Les conférences des Journées Nationales APMEP de Grenoble 1995

Le Cabrikon

Colette LABORDE
IUFM Grenoble et COAST CNRS, Lyon (*)

Histoire comme ça

Il était une fois un pays où les livres n'existaient qu'en tout petit nombre, leur fabrication nécessitant beaucoup de temps et d'argent. Evidemment, les mathématiques y étaient enseignées, elles sont si vieilles. Les usages scolaires alors en cours du fait de l'absence de manuels pourront paraître étranges à certains de nos contemporains. Les professeurs parlaient, ils parlaient beaucoup, ils écrivaient aussi au tableau. Les élèves écoutaient et au fur et à mesure qu'ils avançaient en âge prenaient de plus en plus de notes. La vie s'écoulait paisiblement jusqu'au jour où une équipe du CNDS [1] mit au point un procédé révolutionnaire qui permit de fabriquer des livres à faible coût et en grande quantité. Les maisons d'édition se mirent à fleurir. Après quelque temps, quelques unes d'entre elles imaginèrent une entreprise audacieuse: produire un ouvrage de mathématiques pour les professeurs certes, mais surtout pour les élèves, pour chaque élève. La population enseignante fut saisie d'un grand émoi. Quoi, tout ce qu'ils disaient allait désormais être écrit (probablement mieux, ajoutaient les esprits caustiques) et à la disposition des élèves à tout moment ! Chaque élève aurait en accès direct et de façon inaltérable le texte parfait du savoir. Des tribuns de certains mouvements politiques s'emparèrent de la chose: en cette période économique difficile était-il encore impérieux de consacrer une bonne partie du budget national à payer des enseignants ?...

Quittons ce pays en plein trouble et revenons en France en octobre 1995.

* - Professeur en didactique des mathématiques à l'IUFM de Grenoble, Colette LABORDE est actuellement détachée au CNRS à Lyon. Elle dirige des travaux de recherche en didactique à Grenoble I et Lyon I. Elle exerce aussi des activités sur le plan international dans l'animation et l'organisation de la communauté de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

1 - Centre National de la Découverte Scientifique

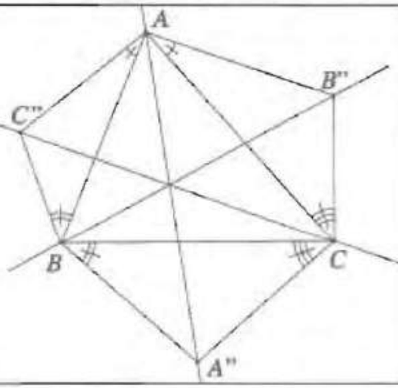
où depuis un ou deux mois circulent des calculatrices graphiques qui se sont attaquées au dernier bastion des mathématiques, vieux de plus de 2000 ans et resté à l'écart des calculatrices, la géométrie. Cet exposé veut prendre de court les tribuns et apporter une contribution à l'analyse sereine de la situation.

Thème

Il est communément admis que les nouvelles technologies favorisent les stratégies d'exploration lors de la recherche d'un problème. L'alternance des essais de l'utilisateur et des rétroactions du logiciel, la dialectique qui a cours entre la visualisation et les connaissances géométriques de l'individu sont particulièrement spectaculaires dans le cas de logiciels interactifs de géométrie dynamique à manipulation directe. Quoi de plus excitant pour un vieux routier de la géométrie classique que de voir s'animer la géométrie telle qu'a pu la proposer F. G.-M. dans ses 2000 exercices (1920), de visualiser des points aux noms fanés, Vecten, Brocard..., et peut-être, comme le suggérait C. Payan en 1995 au Cercle des géomètres disparus, de déboucher sur une caractérisation globale de ces points en utilisant Cabri-géomètre.

Hofstadter n'a pu échapper récemment au plaisir d'augmenter la liste de

Soit ABC un triangle quelconque. On construit les triangles BCA', CAB', ABC' sur des droites isogonales deux à deux par rapport aux côtés du triangle ABC. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un même point qui, suivant les valeurs des angles choisis, parcourt l'ensemble des points remarquables du triangle (Fig.1)



ces points et de donner ainsi son nom à deux nouveaux d'entre eux (Guillerault 1996, Kimberling 1994).

Mais sur quoi repose cette amplification de la phase heuristique de la résolution d'un problème, fonctionne-t-elle de la même façon pour tous les individus, et chez les élèves ? Nous cherchons à montrer que l'usage de nouvelles technologies en géométrie peut certes permettre un jeu fructueux chez l'élève entre visualisation, exploration et développement d'idées mathématiques, qui peut permettre d'aller plus loin que dans l'environnement papier crayon mais à condition que soit organisé par l'enseignant un apprentissage, dans lequel il joue un rôle essentiel. Précisons d'entrée que l'exposé ne porte que sur la géométrie plane, encore que certains des points évoqués trouvent une résonance importante en géométrie dans l'espace (à ce sujet, on pourra consulter en particulier Chaachoua 1995, Mariotti 1991, Parzysz 1988 et 1991).

Deux registres en géométrie

Depuis quelque temps se fait jour une convergence de points de vue sur la distinction entre deux registres de représentation des objets géométriques. On considère ici la géométrie comme un ensemble d'objets et de relations de nature théorique, qui sont extériorisés soit dans un registre de type discursif par des énoncés dans des langages plus ou moins formels, soit dans un registre de type figural par des dessins. Ces deux types d'expression des objets géométriques sollicitent une appréhension ainsi que des connaissances et des contrôles de nature différente de la part de l'individu. Les dessins appellent une appréhension globale en donnant à voir des relations spatiales tandis que les énoncés sollicitent une appréhension linéaire et analytique d'un discours qui renvoie aux objets théoriques géométriques. Les contrôles mis en jeu par l'appréhension du dessin sont en un premier temps de type perceptif, tandis que les contrôles sur les énoncés se font par des connaissances géométriques.

C'est bien d'abord la reconnaissance spatiale du contact d'une droite avec un cercle qui nous conduit à identifier une tangente sur un dessin et c'est en un deuxième temps que grâce à nos connaissances géométriques nous nous assurons du bien fondé géométrique de cette impression visuelle.

Des recherches ont montré les problèmes que peut soulever l'existence des deux types différents de référents auxquels renvoient ces deux registres chez les apprenants débutants. Salin et Berthelot (1994) ont mis en évidence trois problématiques différentes selon lesquelles les élèves interprètent une tâche de construction en géométrie ; ils ont préféré récemment les appeler contrats: un contrat graphique dans lequel l'élève travaille sur les propriétés spatiales du dessin, un contrat géométrique dans lequel il travaille sur les objets de la géométrie et un contrat de modélisation. Le problème de l'enseignement serait celui d'amener les élèves au contrat géométrique. Notre préoccupation est un peu différente.

Notre objectif est que les élèves sachent mettre en oeuvre les diverses appréhensions des deux registres et surtout qu'ils sachent établir des liens entre ces appréhensions, brièvement parlant qu'ils maîtrisent les rapports entre propriétés spatiales et propriétés géométriques.

En effet, la complémentarité de ces deux registres et des appréhensions et contrôles associés joue un rôle important dans la résolution de problèmes en géométrie, comme l'ont souligné différents travaux (Bazin[2] 1994, Duval 1994, Noirfalise 1993, Robert et Tenaud 1988). C'est parce que l'expert sait mettre en place une interaction entre ces deux registres, qu'il avance dans la résolution d'un problème de géométrie. Il sait distinguer les phénomènes spatiaux pertinents pour le problème, des propriétés spatiales non intéressantes, il sait interpréter en termes de géométrie ce qu'il voit et de plus associer d'autres propriétés géométriques. A l'inverse, il sait anticiper le correspondant spatiographique de propriétés qu'il déduit d'un raisonnement, voire dans une certaine mesure anticiper les modifications potentielles du dessin par des changements de conditions géométriques dans le problème.

Le désir de permettre à une telle interaction de jouer pleinement son rôle et même d'amplifier ce rôle est à l'origine de la conception des logiciels de géométrie dynamique à manipulation directe comme Geometer Sketchpad (1993) ou Cabri-géomètre (Laborde 1995).

Des logiciels de géométrie dynamique à manipulation directe

Ces logiciels réalisent en effet une partie de ce jeu entre géométrique et spatio-graphique en offrant des entités graphiques sur l'écran de l'ordinateur ou de la calculatrice

- qui sont le résultat d'une suite d'opérations exprimées en termes de géométrie
- que l'on peut déplacer en manipulation directe avec la souris
- et dont le comportement au cours du déplacement est contrôlé par une théorie géométrique (celle sous-jacente au logiciel) ; les relations géométriques ayant servi dans le programme de construction du dessin sont conservées au cours du déplacement.

En un mot, les dessins à l'écran, une fois construits, ont un comportement qui ne suit pas forcément les désirs de leur auteur. Dans les modifications continues qu'entraîne le déplacement d'un élément du dessin, sont offertes à la perception des propriétés spatiales dont on sait que l'évolution est régulée par la géométrie. On pourrait comparer ces réalités spatio-graphiques d'un nouveau type aux objets du monde réel, en disant qu'ils résistent aux manipulations de l'individu en suivant les lois de la géométrie. L'observation de

2 - En construisant un résolveur de problèmes de géométrie de quatrième, Bazin a été confronté au problème de donner au système la capacité de traiter les informations visuelles lui permettant de choisir et d'appliquer certains théorèmes ou heuristiques.

leurs comportements peut être à l'origine de spéculations sur des relations géométriques satisfaites par le référent géométrique correspondant. En particulier, des propriétés spatiales invariantes au cours du déplacement sont de très bons candidats à être des relations géométriques. La caractéristique de tels logiciels est d'établir un lien entre les deux registres de la géométrie.

Les propos précédents semblent réserver aux experts l'apport des potentialités de tels logiciels. Les apprenants débutants ne disposant pas de cette mobilité contrôlée entre spatio-graphique et géométrique ne sauraient utiliser pleinement l'amplification que permettent ces logiciels dans la visualisation de propriétés spatiales.

La suite est consacrée à la défense de deux idées:

- d'une part, ces nouveaux outils peuvent être utilisés pour apprendre à relier des phénomènes constatés visuellement et des phénomènes géométriques,
- d'autre part cet apprentissage contribue à l'apprentissage de la géométrie.

Apprentissage de la géométrie en lien avec le visuel

Dans cette perspective, la géométrie est introduite comme permettant de produire, de prédire et d'expliquer des phénomènes repérés visuellement. Deux principes nous paraissent importants pour guider le choix des phénomènes visuels utilisés: la construction d'une progression, le rétablissement de la saillance de certaines propriétés.

I - Une progression

Puisqu'il s'agit déjà d'apprendre à repérer les phénomènes visuels pertinents du point de vue de la géométrie, une progression est à construire dans l'enseignement. Ainsi en première étape, ce sont des évidences sensibles dont la reconnaissance n'exige pas de culture géométrique préalable qu'il vaut mieux soumettre d'abord aux apprenants. Des recherches en psychologie, en particulier piagétiennes, on sait que les phénomènes d'apparition et de disparition font partie de ces évidences reconnues par tous les enfants dès leur plus jeune âge, ou encore que la position d'un point à l'intérieur d'une région ou à l'extérieur est perçue relativement tôt.

En début de collège, on peut ainsi introduire la distinction segment-droite qui ne peut apparaître sur le plan spatio-graphique (droite et segment ont des tracés limités) et que l'on ne peut appréhender que sur le plan géométrique. On fait dépendre l'existence d'un objet du point construit par le logiciel comme point d'intersection d'un segment et d'une droite dans un cas, de deux droites dans l'autre. Dans le premier cas, l'objet disparaît lors du déplacement de la droite, dans l'autre il est toujours visible (Fig.2 *page suivante*).

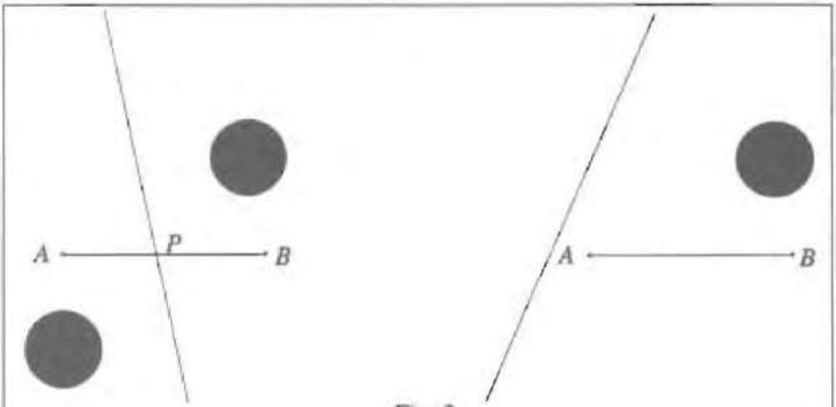


Fig. 2
Le disque qui disparaît est image de l'autre par une symétrie centrale de centre P, point d'intersection de la droite et du segment [AB].

Le phénomène visuel de disparition/apparition versus permanence trouve son explication dans la distinction géométrique segment/droite. (cf. Capponi & Laborde 1994, p.24-25 à propos du pied de la perpendiculaire à un segment).

La discussion de la position de l'orthocentre d'un triangle se fait également à partir d'un phénomène visuel aisément reconnaissable par des élèves de début de collège. Bergue (1992) rapporte ainsi qu'ayant demandé à ses élèves de caractériser les triangles dont l'orthocentre est à l'extérieur du triangle, les élèves ont proposé «Ces triangles sont les triangles ayant deux angles obtus». Un tel énoncé débouche sur un travail au plan géométrique, les élèves n'arrivant pas à produire à l'écran un tel triangle malgré leurs efforts, cherchent âprement à savoir le pourquoi de cette impossibilité.

La visualisation d'un phénomène comme celui de l'intersection en un point de trois droites ou de l'alignement de trois points n'est pas spontanée chez les élèves car elle repose déjà sur la connaissance du caractère remarquable du phénomène géométrique associé. Ce n'est donc qu'en un deuxième temps, après avoir suscité la prise de conscience de leur caractère extraordinaire, que l'on peut utiliser de tels phénomènes visuels comme origine de problèmes. Si l'on reprend la métaphore vygostkienne de *zone de développement proximal* (Vygotski 1985), les phénomènes visuels donnés à étudier doivent se situer à une *distance critique* des connaissances des élèves.

Cela nous conduit à expliciter un deuxième principe dans l'organisation d'un enseignement fondé sur ce jeu entre visualisation et interprétation géométrique.

2 - Le rétablissement d'une saillance

Les contraintes du système didactique (temps, nécessité d'injecter suffisamment souvent du nouveau) conduisent à privilégier les phénomènes mathématiques remarquables et évidemment à ne pas s'étendre sur le banal. Un exemple simple : l'enseignement accorde ainsi une place plus importante à la parabole qu'à l'ellipse ou l'hyperbole ; cette disproportion dans le temps et la place consacrés à un objet d'enseignement peuvent conduire l'élève à imaginer que l'ensemble des coniques fourmille de paraboles et qu'il faut fouiner pour débusquer une hyperbole ou une ellipse dans cette famille. Il y a assimilation des proportions relatives du temps consacré aux objets à leur importance relative dans l'ensemble des objets mathématiques. En un mot, trop de remarquable nuit au remarquable ; le caractère extraordinaire d'un phénomène ne prend sens que relativement à d'autres phénomènes.

Le faible coût de calcul ou de tracé de dessins apporté par les nouvelles technologies change de façon décisive la proportion remarquable / banal dans l'enseignement. L'enseignant peut se permettre de consacrer quelque temps à travailler sur des propriétés d'énoncé exotique souvent à la forme négative, comme : dans un quadrilatère les médiatrices des côtés ne se coupent pas en général en un même point... et à enclencher en demandant «sauf si ?». Seuls certains quadrilatères ont les médiatrices de leurs côtés concourantes. La propriété correspondante pour les triangles devient du coup beaucoup plus impressionnante et son étude chargée de signification.

De la même façon, trois minutes de recherche infructueuse avec Cabri-géomètre de cinq points par lesquels passerait une parabole, suffisent à convaincre que les conditions pour obtenir une parabole sont plus contraignantes. En un mot, les nouvelles technologies permettent de soumettre les élèves à un plus grand nombre de situations et de les relativiser, c'est-à-dire de faire prendre conscience du domaine de validité des propriétés étudiées, de leur dépendance de conditions : l'intersection des trois médiatrices d'un triangle est attachée ainsi à la présence de points cocycliques. Si l'on reprend les termes de Halbwachs (1981), on viserait ainsi à ce que l'élève construise une signification à la propriété, en en mettant en évidence une raison.

Des types de situation d'apprentissage

Nous distinguons deux sortes de situations d'apprentissage mises en oeuvre dans l'enseignement par rapport à l'usage du logiciel :

- celles pour lesquelles le logiciel détermine la tâche à réaliser par les élèves : le logiciel est un constituant organique du problème;
- celles pour lesquelles le logiciel peut être un outil d'aide à la solution mais le problème posé est indépendant du logiciel.

Un des objectifs de l'enseignement est d'apprendre aux élèves à savoir choisir et utiliser les outils de façon adéquate pour résoudre un problème. Le deuxième type de situation est celui qu'un individu rencontre dans sa vie professionnelle. Il paraît donc important de confronter les élèves à ce type de situations où ils ont à décider et à organiser l'usage du logiciel. Evidemment l'accessibilité et la maniabilité de l'outil logiciel est un facteur primordial dans la décision de l'élève. Une calculatrice de ce point de vue est accessible dans un plus grand nombre d'occasions qu'un ordinateur (dans une salle ordinaire de classe, à la maison, dans le bus. . .).

Le premier type de situations est cependant utile sous au moins deux aspects. D'une part il permet l'appropriation du logiciel. Mais de plus, il présente l'intérêt considérable de donner lieu à des nouveaux problèmes qui ne peuvent vivre dans un environnement papier crayon (Chevallard 1994)[3]. La résolution de ces problèmes sollicite un usage des théorèmes et propriétés dans un contexte différent, à des fins parfois différentes des fins usuelles et contribue à l'enrichissement des significations associées, ou favorise la construction d'une signification difficilement atteignable dans un environnement usuel.

Citons quelques situations du premier type permettant l'usage de savoirs géométriques à des fins de production, prédiction ou explication de phénomènes visuels.

Construction de dessins dynamiques d'objets géométriques dont la description est donnée sous forme discursive

On retrouve ici le problème classique de construction géométrique mais le nouveau contexte introduit deux contraintes supplémentaires.

Si l'on prend l'exemple de Cabri-géomètre, le dessin obtenu doit résister au déplacement et satisfaire visuellement aux propriétés spatiales attendues. La construction d'une tangente issue d'un point donné à un cercle, faite par le seul contrôle perceptif (on déplace la droite jusqu'à ce qu'elle «touche» le cercle) est invalidée immédiatement dès que l'on déplace le point ou le cercle. En raison de la contrainte de résistance au déplacement, le dessin doit être obtenu par l'usage des primitives disponibles. La seconde contrainte intervient alors : on ne peut utiliser que les primitives à disposition. Le choix des primitives offertes peut s'avérer crucial sur la nature de la solution à élaborer. Par exemple, la suppression de la mise à disposition de la primitive

3 - Il y a, sous-jacente, l'hypothèse préalable que les problèmes convenablement choisis constituent un lieu privilégié de construction de nouvelles connaissances (Brousseau 1986, Vergnaud 1994).

«milieu d'un segment» ou de celle «parallèle à une droite» peut complètement modifier la nature de la tâche. On retrouve ici le même type de modifications que celui entraîné par le passage d'une construction à la règle et au compas à une construction au seul compas.

Ainsi, construire une parallèle à une droite (D) donnée passant par un point P donné à l'aide des seules primitives symétrie axiale (réflexion) et symétrie centrale donnant l'image d'un point, est une tâche qui nécessite d'utiliser des propriétés comme «la droite qui joint un point et son image par symétrie axiale est perpendiculaire à l'axe», ou comme «l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle», ou encore «la composition de deux symétries centrales est une translation». Ces propriétés font partie des curricula de fin de collège et l'on attend que les élèves sachent y avoir recours dans les démonstrations. Dans Cabri-géomètre, elles sont utilisées différemment.

D'une part elles sont utilisées dans l'action en servant à produire un dessin et non plus un discours, d'autre part la situation de dessin est inverse de celle sur papier crayon : en papier crayon, on utilise la perpendicularité pour produire l'image d'un point par symétrie et non la symétrie pour obtenir une perpendiculaire. La symétrie devient un outil de production d'une propriété géométrique reconnue d'abord visuellement par les élèves; l'intensité de la réaction d'élèves devant cet aspect opératoire de la symétrie[4], constatée à plusieurs reprises, nous conduit à nous demander si la prise de conscience du lien de nécessité entre symétrie et perpendicularité n'est pas plus forte dans ce contexte. Or la présence de ce lien de nécessité chez les élèves est indispensable pour qu'ils puissent faire des démonstrations. En cela, nous rejoignons complètement les idées développées par Rauscher et Pluvinage (1989) et Rauscher (1993) sur l'importance d'une géométrie de traitement préalable à une géométrie de la démonstration.

Les boîtes noires ou la reproduction de dessins dynamiques

Il s'agit dans ces tâches de reproduire, à l'aide du logiciel, un dessin dynamique donné à l'écran de façon à obtenir un dessin identique de même comportement (Charrière 1994).

La reproduction se faisant à l'aide des primitives géométriques du logiciel, requiert une analyse du dessin en termes de ces primitives qui soit fondée sur des expérimentations : une supposition est émise relativement à l'existence d'une propriété satisfaite par le dessin, par exemple que trois

4 - «c'est pas possible, ça nous donne la perpendiculaire, c'est un coup de pot» (Guillerault 1991)

points sont alignés, on construit une droite passant par deux d'entre eux et l'on vérifie visuellement, si au cours des modifications du dessin entraînées par le déplacement d'un de ses éléments, la droite passe toujours par le troisième point.

Des inférences mettant en jeu des connaissances géométriques peuvent être incluses dans ces expérimentations.

Nous avons ainsi observé des élèves qui, voulant vérifier si un rectangle était un carré, ont mesuré l'angle de ses diagonales et ont conclu négativement, l'angle n'étant pas droit.

Un travail important d'interprétation géométrique du dessin est donc nécessité par ces tâches, travail qui consiste justement à mettre en correspondance les aspects visuels et les aspects géométriques.

Ce type de tâche est pratiqué depuis longtemps en géométrie papier crayon sous la forme de ce qu'on appelle les jeux de message en géométrie, où des élèves émetteurs communiquent sous forme verbale la description d'un dessin de façon à ce que des élèves récepteurs reproduisent à l'identique le dessin. En papier crayon, la tâche est de reproduire le dessin c'est-à-dire un ensemble de relations spatiales; la géométrie est un instrument fiable d'analyse qui permet de le décrire, de façon à ce qu'il soit reproduit exactement mais les élèves nous ont montré que d'autres moyens de description sont possibles, par exemple en termes spatiaux («aller vers la droite et tracer un segment de 4 cm, puis tracer vers le haut... » ou «tracer vers le nord... »). Faiblesse supplémentaire de ces situations de communication, comme l'écrit Margolinas (1993) : il se peut qu'une description qui ne soit pas en termes géométriques ou qui soit inexacte, donne lieu à un décodage par les récepteurs qui fournisse un dessin identique. La validation est un point faible de ces situations. La nature différente du Cabri-dessin, produit d'une suite d'actions en termes de primitives géométriques, ainsi que la validation par la déformation du dessin reproduit, disqualifient le recours au spatial et placent le problème d'emblée sur le plan géométrique pour les élèves.

Identification géométrique d'objets donnés par un dessin dynamique

Un bon exemple de telles tâches est donné par l'identification de transformations géométriques (Sorribas 1995). De nombreuses variations sont possibles :

- la transformation est donnée comme une macro-construction inconnue
  qui permet d'obtenir l'image de n'importe quel point ,
  ou qui permet d'obtenir l'image de n'importe quelle droite;
- la transformation est donnée par un seul couple (P, T(P)) où P est dépla-

çable; on peut alors utiliser la fonctionnalité lieu géométrique et chercher le lieu de T(P) quand P décrit un cercle ou une droite. T(P) a été obtenu à partir de P soit par une primitive du logiciel, soit par une construction géométrique dont les étapes intermédiaires sont cachées (une fonctionnalité du logiciel permet de cacher les tracés).

Une variante consiste à travailler dans les complexes. On donne dans un système d'axes orthonormé à l'écran deux points P1 et P2 et leurs images par une transformation inconnue T (construites géométriquement grâce au logiciel), on peut déplacer PI et P2 dans le plan et obtenir l'affichage dynamique de leurs coordonnées et de celles de leurs images, et l'on demande l'écriture complexe de la transformation T qui transforme les affixes z1 et z2 de P1 et P2 en les affixes de T(P1) et T(P2) (Fig.3). Les validations sont doubles par la géométrie (par exemple, construction géométrique du centre de rotation ou de l'axe de symétrie et vérification avec les transformations données sous forme de primitives dans le logiciel de l'identité des images), ou par le calcul algébrique.

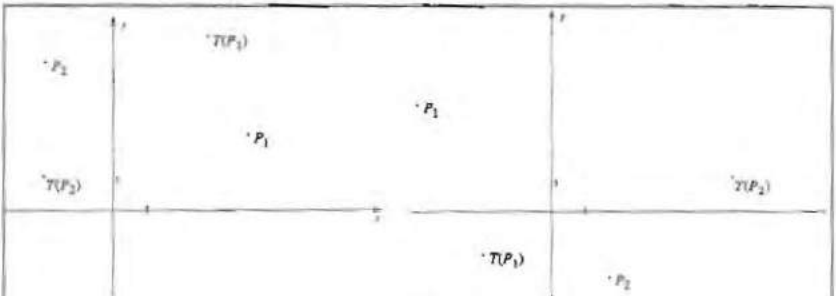


Fig. 3
Deux instantanés des positions P1, P2 et leurs images dans le cas où
$T(z) = (1 + 3i)z$

L'identification d'une transformation par ses invariants est l'instrument de solution, la recherche par tâtonnements de la transformation inconnue étant trop longue et inefficace. Ce qui est nouveau dans le contexte de l'ordinateur, est que cette identification passe par l'interprétation du comportement spatial des points et de leurs images à l'écran et le repérage de coïncidences visuelles. De plus, la transformation concerne ici tous les points de l'écran et non les seuls tracés sur le dessin puisque le point P est déplaçable. On permet ainsi de rendre davantage compte de la transformation en tant que transformation ponctuelle susceptible de s'appliquer à tous les points du plan.

Les lieux (courbes diverses) qui sur le plan géométrique peuvent être considérés comme des ensembles de points, peuvent sur le plan spatial être vues comme trajectoires d'un point mobile. Il y a là une source importante de phénomènes visuels donnant lieu à des explications ou des prédictions de type géométrique. Citons deux exemples à propos des coniques.

De branche en branche

Dans Cabri-géomètre II, on construit le lieu des centres de cercles tangents à un cercle donné (C) passant par un point donné F. On construit la conique passant par cinq des points de ce lieu. C'est une hyperbole comme l'indique le logiciel si F est à l'extérieur de (C). Soit A un point du cercle et P le point correspondant de l'hyperbole (centre du cercle tangent en A à (C)). Lorsque le point A par la fonctionnalité d'animation du logiciel décrit le cercle (C), il est facile de suivre visuellement la trajectoire du point P se mouvant sur une branche de l'hyperbole, disparaître en dehors de l'écran et revenir sur l'autre branche.

On pose alors la question de prédire où se situent les points du cercle (C) qui correspondent au changement de branche pour P (Fig.4). Seule une construction géométrique permet d'obtenir une réponse fiable et valable si l'on déplace le cercle (C) ou si l'on fait varier son rayon.

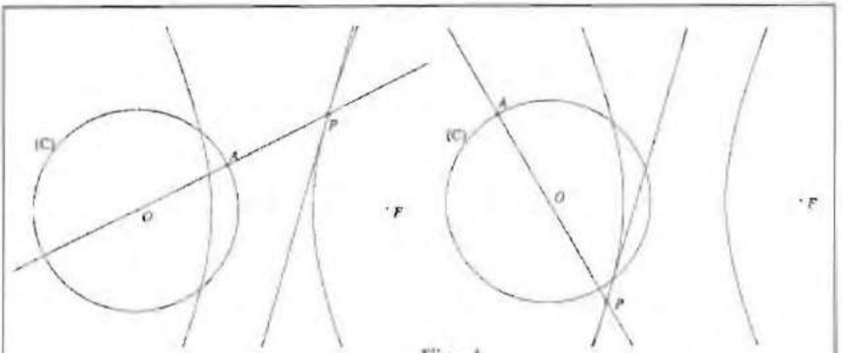


Fig. 4
Deux instantanés du mouvement de P sur sa trajectoire

Le tire-bouchon Zig-Zag. Un type de tire-bouchon est constitué de losanges articulés. Dans la hâte d'ouvrir la bouteille, a-t-on jamais cherché à identifier la trajectoire des points d'articulation ? Le modèle du tire-bouchon est construit dans Cabri-géomètre II et donné aux élèves, les questions peuvent porter sur la nature de la trajectoire (Fig.5), le choix d'un système d'axes dans lequel l'équation de la trajectoire est simple. Et que se passe-t-il si on augmente le nombre de losanges ?

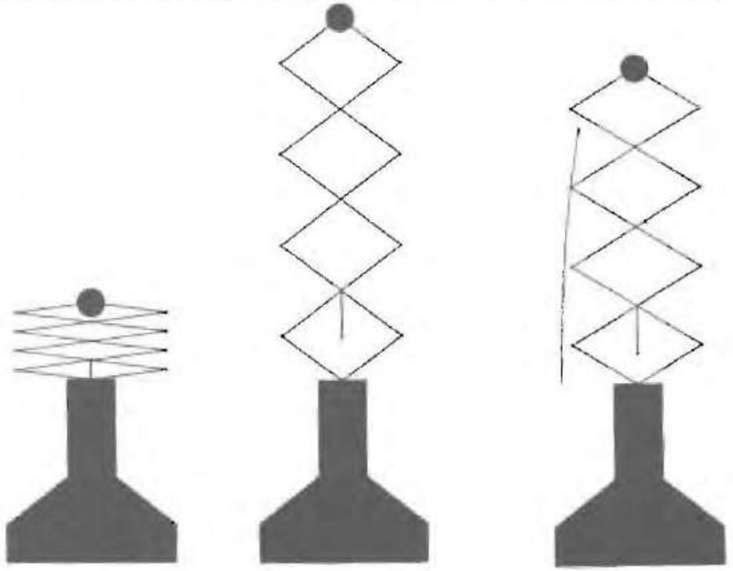


Fig. 5
Le tire-bouchon en action et la trajectoire d'un de ses points d'articulation

Des conditions à mettre en place

Les différentes situations proposées ci-dessus ont toutes en commun
- de susciter une question à partir d'un phénomène spatial constaté visuellement,
- de favoriser une réponse sur le plan géométrique et de disqualifier ou rendre inefficace une solution par tâtonnement spatial contrôlé au seul niveau perceptif.

Leur bon fonctionnement en classe est tributaire de plusieurs conditions,
- le phénomène spatial doit être appréhendé par l'élève et susciter une interrogation ;
- l'élaboration de la solution doit être possible au regard des connaissances des élèves mais non disponible immédiatement ;
- le choix du logiciel; l'interface est un élément clé sous deux aspects : elle assure la communication élève machine et doit minimiser les difficultés externes aux mathématiques de type complexité de syntaxe, usages spécifiques; elle doit être flexible et adaptable au niveau des élèves pour per-

mettre à l'enseignant de construire ses situations en fonction de ses objectifs d'apprentissage. Evidemment la modélisation géométrique sous-jacente au logiciel se doit de ne pas fournir des résultats spatiaux à l'écran en contradiction avec les résultats géométriques.

Enfin, le rôle de l'enseignant n'est pas seulement crucial dans la construction des situations proposées aux élèves, il importe ensuite dans la gestion de la classe au cours du déroulement de la situation dont il ne faut pas cacher la complexité (Artigue 1991) qui par certains aspects contribue justement à la richesse de l'apprentissage: investissement plus important des élèves dans l'action, en général plus grand nombre de solutions possibles élaborées par les élèves, différence de rythme de travail entre élèves.

Ce n'est pas une autre histoire

... Les tribuns se fatiguèrent, la violence de leurs propos s'atténua, et leurs discours cessèrent. Il faut dire que les habitudes scolaires n'avaient guère changé. Seul un nouvel usage s'était installé. Il avait remplacé de façon heureuse la dictée des textes de problèmes à donner aux élèves et les nombreuses vérifications pénibles de l'exactitude de leur prise de notes. Il suffisait d'indiquer le numéro, dans le manuel, du problème à chercher.

Le sort des nouvelles technologies en classe n'est pas une autre histoire. Il sera le résultat de réflexions, d'expérimentations et d'études engageant de nombreux enseignants.

Références

ARTIGUE M. (1991) Analyse de processus en environnement informatique Petit x, n° 26, 5-27 BAZIN J.M., 1993, Un modèle d'expert en résolution de problème de géométrie, in *Environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur*, M. Baron, R.Gras, J.F.Nicaud (eds), Paris: Editions Eyrolles, p.27-38

BERGUE, D. (1992) Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°29 p.5-13

BROUSSEAU . (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7. 2, 33-115

CAPPONI, B. & LABORDE, C. (1994) *Cabri-classe*, Argenteuil: Editions Archimède

CHAACHOUA, H. (1995) Conformité des problèmes de construction de géométrie dans l'espace à des attentes de l'enseignant, *Séminaire DidaTech* n°170,163-188, Grenoble: IMAG-LSD2, Université Joseph Fourier

CHARRIERE, P.-M. (1994) *Boîtes noires avec Cabri-géomètre*, polycopié, disponible au Centre Informatique Pédagogique de Genève
CHEVALLARD, Y. (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 313-320, Grenoble: La Pensée Sauvage Editions
DUVAL, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, REPERES-IREM n°17, octobre 1994, 121-138 F, G.-M. (1920) *Exercices de géométrie*, 6ème édition, Sceaux: Editions Jacques Gabay, 1992
FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n°2, 139-162
GUILLERAULT M. (1991) *La gestion des menus dans Cabri- géomètre. Etude d'une variable didactique*, Mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques, Université Grenoble 1
GUILLERAULT M. (1996) Découvertes récentes en géométrie ancienne, exposé au *Cercle des géomètres disparus*, Grenoble: Laboratoire IMAG-Leibniz, CNRS et Université Joseph Fourier
HALBWACHS, F. (1981) Significations et raisons dans la pensée scientifique, *Archives de Psychologie*, 49, 199-229
GEOMETER SKETCHPAD (1993) The Visual Geometry Project, logiciel d'auteur Jackiw N., Swarthmore College and Berkeley: Key Curriculum Press
KIMBERLING, C. (1994) Hofstadter Points, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 4ème série 12 n°3 novembre 1994
LABORDE J.M. (1995) Des connaissances abstraites aux réalités artificielles, le concept de micromonde Cabri, in: *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, Guin D., Nicaud J.F., Py D. (eds), (p. 28-41) Paris : Eyrolles
MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, 256p.
MARIOTTI A. (1991) Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems, *Proceedings of* PME XV, Furinghetti F. (ed.), (Vol. II, p.389-396), Assisi, Italie
NOIRFALISE R. (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration. Etude de régularités dans les modalités de fonctionnement du savoir mathématique dans les divers chapitres de géométrie d'un manuel de sixième *Recherches en didactique des mathématiques*, 13.3, n°39, 229-256
PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, 79-92 PARZYSZ, B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie

didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en didactique des mathématiques* 11 (2.3), 211-240

PAYAN C. (1995) La géométrie du triangle, exposé au *Cercle des géomètres disparus*, Grenoble: Laboratoire IMAG-Leibniz, CNRS et Université Joseph Fourier

PLUVINAGE F. (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement géométrique, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 2, ULP et IREM de Strasbourg, 5-24

RAUSCHER J.C. (1993) *L'hétérégonéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*, Thèse de l'Université des Sciences Humaines de Strasbourg ROBERT A., TENAUD I., 1988, Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.9, n°1, pp.31-70

SALIN M.-H. & BERTHELOT R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations adidactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Artigue et al. (ed.), (p.275-82) Grenoble: La Pensée Sauvage Editions

SORRIBAS, J.-P. (1995) Quelques problèmes pédagogiques posés par l'utilisation des outils informatiques, *Bulletin de l'APMEP* n°398, avril-mai 1995, 507-517

VYGOTSKI L. (1985) *Pensée et langage*, traduction française, Paris: Editions Sociales

VERGNAUD G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 177-191, Grenoble: La Pensée Sauvage Editions