détaillons ce modèle intermédiaire de la transformation. On a toujours le segment C1 C2 comme élément de l'ensemble d'auto-intersection. Mais le mouvement précédent a créé une courbe en huit qui est également partie intégrante de cet ensemble et qui passe par le point triple T.

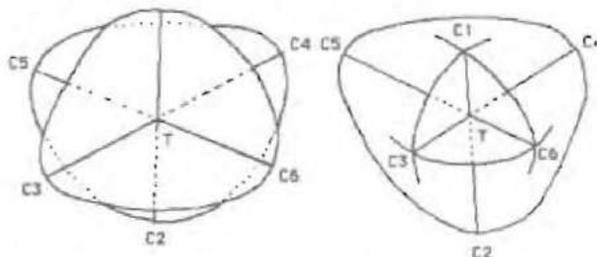


La figure 22 montre une autre vue de ce modèle intermédiaire et l'ensemble d'auto-intersection. Nous allons maintenant pincer la surface selon les flèches noires indiquées sur la figure 23.



La disparition des passages tubulaires va donner naissance à deux nouvelles paires de points cuspidaux (C4, C5) et (C3, C6). Cet objet n'est autre que la surface Romaine de Steiner, bien connue des géomètres.

Figure 25a et 25b :
Surface Romaine de Steiner



Les figures 25a et 25b sont des vues plus familières de la surface de Steiner,
Bulletin APMEP 404 - Journées Nationales 95-96

tandis que la figure 26 en donne une représentation polyédrique.

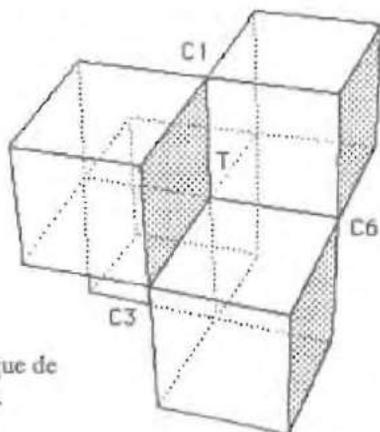


Figure 26 :
Représentation polyédrique de
la surface de Steiner.

La figure 27 est une autre vue de cette représentation polyédrique qui montre qu'elle est constituée de quatre cubes accolés. L'ensemble d'auto-intersection est constitué de trois segments de droites qui concourent au point triple T. Aux extrémités de chacun de ces segments on trouve un point cuspidal.

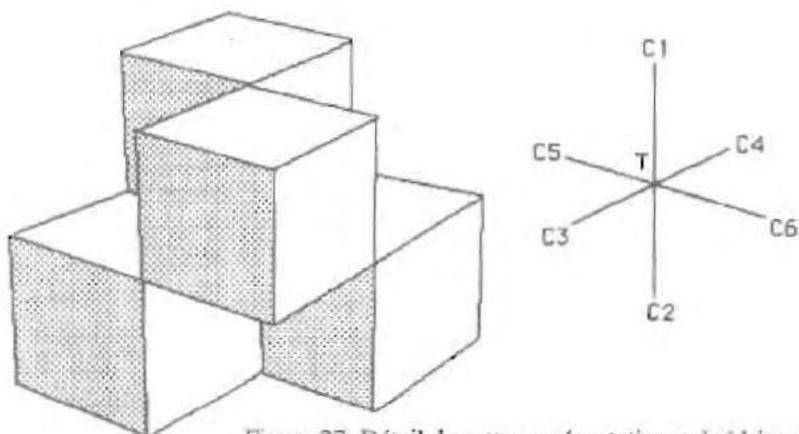
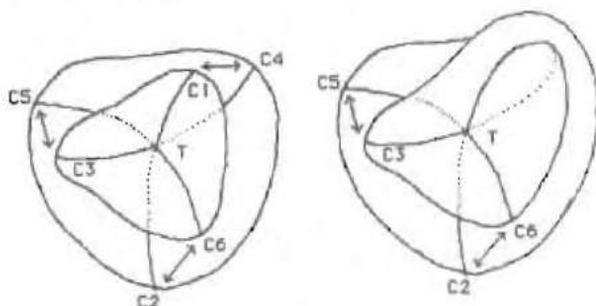


Figure 27: Détail de cette représentation polyédrique
et ensemble d'auto-intersection.

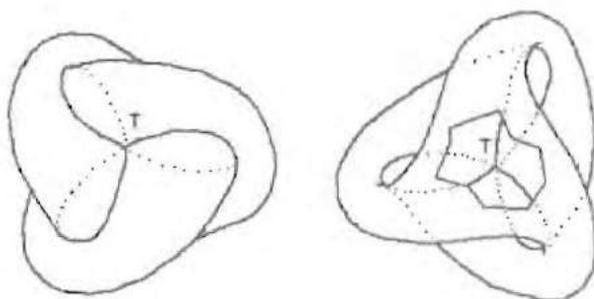
Il est maintenant possible d'envisager le passage à la surface de Boy. Pour ce faire nous allons faire confluer les points cuspidaux, deux à deux. C'est l'opération inverse de celle qui avait été utilisée pour passer de la figure 23 à la figure 24. On voit sur la figure 28a l'ordre dans lequel s'effectue cette confluence des points cuspidaux.

Figures
28 a et 28b:
Confluence des
points cuspidaux



Sur la figure 28b deux des points cuspidaux ont déjà fusionné. L'opération est achevée dans les figures 29a et 29b où on reconnaît l'immersion du plan projectif, la surface de Boy.

Figures
29a et 29b : Deux
vues de la surface
de Boy.
Dans la figure 29b
une partie de la
surface a été enle-
vée pour montrer
le point triple.



Une dernière remarque. Si au lieu de faire confluer les points:

C1 avec C4

C3 avec C5

C2 avec C6

on avait fait confluer les points:

C1 avec C5

C2 avec C3

C4 avec C6

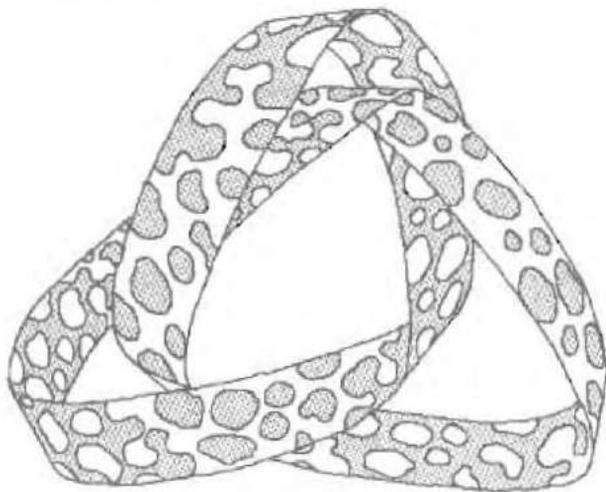
on aurait obtenu l'image en miroir de la surface de Boy. Ainsi l'objet intermédiaire qui est la surface de Steiner permet de transformer une surface de Boy droite en surface de Boy gauche, c'est à dire en son image énantiomorphe.

EPILOGUE :

Nous avons donc jonglé avec les points cuspidaux, et les différents visages du plan projectif et j'espère que cela vous aura bien amusé.

Mais pourquoi, me direz-vous, déployer un tel intérêt pour l'unilatère ?

A cause de la cosmologie. J'ai publié un papier dans *Nuovo Cimento*, intitulé "*The missing mass problem*" (Il Nuovo Cimento B Vol. 109 July 1994, pp. 697-710). Si j'ai le temps, j'en parlerai pendant ma conférence. Selon ce travail l'univers serait le revêtement à deux feuillets d'un projectif.



Ci-dessus une figure extraite de l'article.

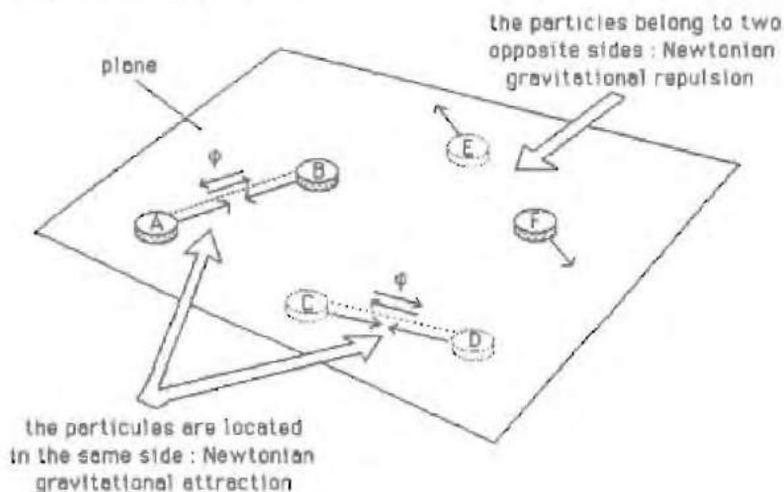
J'ai ici utilisé le revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius à trois demi-tours (voisinage de l'équateur d'une Boy, voir le Topologicon). Regardez cette figure avec plus d'attention. En collant les feuillets adjacents on obtient un gris uniforme. Ce qui est grumeau ici est lacune ailleurs. Un "ailleurs" qui n'est que l'antipode de la sphère, puisqu'une surface de Boy est obtenue en mettant en coïncidence tout point d'une sphère avec son antipode (Le Topologicon). Cette figure illustre donc le concept de gémellité cosmique. Ainsi "replié", l'univers présente, localement, l'apparence d'une structure à deux feuillets (deux univers jumeaux).

Pourquoi un tel travail ? Voir le papier suivant :

Twin Universe Cosmology. *Astronomy and Space Science* **226** : 273-307, 1995

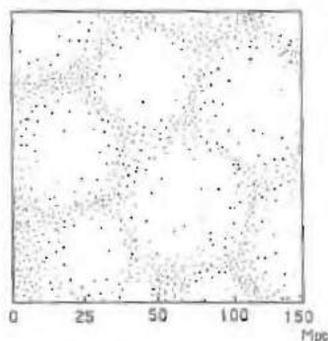
Ces feuillettes adjacentes, interagissant selon une "équation de champ" tensorielle, fournissent... la structure à grande échelle de l'univers.

L'équation de champ, gemmaire, dont je vous ferai grâce ici, se traduit par le schéma ci-après :

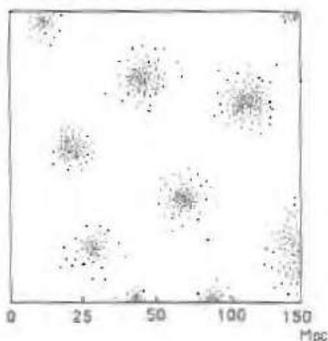


La surface figure ce "plan projectif" et ses deux côtés son "revêtement à deux feuillettes". Newton et anti-Newton.

En effectuant des simulations sur ordinateur on obtient:

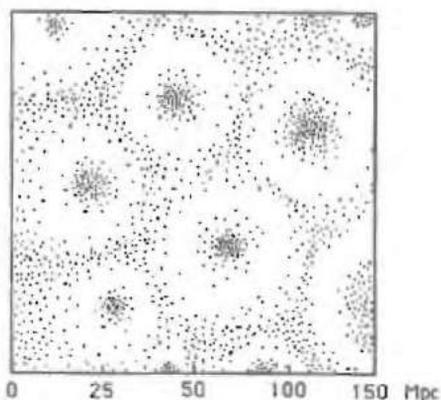


Structure in the fold 1 (ours)
averaged mass-density ρ_f



Structure in the antipodal fold
averaged mass-density $\rho_{f^*} \approx 50 \rho_f$

A ma droite ce qui se passe dans le "feuillelet adjacent", l'univers jumeau. Ils se forme d'immenses conglomérats de "matière gémellaire", ou "antipodale", laquelle repousse notre matière, à gauche (en gros chaque point figure une galaxie, ou un petit amas de galaxies).



Les deux, superposés. L'échelle est le "mégaparsec"

D'où une explication de la mystérieuse structure à grande échelle de l'univers.

Cela, et bien d'autre choses encore....

De l'usage de la Topologie en cosmologie théorique.