Dans nos classes

Vérification (à la précision du tracé près) à la règle et au compas, de la formule de Héron donnant l'aire du triangle quelconque

$$\mathcal{A} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Jean-Marie Robbe
25 - Villers-le-lac

Le sujet est abordable par des élèves de seconde. Il permet d'associer algèbre (point de vue théorique) et géométrie pure (point de vue empirique) et peut faire l'objet d'une activité en classe après révision des notions utilisées.

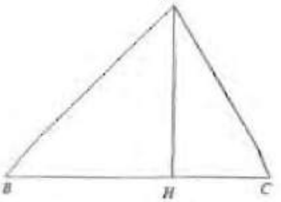
Soit ABC un triangle quelconque. On pose $AB = c$, $BC = a$, et p désigne le demi-périmètre.

I - Démonstration de la formule.

1 - *ABC* est un triangle acutangle (possédant 3 angles aigus).

H est le pied de la hauteur issue de A.

$\mathcal{A}$ est l'aire du triangle.



$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} \text{ soit } \mathcal{A}^2 = \frac{BC^2 \times AH^2}{4} \qquad \text{(I)}$$

Dans ABH rectangle en H: $\quad AH^2 = c^2 - BH^2 \quad (1)$

Dans ACH rectangle en H: $\quad AH^2 = b^2 - CH^2 \quad (2)$

De (1) et (2), on tire $\quad c^2 - BH^2 = b^2 - CH^2 \quad (3)$

Exprimons CH en fonction de BH:

On sait que $H \in [BC]$ c'est à dire que $BH + HC = BC$ d'où

$$CH^2 = (BC - BH)^2 = a^2 - 2a\,BH + BH^2.$$

Dans (3), $\quad c^2 - BH^2 = b^2 - a^2 + 2a\,BH - BH^2$

d'où $\quad BH = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$

Dans (1)
$$\mathcal{A}^2 = \frac{a^2}{4} \times \left(c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}\right) = \frac{a^2c^2}{4} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{16}$$

$$\mathcal{A}^2 = \left(\frac{ac}{2} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4}\right) \times \left(\frac{ac}{2} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4}\right)$$

$$\mathcal{A}^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{4} \times \frac{b^2 - a^2 - c^2 + 2ac}{4}$$

$$\mathcal{A}^2 = \frac{(a + c)^2 - b^2}{4} \times \frac{b^2 - (a - c)^2}{4}$$

$$\mathcal{A}^2 = \frac{a + c + b}{2} \times \frac{a + c - b}{2} \times \frac{b + a - c}{2} \times \frac{b - a + c}{2}$$

or, on a : $\quad p = \dfrac{a + b + c}{2}, \quad p - a = \dfrac{b + c - a}{2},$

$$p - b = \frac{a + c - b}{2}, \; p - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Donc $\quad \mathcal{A}^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$

et $\quad$ Aire de $ABC = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$

2 - ABC est un triangle possédant un angle obtus.

Dans ces conditions, H est extérieur à [BC] : on aura par exemple, sans diminuer la généralité de la situation, $CH = BC + BH$.

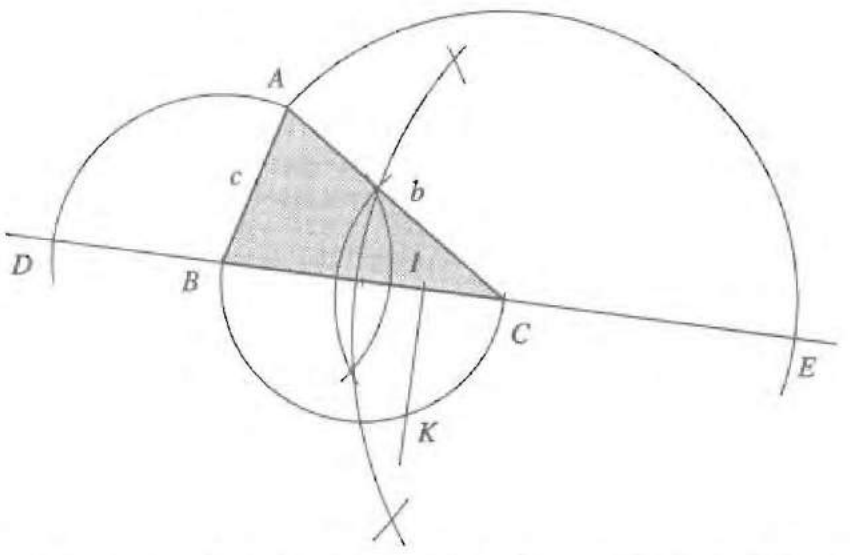
Le calcul est mené de manière analogue. Le résultat est le même.
La formule est générale.

II - Vérification par le tracé

Ce tracé est fait à la règle et au compas. Il fait appel à la quadrature du rectangle et à la relation métrique : «Dans un triangle rectangle, la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne géométrique entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (*).

Ce tracé consiste à construire un carré d'aire $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ et un triangle rectangle isocèle d'aire égale à celle de ABC pavable par le carré précédent.

1 - Construction du segment de longueur $\sqrt{(p-b)(p-c)}$



Soit D le point de la demi-droite $[CB)$ tel que $BD = c$ et E celui de $[BC)$ tel que $CE = b$.

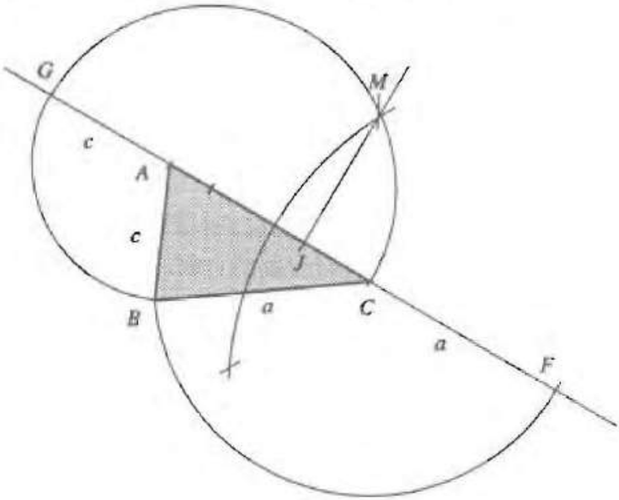
$[DE]$ a pour longueur $a + b + c$ soit le périmètre $2p$ de ABC.

Soit I le milieu de $[DE]$, on a $IB = p - c$ et $IC = p - b$.

On construit le demi-cercle de diamètre $[BC]$; la perpendiculaire en I à (BC) coupe le demi-cercle en K.

En vertu de la relation métrique (*), on a donc : $IK = \sqrt{(p-b)(p-c)}$

2 - Construction du segment de longueur $\sqrt{p(p-a)}$



Soit G le point de la demi-droite $[CA)$ tel que $AG = c$ et F celui de la demi-droite $[AC)$ tel que $CF = a$. $[GF]$ a pour longueur $a + b + c$ soit le périmètre $2p$ de ABC. Soit J le milieu de $[GF]$, on a $JG = p$ et $JC = p - a$.

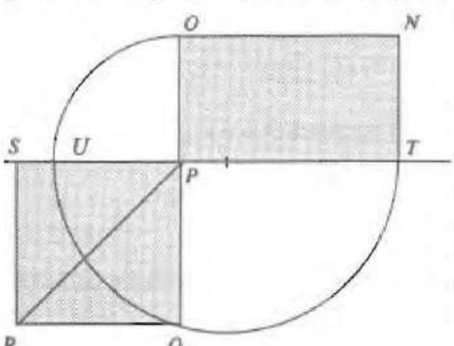
On construit le demi-cercle de diamètre $[CG]$; la perpendiculaire en J à (FG) coupe le demi-cercle en M.

En vertu de la relation métrique A, on a donc : $JM = \sqrt{p(p-a)}$.

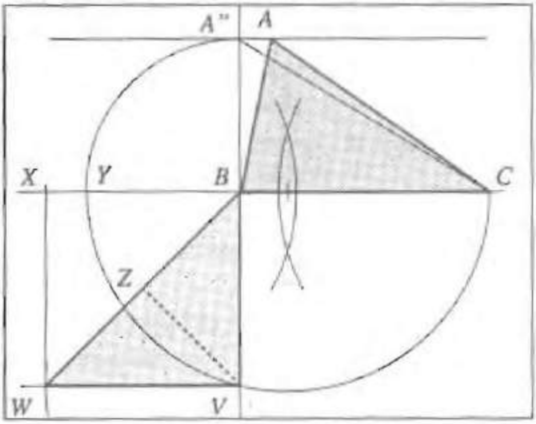
3 - Construction d'un carré d'aire $JM = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

A partir des segments $[IK]$ et $[JM]$ précédents, on construit le rectangle $PTNO$ de dimensions $\sqrt{p(p-a)}$ et $\sqrt{(p-b)(p-c)}$. soit U le point de $[TP)$ tel que $PU = PO$.

La perpendiculaire en P à (PT) coupe en Q le demi-cercle de diamètre $[TU]$. On construit le carré $PQRS$ sur le côté $[PQ]$ qui a même aire que le rectangle $PTNO$.



4 - Construction d'un triangle isocèle rectangle de même aire que *ABC*.



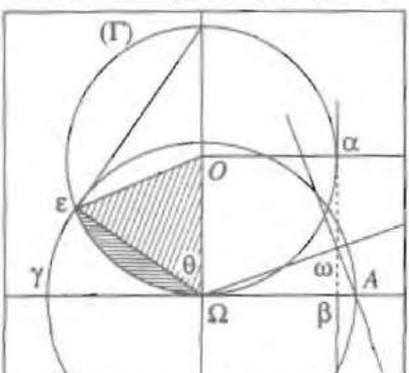
- Deux triangle de même base et de même hauteur ont la même aire. On trace par A la parallèle δ à (BC). La perpendiculaire en B à (BC) coupe δ en A'.
  Aire ABC = Aire $A'BC$.
- Soit Y le point de $[CB)$ tel que $BY = BA'$. La perpendiculaire en B à (BC) coupe en V le demi-cercle de diamètre $[CY]$. $BXWY$ est le carré construit sur $[BV]$. Le triangle rectangle isocèle BVW a la même aire que $A'BC$ donc que ABC.

5 - Les constructions des paragraphes 3 et 4 ci-dessus ayant été exécutées avec soin, on trace la hauteur $[VZ]$ issue de V dans BVW. On contrôle (ouverture du compas) : $BV = PR$ et $PQ = VZ$. Les deux triangles rectangles isocèles BVZ et VZW pavent donc, à la précision du tracé près, le carré $PQRS$. $PQRS$ et BVW, donc $PQRS$ et ABC ont, à la précision du tracé près, la même aire. **C'est la "vérification annoncée".**

REMARQUE :

Il est essentiel de souligner que le contrôle géométrique n'est pas totalement «validant» (précision du tracé...). On peut, pour compléter la réflexion sur ce point, suggérer la situation suivante :

Cercle Γ donné, centre O. Point Ω de Γ donné. ω aux 2/5 de $[\beta\alpha]$ à partir de β. $\Omega\omega A$ est rectangle en ω.



A la précision du tracé près, le cercle γ de centre Ω, passant par A, "partage" le disque bordé par Γ en deux domaines de même aire... Ce tracé pourrait donc (abusivement) passer pour une validation de la formule suivante, où r (resp. R) désigne le rayon de γ (resp. Γ) :

(i) $\quad r = (29/25).R$

Or, cette formule est incorrecte...

Trivialement, si r est le rayon de γ et R celui de Γ : $R < r < R\sqrt{2}$.
On introduit (cf. figure ci-dessus) $r/2R = \cos\theta$; $\theta = \text{Arccos}(r/2R)$.
L'aire hachurée /// : (secteur angulaire $\Omega\varepsilon\varepsilon'$ dans le disque de bord γ) mesure

$$\mathcal{A}_1 = [r^2/2] \times \theta$$

Aire hachurée ≡ : (portion du disque de bord Γ : calcul par différence à l'aide du secteur angulaire$(O\varepsilon\Omega)$ et du triangle $[O\varepsilon\Omega]$) mesure $\mathcal{A}_2 = [R^2/2]\times[\pi - 2\theta)] - [R^2 \times \sin(\pi - 2\theta)]/2$.

La contrainte imposée équivaut à la suivante $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \pi R^2/4$. D'où l'équation :

$$(*) \qquad [r^2/2][\theta] + [R^2/2][\pi - 2\theta - \sin 2\theta] = \pi R^2/4$$

Division par R^2 ; introduction de la variable $x = r/R$; utilisation de $\theta = \text{Arccos}(x/2)$. Il vient

$$(e) \qquad (x^2 - 2)\ \text{Arccos}\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x^2}{4}\right)\right)} + \frac{\pi}{2} = 0$$

C'est un problème de zéro pour une fonction de x continue dont la croissance (sur $[1\ ,\ \sqrt{2}]$) d'une valeur négative à une valeur positive est trivialement conséquence de l'introduction géométrique de l'équation (e). Existence et unicité d'une solution sur $]1\ ,\ \sqrt{2}[$. Estimation numérique : logiciel intégré standard de résolution d'équation d'une calculatrice ; par exemple, par la touche "solve" d'une HP 15C : $x = 1.158728473$.

$29/25 = 1.16$ apparaît alors comme une (très bonne) valeur approchée de $x = r/R$ répondant à la question (erreur inférieure à 2.10^{-3})... au point que la comparaison de deux tracés de précision courante fondés respectivement sur cette détermination rationnelle et sur la valeur HP affichée ne décèlera pas la "nuance théorique" là où, néanmoins, il ne saurait y avoir affirmation d'exactitude pour la "formule" (i) proposée, dont on pourrait en outre prétendre déduire une pseudo construction de γ à partir de Γ "à la règle et au compas"!