Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique : un exemple avec l'objet "racine carrée"

Teresa Assude
IUFM de Grenoble

L'observation des systèmes d'enseignement montre que les objets de savoir présents, à un moment donné, dans un système d'enseignement, ne sont pas pérennes : il y a des changements, des évolutions et parfois des ruptures assez grandes comme cela a été le cas lors de la réforme dite des mathématiques modernes. L'émergence, la vie et la disparition des objets de savoir dans un système d'enseignement donné sont des problèmes d'étude fondamentaux pour un didacticien, pour qui tout ce qui concerne l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (et notamment les supposées évidences) doit être problématisé. Un des problèmes de la didactique des mathématiques est le suivant: il existe des objets de savoir mathématique à enseigner et à apprendre mais d'où viennent ces objets qu'on enseigne ? Qui légitime l'existence des objets de savoir ? Quelles filiations entre les objets enseignés et les objets produits par les mathématiciens ? Voilà quelques-unes des questions de départ de l'étude systématique, en didactique des mathématiques, des phénomènes de transposition didactique ([1]).

[1] Voir notamment les travaux d'Y. Chevallard.

L'introduction des objets de savoir dans un certain système d'enseignement n'est pas évidente comme nous le montre Carlo BOURLET, auteur d'un livre d'algèbre écrit en 1909 et destiné aux classes de Mathématiques. Il écrit dans l'Avertissement de son ouvrage (2) :

> «*Lorsque parut, il y a quatorze ans, la première édition de ces* Leçons d'Algèbre élémentaire, *la théorie des dérivées ne figurait pas au programme du baccalauréat ès sciences; bien plus, un candidat à ce grade avait le droit d'ignorer même le mot "fonction".*
> *Avec l'assentiment et les conseils de mon éminent maître, M.G.Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, j'avais, non sans quelque témérité, passé outre et rédigé un ouvrage qui conduisait l'élève au loin, en dehors des limites que lui assignaient les décrets officiels.*
> *Pour la première, on trouvait dans ce livre la théorie des nombres négatifs placée en tête de l'Algèbre, exposée en détail, en elle-même, avant le Calcul algébrique.*»

Et il dit encore un peu plus loin :

> «*J'ai osé faire aujourd'hui ce que je n'avais pas eu la hardiesse de faire il y a quatorze ans, à savoir d'introduire le théorème des accroissements finis dont l'emploi met tant de rigueur et de netteté dans l'exposition, sans la compliquer aucunement.*»

Cette citation, bien lointaine dans le temps, est bien au cœur de la problématique transpositive : ce qui nous apparaît aujourd'hui comme naturel - par exemple, l'étude des nombres négatifs en classe de cinquième - a fait autrefois l'objet de discussions pour trouver une place dans les classes terminales. Elle montre aussi que la légitimation des choix de l'auteur a été faite par un "*éminent mathématicien*" car la légitimité de ce qui est enseigné ne peut pas être faite que par les seuls acteurs du système d'enseignement : à un moment donné les mathématiciens sont appelés à donner leur avis sur les contenus à enseigner (et dans la plupart des cas leur contrôle s'arrête là). Remarquons encore les mots de précaution - *j'ai osé* - et - *je n'ai pas eu la hardiesse* - utilisés par C.BOURLET pour faire entrer le lecteur dans un univers d'objets de savoir inhabituels dans l'enseignement secondaire, au moins dans la structure proposée.

A côté de ce phénomène d'introduction de nouveaux objets, il y a d'autres objets qui semblent pérennes puisqu'ils existent depuis très longtemps dans l'enseignement secondaire comme c'est le cas par exemple de

2 Bourlet C. (1909), *Leçons d'Algèbre élémentaire*, Librairie Armand Colin, Paris, p.v.

l'objet "racine carrée". Analysant de plus près la vie de cet objet, nous nous apercevons que le travail de transposition didactique ne consiste pas seulement à faire émerger ou à faire disparaître des objets de savoir dans un système donné mais ce travail concerne aussi l'évolution d'un certain objet par la mise en place de nouvelles organisations où ces objets viennent prendre des places et des fonctions diverses. L'étude de la vie de l'objet "racine carrée" dans le système d'enseignement secondaire en France permet de mettre en évidence un nouveau phénomène de transposition didactique : il y a des objets qui peuvent être oubliés dans le travail transpositif et nous appellerons ce phénomène *arrêt de la transposition didactique*.

Pour le dire crûment, actuellement, l'objet "racine carrée" existe bel et bien dans l'enseignement au Collège mais il est difficile d'attribuer un statut à cet objet. En plus, cet objet est souvent regardé comme un objet "à problèmes" ce qui nous pousse à penser qu'on aurait pu le faire disparaître. Pourquoi n'a-t-il pas disparu (comme tant d'autres objets) ? L'objet "racine carrée" étant un des objets les plus "remarqués" de l'enseignement de base, pourquoi est-il l'un des objets les plus ignorés des différentes réformes successives du système d'enseignement français ? ([3])

Pendant très longtemps l'objet "racine carrée" a fait partie du continent des opérations de l'arithmétique : l'extraction de la racine carrée était la cinquième de ces opérations. Dans cette optique, on extrayait la racine comme on effectuait une division et l'algorithme traditionnel d'extraction de la racine carrée (celui qui consiste à partager le nombre en tranches de deux chiffres) était l'élément de continuité et de cohésion des algorithmes des opérations arithmétiques dans le système décimal. Voilà cet algorithme et je vais citer une remarque d'un livre de Elie CARTAN sur l'arithmétique pour les classes de quatrième et troisième ([4]) :

> *«L'opération ainsi définie n'est pas toujours possible»*

et un peu plus loin :

> *«Pour les nombres qui ne sont pas carrés parfaits, nous définirons une racine carrée approchée, de même que, pour deux nombres entiers, nous avons défini un quotient approché parce que nous étions souvent dans l'impossibilité de trouver un quotient exact.»*

3 Les analyses qui suivent sont extraites de mon travail de thèse intitulé *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum.*

4 Cartan A et E. (1934), *Arithmétique, classes de 4e et 3e*, Librairie Armand Colin, Paris

Cette organisation permettait de gérer d'une façon économe la question de l'irrationalité - l'opposition rationnel/irrationnel était réglée par le biais de la notion de nombre décimal illimité,en fournissant des critères pour distinguer l'une et l'autre sorte de nombres, périodique/non périodique - et la question des approximations numériques : l'algorithme traditionnel donne des valeurs approchées décimales avec n décimales exactes obtenues une à une. En outre, cette organisation classique renvoyait à l'algèbre tout ce qui concernait les manipulations calculatoires sur les radicaux en les associant notamment aux équations du second degré. Voyons quelques exemples.

On demandait aux candidats du Brevet élémentaire en 1905 à Paris de mettre sous la forme de fraction (ordinaire) les nombres 0,5454..., ou encore 0,324324... comme le font certains manuels actuels en d'autres pays en demandant de déterminer la nature rationnelle ou irrationnelle du nombre 0,345534555345555, ou encore de déterminer la nature du nombre x solution de l'équation $x + a = 4$, où $a = 0{,}323223222322223\ldots$ En outre, la question du numérique était réglée par le biais de la notion de valeur approchée avec n décimales exactes, Ainsi 1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec deux décimales exactes et la notion de valeur approchée par défaut d'un nombre a à tant près était alors bien précise: c'est le nombre décimal $\frac{N}{10^n}$, où N est le nombre entier unique tel que l'on ait : $\frac{N}{10^n} \leq a \leq \frac{N+1}{10^n}$ notion qui commence à flotter avec la disparition de l'algorithme d'extraction de la racine carrée. Un symptôme de ce flottement peut être trouvé dans le commentaire d'un professeur de mathématiques à l'épreuve du BEPC à Bordeaux vers 1976. L'énoncé de l'épreuve porte sur le calcul de $A\left(\sqrt{2}\right)$, où $A(x)$ est le polynôme $6x^2 - 19x + 15$. La question proposée est formulée ainsi :

> *«Calculer $A\left(\sqrt{2}\right)$ et donner la valeur approchée par défaut à 10^{-1} près du résultat»*

et l'auteur fait alors suivre cet extrait d'énoncé du commentaire suivant :

> *«Tiens, LA valeur approchée! N'y en aurait-il donc qu'une ?»*

et un peu plus loin:

> *«Et je suppose que LA valeur demandée est 0,1 car*
>
> $0{,}1 \leq 24 - 19\sqrt{2} < 0{,}2$.»

Or, dans l'organisation ancienne cette question ne se poserait même pas puisque cette notion est bien précise et qu'il n'en est plus de même au moment où cet auteur écrit ces lignes. La notion de valeur approchée à tant près est remplacée par celle d'erreur absolue et de limite supérieure de l'erreur absolue.

Le statut de l'objet "racine carrée" était alors bien précisé ce qui n'est plus le cas actuellement : cette décomposition a commencé notamment avec la disparition de l'algorithme traditionnel d'extraction de la racine carrée et ni la réforme des mathématiques modernes ni les réformes postérieures n'ont su apporter une réponse à cette question. Nous pourrions penser, en regardant les programmes actuels, que le statut de l'objet RC est le suivant : objet sur lequel on fait des multiplications, des divisions. Or, les manipulations opératoires par elles-mêmes ne suffisent pas à donner un statut à l'objet sur lequel on calcule car la question de la raison d'être de ces manipulations doit être posée. Remarquons simplement que l'algèbre des radicaux actuelle est un résidu d'un corpus de règles calculatoires qui a pu atteindre autrefois un degré supérieur de sophistication, comme le montre l'extrait suivant d'un ouvrage *Algebra* de G.CHRYSTAL - dont la première édition date de 1886 concernant les exercices demandés (5) :

«Rationalise the following : -

(40.) $3.5^{1/3} - 4^{1/5}$

(41.) $\sum \sqrt{(b+c-a)}$

(42.) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{6}$

(43.) $3.2^{2/3} + 4.2^{1/3} - 1.$

(44.) $a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3}.$

(45.) $2^{1/4} + 2^{1/2} + 1.$

(46.) If $u = x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}$

then $\sqrt{(1+u^2)} = xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$

(47.) Show that

$$\frac{2}{\sqrt{(y-z)} + \sqrt{(z-x)} + \sqrt{(x-y)}}$$

$$= \frac{(y-z)^{3/2} + (z-x)^{3/2} + (x-y)^{3/2} + (y-z)^{1/3}(z-x)^{1/2}(x-y)^{1/2}}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$$

5 Chrystal 1886, p. 200

(48.) If $x = 1/(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})$, $y = 1/(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})$, $z = 1/(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$

$u = 1/(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

then $\prod_{xyz}(-x+y+z+u)/\left(\sum x-u\right)^3 = \sum(b+c-a)/8abc$

Les manipulations formelles dans le livre de G.CHRYSTAL avaient comme but la simplification des expressions à calculer. Actuellement, les manipulations formelles des radicaux sont aussi faites dans le sens de simplifier ; voilà donc le mot-clé : simplifier, obtenir une forme plus simple. Or, la pertinence de cette simplification n'est plus aujourd'hui celle qu'elle avait au temps de G.CHRYSTAL. Par exemple, aujourd'hui, avec les calculettes, il n'y a pas plus de raison de favoriser une expression du type $\frac{\sqrt{2}}{2}$ plutôt que l'expression $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Les outils mathématiques qui permettraient de choisir, dans un ensemble d'expressions numériquement égales, l'expression de meilleur rendement en utilisant les calculettes ne sont pas disponibles au Collège où pourtant apparaît ce type de manipulations. Le mot-clé de simplification doit être regardé dans une dialectique entre le formel et le fonctionnel qui reste bien ossifiée au niveau du Collège. Ou pour le dire autrement, même au niveau du travail mathématique au Collège, les moyens utilisés devraient être en concordance avec les buts poursuivis. L'enseignement au Collège privilégie les manipulations consistant à "rendre rationnel le dénominateur", comme si, devant une expression ayant des radicaux dans les dénominateurs, cette opération était toujours pertinente. Or, ceci n'est plus vrai si l'on veut accorder moyens et fins : par exemple, au Lycée, pour calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $g(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ il convient de passer à l'expression $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

D'autres exemples pourraient être donnés.

Dans le curriculum du Collège, les différentes réformes n'ont pas touché à ce thème qui reste un point isolé auquel personne ne sait attribuer un statut. La réforme des mathématiques modernes n'a pas non plus touché à ce thème : la consigne est encore la même - *"simplifier"* ou *"rendre rationnels les dénominateurs"* - sans qu'on s'interroge sur la possibilité et l'intérêt de faire ce type de manipulations. Cette réforme a introduit les notions de groupe, d'anneau, de corps mais ne passera pas le cap des extensions de corps et notamment des extensions quadratiques, ce qui aurait conduit à reformuler le problème : *«mettre l'expression A sous la forme $a+b\sqrt{3}$, avec a, b $\in$ Q»*, comme on le fait en ce qui concerne l'étude des nombres complexes.

La raison des calculs effectués ainsi au Collège reste obscure, y compris pour les professeurs. Et ce ne sera pas par l'examen de l'algèbre des radicaux que nous pourrons répondre d'une manière positive à notre problème du statut de l'objet RC.

L'objet "racine carrée" a cessé d'être l'une des opérations de l'arithmétique et il n'arrive pas à devenir une autre chose et notamment une fonction en ce qui concerne l'enseignement au Collège. Pour mieux nous apercevoir de ce fait nous renvoyons le lecteur aux discussions récentes au sein du *Bulletin* de l'APMEP à propos des nominations de la racine carrée, qui relèvent explicitement de l'ambiguïté de cet objet dans l'enseignement secondaire. Voilà un des symptômes de cette ambiguïté (6) :

> *«Prononcez le mot "racine carrée", mais ne l'écrivez surtout pas : à partir du moment où vous mettrez un «s», vous aurez déjà des ennuis! A en juger par l'abondant courrier reçu sur la question, la notion n'est pas anodine chez les collègues et, quoiqu'on en dise, elle ne passe jamais inaperçue.»*

ou alors

> *«Comment un professeur de mathématiques peut-il*
> - *affirmer, en terminale :*
>   "Tout réel non nul a, dans C, n racines n-ièmes donc 9 a pour racines carrées 3 et –3 ";
> - *avoir dit, dans les classes précédentes :*
>   "9 a une racine carrée : 3"
>
> *et savoir que* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$?
>
> *Et comment s'étonner alors que l'équation $x^2 = 9$ n'ait, pour de nombreux élèves, qu'une seule solution, dans* **C** *comme dans* $\mathbb{R}$ *?»*

L'ambiguïté peut être levée, comme le disent certains auteurs dans les articles qui réagissent à cette intervention, si l'on considère la fonction "racine carrée" et non le nombre "racine carrée". Il ne revient pas au même de chercher, pour un nombre réel positif a quelconque, un nombre b tel que $b^2 = a$, ou de chercher une fonction r telle que $r^2(x) = x$, pour tout x où elle est définie. La différence peut sembler minime mais le cadre conceptuel de travail est fort différent. Cherchant à définir la racine carrée d'un nombre on

---

6 Voir : Pelé C. (1991), $\sqrt{9}$ · Racine(s) carrée(s) ?, *Bulletin de l'APMEP*, n°381, p.655, et les articles de F. Martin, Antoine Bodin, Christian Gautier, Léonard Gallardo et Marc Lecerre dans les Bulletins n° 380, 382 et 385.

peut lui imposer d'être positive ou négative. Cherchant à définir la fonction racine carrée on peut lui demander d'être continue et cela n'a pas d'équivalent en termes de nombres. Imaginons que nous avons une fonction r (vérifiant $r^2(x) = x$, $\forall x \geq 0$) telle qu'il existe $x_1 < x_2$ vérifiant $r(x_1) < 0$ et $r(x_2) > 0$. Une telle fonction est possible mais elle ne possèderait pas alors la propriété des valeurs intermédiaires. Si en effet r possédait cette propriété, il existerait $\alpha \in]x_1, x_2[$ tel que $r(\alpha)= 0$; or, $r(\alpha)= 0$ entraîne $r^2(\alpha)= 0$ et donc $\alpha = 0 \notin]x_1, x_2[$ ce qui est contradictoire. Ce qui précède montre que ou bien la fonction r est toujours positive (et nulle en 0) ou bien elle est toujours négative (et nulle en 0), si du moins on veut lui imposer d'être continue. Il y a deux fonctions continues et deux seulement vérifiant $r^2=x$, à savoir $r(x) = \sqrt{x}$ et $r(x) = -\sqrt{x}$. On ne peut pas, sans perdre la continuité de r, mélanger ces deux fonctions. Nous sommes ici dans un autre cadre conceptuel et instrumental qui est le domaine des fonctions.

Or, le passage du cadre des nombres au cadre des fonctions n'a pas réellement été fait en ce qui concerne l'objet "racine carrée". Une de nos hypothèses (confirmée par nos analyses) est que le phénomène *d'arrêt de la transposition didactique* de l'objet "racine carrée" est lié à *l'échec de la transposition didactique* en ce qui concerne l'objet "fonction" dans l'enseignement secondaire : cet objet est un objet manquant dans la culture du système d'enseignement secondaire même s'il est un thème d'étude au Lycée et est officiellement introduit au Collège, c'est-à-dire que la notion de fonction existe entant qu'objet d'étude mais non comme outil de travail et de pensée mathématique. Précisons un peu ce point qui peut paraître paradoxal puisque l'objet "fonction" existe même dans les programmes au Collège. Par exemple, au programme de la classe de quatrième il est écrit *"Applications linéaires et proportionnalité"*, ce qui pourrait nous amener à infirmer notre hypothèse. Or, nous observons que les gestes à faire en ce qui concerne les problèmes de proportionnalité n'utilisent pas les propriétés de la fonction linéaire c'est-à-dire que la fonction linéaire apparaît comme un but en soi mais non comme un outil de travail pour la résolution de certains problèmes (7). Par exemple, pour résoudre le problème suivant :

«25 mètres d'étoffe coûtent 36 francs. Combien coûtent 40 mètres ?»

les outils utilisés sont soit le tableau de proportionnalité (ce qui peut se rapprocher de l'aspect fonctionnel) et le produit en croix, soit la représentation

7 Nous utilisons ici les analyses faites dans le travail de Marianna Bosch, intitulé *El semiótic i l'instrumentalm en el tractament classic de les situacions de proporcionalitat*, Departement de Mathematiques, Universitat Autonoma de Barcelona, 1991.

du problème par une proportion : $\frac{25}{40} = \frac{36}{x}$ et le produit en croix (ce qui se rapproche de l'ancienne théorie des rapports et proportions), soit les deux ensemble. Il est rare de trouver une solution qu'on peut appeler "fonctionnelle" impliquant les propriétés de linéarité de la fonction dans une réponse du type :

> Soit f la fonction qui associe les mètres d'étoffe au prix à payer. On a $f(25) = 36$ et on veut calculer la valeur de la fonction en 40 ($f(40)$). Sachant que la fonction est linéaire, on peut écrire $f(25) = 25\,f(1) = 36$ d'où $f(1) = 36/25$. Il vient alors $f(40) = 40\,f(1) = 40 \times 36/25 = 57{,}60$.

Ce qui nous apparaît dans notre analyse comme un échec de la transposition didactique de l'objet "fonction" n'est pas relatif à l'absence de l'objet dans le curriculum mais surtout au type de travail mis en pratique dans le système d'enseignement au Collège et même au Lycée, Cet échec bloque ainsi l'évolution du statut de l'objet "racine carrée" dont *la reprise de la transposition didactique* suppose un profond changement du rapport institutionnel dans le système d'enseignement secondaire à l'objet "fonction".

Bibliographie

Assude T. (1992), *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum*, thèse de l'université Joseph Fourier,Grenoble.

Bosch M. (1991), *El Semiotic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proportionalitat*, Treball de Recerca presentat al departament de Matemàtiques, Universitat Autonoma de Barcelona.

Bourlet C. (1909), *Leçons d'Algèbre élémentaire*, Librairie Armand Colin, Paris

Cartan A, et E. (1934), *Arithmétique, Classes de 4e et de 3e*, Librairie Armand Colin, Paris.

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, deuxième édition 1991.

Chevallard Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques,Vol.12, n°1, pp.73-112.

Chrystal G. (1886), *Algebra*, Chelsea Publishing Company, New York, septième édition 1964.

Pelé C. (1991), $\sqrt{9}$, Racine(s) Carrée(s) ?, *Bulletin de l'APMEP*, n°381, p.655

Rajoson L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, thèse de 3ème cycle, Université d'Aix-Marseille II.