Analyse en série ES

A propos du sujet national de mathématiques série ES Session de juin 1995

Geneviève Loridon (Moulins)

Daniel Thiriet (Chamalières)

A la suite de notre participation à une commission d'harmonisation des notes de l'épreuve de mathématiques de la série ES de notre Académie, nous avons réalisé de brefs comptes-rendus de la correction des copies qui nous ont été remises. Ces comptes-rendus ont été complétés par les remarques qui suivent sur des thèmes qui avaient alimenté notre réflexion tout au long de l'année au sujet du programme de terminale ES et des attentes que l'on peut espérer au niveau des compétences des élèves de cette série.

PROBLÈME *(10 points)*

Une entreprise achète une machine 30000 F. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :

$$v(t) = \frac{30}{0,5t + 1} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 8$$

où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers de francs (en abrégé kF).

1. *a*. Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50% de sa valeur à l'achat?

   b. Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

   c. La différence, exprimée en kF, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est $D(t) = 30 - v(t)$.

   Montrer que D est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

2. On peut exprimer le coût total d'entretien en kF, pour une durée de t années d'utilisation, par :

$$E(t) = 2,5\,e^{0,4t} - t - 25.$$

   a. Calculer $E'(t)$, où E' désigne la fonction dérivée de E.

   b. En déduire que E est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 8].

3.*a*. Vérifier que le coût total (en kF) d'usage de cette machine est :

$$f(t) = D(t) + E(t) = 2,75 - \frac{30}{0,5t+1} + 2,5e^{0,4t} - t$$

   b. Déduire des questions précédentes le sens de variation de f sur [0 ; 8].

   c. Tracer la courbe représentative Γ de f, dans un plan muni d'un repère rectangulaire, avec pour unités : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4 kF sur l'axe des ordonnées.

   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

t	0	1	2	3	4	4,5	5	6	7	8
$f(t)$	0	10,23	16,06	20,80	25,88	28,90	32,40	41,56	54,94	74,83

4. Le coût moyen d'utilisation, en kF et au bout de t années, est égal à :

$$U(t) = \frac{f(t)}{t} \quad \text{avec } 1 \le t \le 8.$$

a. Soit M le point d'abscisse t de la courbe Γ. Montrer que $U(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

b. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimum.

c. On admet que la fonction dérivée de U peut s'écrire sous la forme $U'(t) = \frac{g(t)}{t^2}$, où g est une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

t	1		2,7		8
$g(t)$	$-3,0$	↘	$-6,8$	↗	118

Montrer que g s'annule en un point et un seul de [1 ; 8], que l'on notera a. On admettra que l'on a $4,4 \le a \le 4,5$.

d. Dresser le tableau de variation de U et vérifier que U admet un minimum.

Chacune des questions de ce problème vise à obtenir le sens de variation d'une fonction :

→ ***question 1*** : fonction D, définie pour t dans [0 ; 8] par $D(t) = 30 - v(t)$

avec $v(t) = \dfrac{30}{0,5t + 1}$

→ ***question 2*** : fonction E définie pour t dans [0 ; 8] par

$E(t) = 2,5\, e^{0,4t} - t - 25$.

→ ***question 3*** : fonction f définie pour t dans [0 ; 8] par $f(t) = D(t) + E(t)$

→ ***question 4*** : fonction U définie pour t dans [1 ; 8] par $U(t) = \dfrac{f(t)}{t}$

Comment ont réagi les élèves...

Les questions 1.*c.* et 2.*b.* qui demandent de montrer que respectivement D et E sont des fonctions croissantes sur l'intervalle [0 ; 8] sont très peu réussies par les élèves dont nous avons eu à corriger les copies.

Dans 1.*c.*, où le calcul des dérivées n'est (et c'est heureux) pas demandé, les élèves semblent démunis. Ils testent alors des valeurs discrètes 0, 4, 8, parfois 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, cela sans doute au vu de l'énoncé *«t est exprimé en années»*, transformant la fonction en une suite et faisant alors fi de l'intervalle [0 ; 8]. D'autres invoquent un pseudo-argument économique et cela leur suffit pour conclure!

Peut-être n'ont-ils pas assez de recul pour différencier une situation concrète et la modélisation qui leur est proposée.

Dans 2.b., où il est explicitement indiqué d'utiliser la dérivée : pour tout t de [0 ; 8], $E'(t) = e^{0,4t} - 1$, le fait que pour tout t de $\mathbb{R}$, e^t soit strictement positif ou le fait que $E'(0) = 0$ suffisent à nombre d'élèves pour affirmer que E' est positive sur [0 ; 8], quand ils daignent d'ailleurs faire figurer une explication. Trop d'élèves affirment sans justification aucune que E' est positive sur l'intervalle [0 ; 8], sans doute après avoir lu l'énoncé : *«En déduire que* E *est une fonction croissante sur l'intervalle* [0 ; 8]*»*.

Pour peut-être masquer leurs faiblesses, certains écrivent : E' est positive et croissante sur [0 ; 8], donc E est positive et croissante sur [0 ; 8]

Il ressort ainsi de ce lot de copies une confusion certaine entre signe et sens de variation d'une fonction.

Cette confusion entre signe et sens de variation d'une fonction s'affirme chez les élèves qui abordent la question 4, lorsqu'il s'agit de donner le tableau de variation de la fonction U. Le sens de variation de g donne son signe, à savoir que trop d'élèves affirment que g est négative là où elle est décroissante et positive là où elle est croissante.

Un bilan un peu hâtif nous entraîne à dire que de trop nombreux élèves, en fin de Terminale ES, confondent signe et sens de variation d'une fonction et n'étayent leurs affirmations que de justifications bien minces.

Mais tout cela serait-il une raison pour libeller de la sorte la question 4 du problème?

➞ ***question 4.b.***. «Déterminer *graphiquement* la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimum».

Qu'attendons-nous des élèves? Uniquement une valeur de t? Quelques explications?

Et ces élèves qui, en majorité, éprouvent des difficultés sur les questions de base qui précédaient, vont-ils brutalement faire preuve d'initiative? On aurait pu leur suggérer d'utiliser la question 4.*a*. On aurait pu leur demander, dans un premier temps, de déterminer graphiquement, en utilisant le résultat du *a*., le sens de variation de U et, seulement ensuite, d'en déduire le minimum.

Dans le corrigé fourni aux correcteurs, figure sur le graphique la tangente à Γ issue de O, autre que la tangente à Γ au point O.

On n'était pas en droit, vu le libellé du problème, d'attendre cette tangente des élèves. Cette tangente a figuré dans certaines copies. Cette situation a sans doute été étudiée par chacun en classe puisqu'elle figure dans les Travaux Pratiques au programme, mais elle ne constitue pas pour autant un savoir-faire exigible.

On aurait pu guider les élèves, si l'on attendait ce résultat, et demander de prouver que le minimum de U s'établit lorsque (OM) est tangente à Γ. C'était sans doute beaucoup. Il fallait au moins explicitement faire lire graphiquement le sens de variation du coefficient directeur de la droite (OM).

Mais enfin, ce qui surprend et conduit même à l'indignation est le libellé de la question 4c.

Si on lit le tableau de variations de g qui est fourni, g est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2{,}7]$. g semble être strictement décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2{,}7]$ et comme, d'après l'énoncé, g est continue sur ce même intervalle, g réaliserait une bijection de l'intervalle $[1\ ;\ 2{,}7]$ sur l'intervalle $[g(2{,}7)\ ;\ g(1)] = [-6{,}8\ ;\ -3{,}0]$ d'après le tableau. En fait, les intervalles $[g(2{,}7)\ ;\ g(1)]$ et $[-6{,}8\ ;\ -3{,}0]$ ne sont pas égaux puisque le tableau de variation de g contient des **valeurs approchées**.

De toutes façons, dès le départ, il est **faux** d'affirmer que g est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2{,}7]$. g est décroissante sur $[1\ ;\ \alpha]$, avec $2{,}6818 < \alpha < 2{,}6819$ et croissante sur $[\alpha\ ;\ 8]$ et donc croissante sur $[\alpha\ ;\ 2{,}7]$ qui est inclus dans l'intervalle $[1\ ;\ 2{,}7]$.

Peut-on alors éduquer les élèves à la rigueur (comme il est rappelé en tête des sujets de baccalauréat : «*la précision des raisonnements*»!! en leur fournissant officiellement de tels résultats ?

Il faudrait encore parler du fait que les élèves, en l'absence de la dérivabilité de g n'ont pas les moyens de prouver que g s'annule en un point et un seul de l'intervalle [2,7 ; 8]. Dans le programme de première, la propriété des valeurs intermédiaires figure avec l'hypothèse : «*f dérivable sur l'intervalle* $[a\ ,\ b]$ » et dans le programme de terminale, cette hypothèse est également requise pour le théorème de bijection.

On demande toute l'année aux élèves de vérifier proprement les hypothèses des théorèmes utilisés et ici, ils se trouvent démunis.

PREMIER EXERCICE *(5 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe $\mathscr{C}$ (voir figure jointe en annexe) représente la fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = (ax + b)\,e^x$$

où a et b sont deux nombres que l'on se propose de déterminer, en utilisant les informations lues sur la figure.

1.*a*. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et en déduire une relation entre a et b.

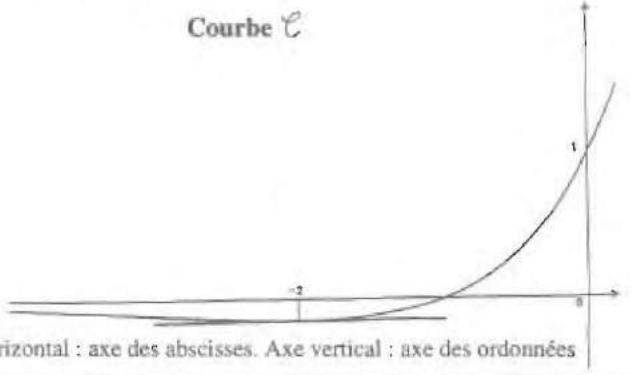
2. En utilisant une valeur de la fonction lue sur le graphique trouver une autre relation entre a et b.

Calculer a et b et écrire l'expression $f(x)$ ainsi obtenue.

3.*a*. Préciser le minimum de la fonction f : on donnera la valeur exacte.

b. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $m = (x + 1)\,e^x$.

Courbe $\mathscr{C}$



Axe horizontal : axe des abscisses. Axe vertical : axe des ordonnées

Remarques à propos de cet exercice 1

Dans la question 1.*b.* où il est demandé de déterminer graphiquement $f'(-2)$, l'association d'une tangente qui semble parallèle à l'axe des abscisses, devrait être clairement demandée.

Le minimum de la fonction peut être trouvé sans justification. Le graphique doit être utilisé en supposant le comportement de la fonction sur $\mathbb{R}$ à partir d'une extrapolation du dessin fourni.

Ne pourrait-on pas donner avec le graphique une légende permettant une lecture plus rigoureuse, sans ambiguïtés ?

Si nous approuvons le fait qu'il soit demandé dans cette série une lecture graphique, nous pensons qu'il faut un minimum d'explications de cette lecture avec le résultat. D'autre part, pour plus de cohérence dans le problème, nous pensons qu'on ne devrait pas exiger avec précision le minimum de f (valeur exacte), sachant qu'on ne peut le faire dans ce problème qu'à partir d'une lecture graphique qui permettra d'obtenir a et b, donc f.

En guise de conclusion

Une réflexion plus large sur l'enseignement de l'analyse dans la série ES et sur ce que l'on peut être en droit d'attendre des élèves (assertions justifiées, résultats obtenus graphiquement accompagnés d'explications…) s'impose.

Les «sujets 0» de baccalauréat avaient suscité des débats. Les sujets de juin les ont renouvelés. Mais les échos ne devraient pas venir uniquement de la série scientifique S. A nous de rééquilibrer dignement les séries…