A propos des suites : NOTATION

Commission Mots

Dans le texte ci-dessous, nous commenterons ou évoquerons des extraits de sujets de baccalauréat, pour deux raisons :
- d'une part, chacun peut aisément se procurer ces sujets (nos références renvoient à ANNABAC 94, séries C-E) ;
- d'autre part, on sait l'influence qu'exercent les sujets d'examen sur l'enseignement dispensé aux élèves.

1 - Une notation insolite

Actuellement, les suites apparaissent en Première et on les présente en soulignant l'analogie avec les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: il y a un ensemble de départ, $\mathbb{E}$ (en général $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$), un ensemble d'arrivée (le plus souvent $\mathbb{R}$) et un procédé qui, à tout naturel de $\mathbb{E}$ associe un réel.

Mais, très vite, on délaisse les notations fonctionnelles habituelles pour des notations particulières aux suites, par exemple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Imaginons ce que donnerait cette notation, transposée aux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

On désigne par $(f_x)_{x\in\,]0,\,+\infty[}$ *la fonction numérique définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f_x = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. *On se propose d'étudier la fonction* $(f_x)_{x\in\,]0,\,+\infty[}$, *puis dans la deuxième partie, deux suites numériques liées à* $(f_x)_{x\in\,]0,\,+\infty[}$.

Ce texte transpose le début d'un problème (cité page 81) ; que de protestations ne soulèverait-il pas !

Et pourtant on lit (p. 25)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à termes positifs telle que* $u_0 = 5$ *et vérifiant pour tout entier naturel n :* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Ou (p.23) :

On considère la suite $(\mathrm{M}_k)_{k \geq 0}$ *de* **C** *définie par la relation de récurrence* $\mathrm{M}_{k+1} = r(\mathrm{M}_k)$ *et la condition initiale* $\mathrm{M}_0 = A$.

Apparemment, personne ne récuse les notations utilisées dans ces deux citations. Tout au plus, les collègues qui en préfèrent d'autres, au moins lors d'une initiation à l'étude des suites, hasardent-ils de timides protestations, tant il est difficile de transgresser les usages établis.

II - Les fonctions

II - 1 Introduites dès la classe de Seconde, les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ sont partout présentes au Lycée. Leur notation semble maintenant stabilisée. A des variantes de détail près, tout le monde, tant dans les manuels que dans les textes d'examen, s'exprime ainsi :

$$\text{Soit la fonction } f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-1} \end{array} \right.$$

ou Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Ainsi f désigne la fonction et $f(x)$ l'image par f du réel x.

II - Personne n'oserait plus proposer à ses élèves d'*étudier les variations de la fonction* $y = \dfrac{1}{x-1}$ (texte maintenant enigmatique).

Des propositions variées ont permis de dégager, au cours des années 60, et d'adopter, il y a bientôt 25 ans, les notations actuelles pour les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Ces notations sont simples et bien adaptées à leur objet. Elles s'étendent sans modification essentielle à des fonctions de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des ensembles quelconques, en particulier lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (c'est le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$).

III - Les suites

III - 1 Puisque les suites sont des fonctions, les notations devraient s'imposer d'elles-mêmes.

Par exemple :

Soit la suite u: $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto 2n+3 \end{cases}$

ou Soit u la suite définie su $\mathbb{N}$par $u(n) = 2n + 3$.

Beaucoup de collègues ont adopté les notations ci-dessus et les proposent à leur élèves, au moins en Première.

Voici d'autres exemples :

- Soit la suite S définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$
- On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v(0) = 1$ et, pour tout naturel n, $v(n+1) = 3v(n) + 2$.

III - 2 Dans ces exemples, comme pour les autres fonctions :

- u, S et v désignent des suites ;
- $u(n)$ est un nombre (image de u par n), à savoir $2n + 3$;
- u est croissante sur $\mathbb{N}$;
- u a une limite, plus précisément, $\lim u = +\infty$;
- S a une limite, qui est un réel ; on désigne habituellement sa limite par γ, de sorte que : $\lim S = \gamma$.

Mais on ne dira pas :

- $u(n)$ est croissante, ni $\lim u(n) = +\infty$

Pas plus qu'on ne dirait d'une fonction h :

- $h(x)$ est croissante sur tel intervalle, ni $h(x)$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ni $h(x)$ est continue en a.

III - 3 Si ces notations ont été utilisées en Première, il est normal qu'en fin de Première ou en Terminale, un professeur attire l'attention de ses élèves sur le fait que l'usage préfère u_n à $u(n)$; mais, à cela près, les remarques du paragraphe III-2 ne sont en rien changées.

L'expérience montre que cette seule modification d'écriture ne gêne pas les élèves qui ont suffisamment employé la notation $u(n)$.

IV - Les suites dans les sujets de baccalauréat

IV - 1 Constatons tout d'abord que la désignation d'une suite par une lettre, conformément à la désignation des fonctions, n'y est pas exceptionnelle.

Dans ces sujets, on parle très correctement du sens des variations de u, de la convergence de u, de la limite de u, etc.

IV - 2 Par contre, la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de même que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n \geq 0}$, $(u_n)_{n \geq 1}$, etc.) présente des risques car, comme cette notation est lourde, elle est souvent abrégée en (u_n). La notation complète indique clairement que la lettre n est une lettre muette et qu'en conséquence, cette notation désigne un objet qui ne dépend pas de n ; tandis que l'abréviation est beaucoup plus ambiguë ; elle conduit souvent à des dérapages :

➡ On présente (p.93) une suite désignée par (v_n) et on demande de calculer v_n (il s'agit clairement d'un nombre). Après quoi on lit :

Déterminer $\lim v_n$, *puis* $\lim (nv_n)$.

Un peu plus bas, à propos d'une suite notée u_n, on lit

Déterminer $\lim u_n$, *puis* $\lim nu_n$.

Qu'a pu penser un candidat scrupuleux de ces parenthèses à éclipses ? A moins que ces parenthèses aient été omises lors de la transcription du texte original.

Ces incohérences auraient été évitées par l'emploi des notations fonctionnelles : la suite u, le nombre u_n, $\lim u$, $\lim (n \mapsto nu_n)$, etc.

➡ On trouvera (p.26) un exemple analogue où la même suite est désignée tantôt par v, tantôt par (v_n), tantôt par v_n.

➡ *Justifier que la suite* (α_n) *converge et que sa limite* α... (p. 136 et aussi 86).

Dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, écrira-t-on : «*Justifier que la fonction* g *a une limite réelle en* $+\infty$ *et que sa limite* g...» ?

IV - Enfin signalons que la notation $u(n)$, pour désigner l'image par la suite n du naturel n, n'est jamais utilisée dans les sujets examinés.

Elle ne l'est pas non plus dans les programmes (1982-1985-1991). On le regrette car la notation indicielle u_n déroute les élèves débutants au point que, depuis 1985, les programmes de Première attirent l'attention sur cette difficulté :

Les élèves doivent savoir exprimer en fonction de n des termes d'une suite $u_n = f(n)$ *tels que* u_{n+1}, u_{n-3}, u_{2n}...

Rien de tel n'est dit à propos des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ pour la bonne raison que les élèves n'ont pas de difficultés significatives à exprimer $f(x + 1)$, $f(x - 3)$, $f(2x)$ en fonction de x (f étant une fonction). L'expérience prouve qu'une suite étant notée u et l'image de n par u étant notée $u(n)$, la difficulté évoquée dans les programmes disparaît.

Et pour la suite...

Ce qui heurte le bon sens, aussi bien dans les textes que nous venons d'examiner que dans ceux qu'offrent la plupart des manuels, c'est le manque d'homogénéité qui préside au choix des notations pour les suites d'une part, pour les fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'autre part, alors qu'il s'agit essentiellement du même concept.

Etablir cette cohérence, dans l'intérêt de nos élèves, incombe à chacun de nous. Il faut, pour y parvenir, modifier quelques-une de nos habitudes et, surtout, ne pas craindre de nous heurter au mur du dogmatisme dont le premier slogan est : *«On a toujours fait comme ça»* et le second est : *«D'ailleurs, ça ne gêne pas nos élèves»*.

Qu'en pensent nos lecteurs ?