L'OLYMPIADE INTERNATIONALE DE MATHÉMATIQUES 1995

SOLUTIONS

François LO JACOMO

A la demande de plusieurs collègues, nous avons publié dans le dernier *Bulletin* (n° 401, décembre 1995) une présentation des Olympiades Internationales de Mathématiques ainsi que les énoncés de la session 1995. Voici maintenant des solutions et des commentaires sur ces énoncés.

Je tiens à remercier Dominique ROUX qui m'a fait parvenir les énoncés, puis les premières solutions officielles, Claude DESCHAMPS, chef de la délégation française, qui m'a fourni tous les renseignements et documents complémentaires, Johan YEBBOU, chef suppléant de la délégation française et Jacques BOUTELOUP qui m'ont aidé à voir certains aspects des problèmes.

La difficulté relative des problèmes peut être appréciée au vu du tableau que voici, mentionnant pour chacun d'eux la moyenne, le nombre de notes maximales (7/7) et le nombre de zéros obtenus par l'ensemble des candidats et par les candidats français :

Problèmes	INTERNATIONAL			FRANCE		
	7/7	0/7	moyenne	7/7	0/7	moyenne
1	58%	11%	5,1	5/6	1/6	5,8
2	22%	73%	1,7	0/6	5/6	0,3
3	24%	23%	3,1	1/6	2/6	2,3
4	41%	10%	4,6	6/6	0/6	7,0
5	42%	34%	3,4	2/6	3/6	3,2
6	8%	71%	1,1	1/6	5/6	1,2

PROBLÈME N°1

A, B, C et *D* sont, dans cet ordre, quatre points distincts d'une même droite. Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ se coupent aux points X et Y. La droite (XY) rencontre la droite (BC) au point Z. Soit P un point de la droite (XY), distinct de Z. La droite (CP) rencontre le cercle de diamètre $[AC]$ aux points C et M et la droite (BP) rencontre le cercle de diamètre $[BD]$ aux points B et N. Montrer que les droites (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

SOLUTION

Si l'on appelle M' l'intersection de (AM) avec (XY), les droites (AM'), $(M'Z)$ et (ZA) sont perpendiculaires respectivement à (PC), (CZ) et (ZP). Donc les triangles $AM'Z$ et PCZ sont semblables :

$$\frac{M'Z}{CZ} = \frac{ZA}{ZP} \Rightarrow M'Z.ZP = CZ.ZA$$

Maintenant, si N' désigne l'intersection de (DN) avec (XY), on prouve de la même manière que :

$$N'Z.\,ZP = BZ.\,ZD.$$

Or, $ZA.\,ZC = ZX^2 = ZB.\,ZD.$

Donc $ZM' = ZN'$, ce qui entraîne que $M' = N'$ car tous ces points : P, M, N, M', N' sont dans un même demi-plan de frontière (AD).

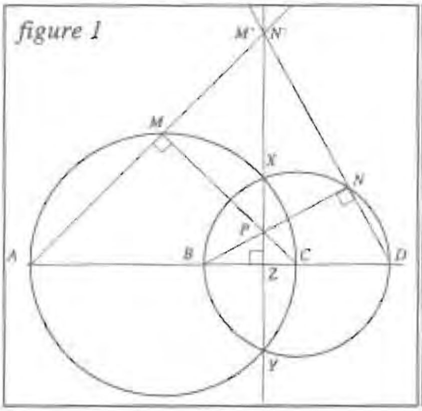


figure 1

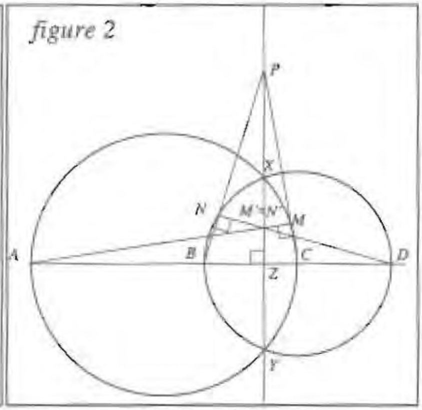


figure 2

COMMENTAIRES

1 - Le jury tenait à ce qu'on envisage les deux cas : P entre X et Y (figure 1) et P à l'extérieur de $[XY]$ (figure 2). Même si, pour certaines démonstrations, la distinction n'est guère pertinente, il n'est pas mauvais de s'en assurer. Par contre, il n'était pas utile d'évoquer les cas triviaux où P est en X ou en Y.

2 - Sans être explicitement requise, la notion de «puissance d'un point par rapport à un cercle» me semble au centre de cet exercice, car c'est elle qui suggère de faire appel à des *produits* de longueurs : $ZA.ZC = ZB.ZD$. Cela étant, les méthodes sont nombreuses.

Il faut d'abord traduire la dernière phrase de l'énoncé, de l'une des quatre manières possibles :

a) Montrer que (AM) et (DN) se coupent en un point de (XY).

b) Montrer que (AM) et (XY) se coupent en un point de (DN).

c) Montrer que (DN) et (XY) se coupent en un point de (AM).

d) Montrer "globalement" que (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

Le choix a) nécessite plus de connaissances et une vision plus globale du problème. La première solution officielle fait ce choix : utilisant la puissance de P par rapport aux cercles, puis des relations angulaires, elle prouve que B, C, M, N sont cocycliques, puis que A, D, M, N sont eux aussi cocycliques, donc que l'intersection Q de (AM) et (DN) a même puissance : $\overline{QM}.\overline{QA} = \overline{QN}.\overline{QD}$ par rapport aux deux cercles, dès lors, la droite (QX) recoupe les deux cercles au même point, qui ne peut être que Y.

Le choix d) nécessite de voir dans la figure autre chose que ce que stipule l'énoncé. C'est le cas d'une démonstration russe, qui introduit la parallèle à (BP) passant par A. Apparaît alors un triangle AUD, U étant l'intersection de cette parallèle avec la droite (XY). AUZ et BPZ sont des triangles semblables, par parallélisme, et le fait que $ZA.ZC = ZB.ZD$ permet de prouver que DUZ et CPZ sont eux aussi semblables, donc que (DU) est parallèle à (CP). Dès lors, les trois hauteurs du triangle AUD ne sont autres que les droites (AM), (DN) et (XY).

Le choix b), par ailleurs équivalent au choix c), permet de scinder le problème : il suffit, en définitive de déterminer l'intersection M' de (AM) et (XY) à partir d'éléments communs aux deux moitiés de figure, à savoir les points Z, P, X et Y. Cela peut même se faire analytiquement, pour ne pas dépayser les lycéens français. Dans presque tous les cas, on aura besoin de la relation $ZA.ZC = ZX^2 = ZB.ZD$, au demeurant plus élémentaire que la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

Mais j'ai gardé pour la fin une démonstration chinoise qui m'a semblé particulièrement élégante : A et C sont les milieux des arcs XY. Donc (MA) et (MC) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{YMX}$. Ces bissectrices coupent la droite (XY) en des points P et M' conjugués harmoniques par rapport à X et

Y. Même chose pour P et $N' = (ND) \cap (XY)$. Donc $M' = N'$.

PROBLÈME N°2

Soient a, b et c des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

SOLUTION

Posons : $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$

Comme $abc = 1$, $xyz = 1$ *et :*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$

Appelons S cette somme.

Si l'on pose : $u = \sqrt{y+z}$, $v = \sqrt{z+x}$, $w = \sqrt{x+y}$

et $u' = \frac{x}{\sqrt{y+z}}$, $v' = \frac{y}{\sqrt{z+x}}$, $w' = \frac{z}{\sqrt{x+y}}$ l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $(u^2 + v^2 + w^2)(u'^2 + v'^2 + w'^2) \geq (uu' + vv' + ww')^2$ permet d'écrire : $S \geq \frac{x+y+z}{2}$

donc $S \geq \frac{3}{2}$ puisque la moyenne arithmétique $\frac{x+y+z}{3}$ est supérieure ou égale à la moyenne géométrique $(xyz)^{1/3} = 1$.

COMMENTAIRE

Problème étonnamment déroutant sur lequel 73% des candidats (dont 5 des 6 candidats français) ont marqué zéro points.

On dispose en fait de très peu d'éléments pour aborder ce genre d'inégalités :

1 - Le fait que la moyenne arithmétique de n réels strictement positifs (en l'occurrence : $n = 3$) est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique, laquelle est supérieure ou égale à leur moyenne harmonique. Cela découle de la concavité de la fonction logarithme, et cela permet ici, pour le moins,

d'obtenir les deux derniers points du problème (sur 7 points), car toutes les méthodes aboutiront d'abord à l'inégalité : $S \geq \frac{x+y+z}{2}$.

2 - Le fait que le carré d'un réel est toujours positif ou nul, ce qui conduit notamment à l'inégalité de Cauchy, connue en France sous le nom de Cauchy-Schwartz :

$$\sum u_i^2 \sum v_i^2 \geq \left(\sum u_i v_i\right)^2 \text{ car } \sum u_i^2 \sum v_i^2 - \left(\sum u_i v_i\right)^2 = \sum_{i<j} \left(u_i v_j - u_j v_i\right)^2 \geq 0.$$

3 - Le fait que le produit de deux réels de même signe est positif, ce qui conduit à l'inégalité de Tchebycheff :

si $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$$\sum a_i \sum b_i \leq n \sum a_i b_i \text{ car } n \sum a_i b_i - \sum a_i \sum b_i = \sum_{i<j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

Mais il existe bien des manières d'utiliser ces quelques éléments, et on a du mal à se convaincre que la solution ne doit pas être cherchée ailleurs. On peut être tenté, par exemple, étant donné le rôle symétrique joué par a, b et c, de faire intervenir les polynômes symétriques élémentaires : $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc, d'autant que $abc = 1$; de tels calculs peuvent aboutir, comme le montre Jacques BOUTELOUP, mais à quel prix !

Comme apparemment rien ne nous permet d'utiliser l'inégalité de Tchebycheff, au demeurant moins connue, la vraie question est: comment faire apparaître des **carrés** ? C'est l'exposant 3 qui est trompeur, d'une part parce qu'il nous oblige à passer aux inverses en posant $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, d'autre part parce que l'inégalité : $S_t = \frac{x^t}{x+z} + \frac{y^t}{z+x} + \frac{z^t}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ est vraie pour tout tr i plet (x, y, z) de réels positifs vérifiant $xyz = 1$, pour beaucoup d'autres valeurs que $t = -3$ ou $t = 2$.

Et même si la matière première est toujours la même, la technique de résolution de ce genre de problèmes est extrêmement variée. Par exemple, pour prouver l'inégalité ci-dessus lorsque $t = 1$, j'ai écrit :

$$S_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(x+y)(x-y)^2 + (y+z)(y-z)^2 + (z+x)(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right)$$

alors que Jacques BOUTELOUP a remarqué que, très généralement, si l'on considère n réels strictement positifs α_i, $\sum \alpha_i \sum \frac{1}{\alpha_i} \geq n^2$ (la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne harmonique) ; il suffit donc de poser $\alpha_1 = y + z$, $\alpha_2 = z + x$, $\alpha_3 = x + y$ pour conclure. Est-ce un problème plus simple ? Pourtant $\frac{x^2}{y+z} = (x + y + z)\frac{x}{y+z} - x$, l'énoncé d'olympiade en découle donc (et la seconde solution officielle du jury rejoint cette méthode).

Remarquons au passage que, pour x, y et z strictement positifs,

$$x \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{x+z}$$

de sorte que l'inégalité de Tchebycheff permet d'écrire :

$$\forall t \geq 1 \qquad \frac{x^t}{y+z} + \frac{y^t}{z+x} + \frac{z^t}{x+y} \geq \frac{x^{t-1} + y^{t-1} + z^{t-1}}{2}$$

ce qui est supérieur ou égal à 3/2 lorsque $xyz = 1$.

Mais aucune de ces méthodes ne convient pour prouver que si x, y, z sont trois réels strictement positifs, $\frac{x}{2y+z} + \frac{y}{2z+x} + \frac{z}{2x+y} \geq 1$ et celle que j'ai utilisée dans ce cas, à savoir :

$$(x + y + z)^2 - (x - y)^2 = (2x + z)(2y + z) \leq (x + y + z)^2$$

ne permet pas de montrer plus généralement que si x, y, z et k sont quatre réels strictement positifs, $\frac{x}{ky+z} + \frac{y}{kz+x} + \frac{z}{kx+y} \geq \frac{3}{k+1}$.

Pour revenir au problème d'olympiade, j'avais utilisé une méthode légèrement différente, en écrivant :

$$\frac{x^2}{y+z} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(y+z)^2} - x - \frac{yz}{y+z}$$

$$\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{(y+z)(z+x)} + \frac{1}{(z+x)(x+y)} + \frac{1}{(x+y)(y+z)}$$

et $yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2$

Mais une fois de plus, on est ramené à l'inégalité de Cauchy et à la minoration d'un carré, ou à l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

PROBLÈME N°3

Trouver tous les entiers n, strictement supérieurs à 3, pour lesquels il existe n points $A_1, A_2, \dots A_n$ du plan et des nombres réels $r_1, r_2, \dots, r_n$ vérifiant les deux conditions :

(i) trois quelconques des points $A_1, A_2, \dots A_n$ ne sont pas alignés,

(ii) pour tout triplet i, j, k $(1 \leq i < j < k \leq n)$ l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ a pour valeur $r_i + r_j + r_k$.

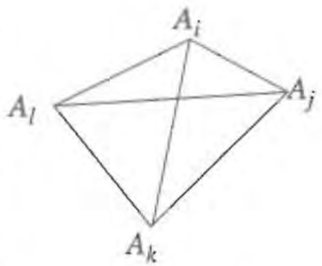
SOLUTION

$n = 4$ convient dans la mesure où, si je choisis A_1, A_2, A_3, A_4 sommets d'un carré d'aire 1, et $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/6$, les deux conditions sont clairement vérifiées.

Prouvons que $n = 5$ ne convient pas, ce qui exclura du même coup $n > 5$, car si les conditions sont vérifiées pour n points, elles le sont a fortiori pour tout sous-ensemble de ces n points.

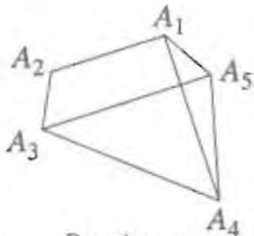
Raisonnons par l'absurde, en notant, pour simplifier, $[ijk]$ l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ et en utilisant un lemme :

LEMME Si $A_iA_jA_kA_l$ est un quadrilatère convexe, alors $r_i + r_k = r_j + r_l$.



En effet, on peut écrire : $[ijk] + [kli] =$ Aire $(A_iA_jA_kA_l) = [jkl] + [lij]$ soit $2r_i + r_j + 2r_k + r_l = r_i + 2r_j + r_k + 2r_l$ ce qui prouve le lemme.

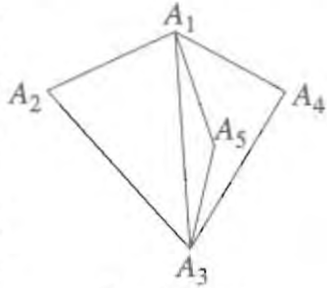
Considérons maintenant l'enveloppe convexe des cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 : cela peut être un pentagone (convexe), un quadrilatère (par exemple : $A_1A_2A_3A_4$, le point A_5 étant à l'intérieur), ou un triangle (par exemple : $A_1A_2A_3$, les points A_4 et A_5 étant à l'intérieur).



Premier cas

Dans le premier cas, comme par hypothèse, A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_2 A_3)$ ne sont pas parallèles, donc l'une des deux au moins, par exemple $(A_1 A_2)$, n'est pas parallèle à $(A_4 A_5)$. Les triangles $A_4A_1A_2$ et $A_5A_1A_2$ ayant la même base $[A_1A_2]$ mais pas la même hauteur, $[421] \neq [512]$, donc $r_5 \neq r_4$. Mais comme les quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ et $A_1A_2A_3A_5$ sont convexes, d'après le lemme $r_2 + r_4 = r_1 + r_3 = r_2 + r_5$ d'où $r_5 = r_4$: contradiction.

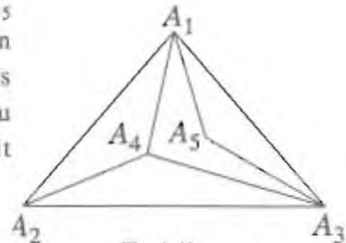
Dans le deuxième cas, A_5, qui est à l'intérieur du quadrilatère convexe $A_1A_2A_3A_4$, est soit à l'intérieur du triangle $A_1A_2A_3$, soit à l'intérieur du triangle $A_3A_4A_1$, puisque A_1, A_5 et A_3 ne sont pas alignés. Supposons-le intérieur à $A_3A_4A_1$: $[531] < [431] \Rightarrow r_5 < r_4$. Mais comme les quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ et $A_1A_2A_3A_5$ sont convexes, $r_2 + r_4 = r_1 + r_3 = r_2 + r_5 \Rightarrow r_4 = r_5$, même contradiction.



Deuxième cas

Dans le troisième cas, les points A_4 et A_5 sont intérieurs au triangle $A_1A_2A_3$, mais en outre A_5 est intérieur à l'un des triangles $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$ ou $A_3A_1A_4$, par exemple au troisième $A_3A_1A_4$,. On en déduit $[314] > [315]$ donc $r_4 > r_5$.

$$\text{Mais } [123] = [124] + [234] + [314] = [125] + [235] + [315]$$



Troisième cas

d'où $r_4 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) = r_5$: contradition,ce qui achève la démonstration.

COMMENTAIRE

Ce problème soulevait en fait deux difficultés. Mais tout d'abord, le fait de savoir quelles sont effectivement les valeurs de n qui conviennent ne doit pas être une difficulté. Il est immédiat que $n = 4$ convient, inutile de s'attarder là-dessus, un banal exemple suffit, même si l'on peut prouver sans grande difficulté qu'à tout quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ correspond un quadruplet (r_1, r_2, r_3, r_4) de réels tels que la condition (ii) soit vérifiée. L'essentiel, c'est de prouver que $n = 5$ ne convient pas, car si $n = 5$ convenait lui aussi, le problème prendrait une toute autre ampleur et ne serait pas faisable en temps limité. Jacques BOUTELOUP, qui a trouvé ce problème plus difficile que les cinq autres, a pourtant tout de suite opté pour l'impossibilité lorsque $n \geq 5$. Cela rejoint le fait que si l'on sait qu'un problème est soluble, celui-ci est plus facile que si l'on n'en sait rien.

La première difficulté, c'est donc de bien visualiser le problème. Deux choses peuvent gêner cette visualisation : de mauvaises notations (l'idée du jury de nommer [*ijk*] l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ est particulièrement astucieuse) et l'absence de figure : car même si l'on opte pour une approche algébrique du problème par résolution d'équations, à un moment ou à un autre, il faudra se souvenir que c'est un problème de géométrie (bien que classé dans le chapitre "théorie des nombres et combinatoire"), qu'il faut distinguer plusieurs cas de figures et utiliser au maximum les maigres connaissances que l'on a sur l'*aire* en l'absence d'hypothèse plus précise. Même si, dans leur rédaction finale, certaines solutions font abstraction des figures, il ne me semble pas réaliste d'*élaborer* une solution sans faire un minimum de figures.

Vient alors la seconde difficulté : la nécessité de *casser* le problème. J'entends par là non seulement l'obligation d'étudier différents cas (comment peut-on placer cinq points dans un plan ?), mais aussi le choix de ce qu'on place *avant* cette étude de cas (lemme ou calculs utilisables dans chacun des cas), ainsi que l'utilité de casser sans trop attendre la symétrie entre les n points. A priori, tous les points jouent le même rôle, néanmoins, il est peu probable que l'on démontre globalement l'impossibilité, il va bien falloir, à un moment ou à un autre, faire jouer à l'un des points un rôle particulier, et si l'on tarde trop en "trimballant" trop longtemps la symétrie entre les n points, on risque d'alourdir la démonstration inutilement. La première solution du jury plaçait en lemme le fait que si deux coefficients étaient égaux, il y avait contradiction. Là s'arrête la symétrie entre les cinq points, la suite de la solution consistant à trouver, dans chaque cas de figure, deux points particuliers qui doivent avoir le même coefficient.

Mais si l'on surmonte ces deux difficultés, le problème est assez simple.

PROBLEME N° 4

Trouver la plus grande valeur de x_0 pour laquelle il existe une suite $x_0, x_1, \dots x_{1995}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions :

(i) $x_0 = x_{1995}$;

(ii) pour tout i, $1 \leq i \leq 1995$: $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$

SOLUTION

La relation peut s'écrire : $2x_i^2 - \left(x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}}\right)x_i + 1 = 0$

soit : $(2x_i - x_{i-1})\left(x_i - \dfrac{1}{x_{i-1}}\right) = 0$ de sorte que pour tout $i = 1, 2, \dots 1995$, on a soit $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$ soit $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$ (1)

On peut affirmer qu'un x_i au moins est égal à 1. S'il n'en était pas ainsi, tout les x_i seraient dans $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ que l'on peut décomposer en une réunion d'intervalles disjoints

$$\ldots \cup \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, 2\right] \cup \left]2, 4\right] \cup \left]4, 8\right] \cup \ldots$$

Colorions ces intervalles alternativement en rouge et bleu. La relation (1) entraîne que deux termes consécutifs de la suite seraient obligatoirement dans des intervalles de couleurs différentes. Et comme 1995 est impair, x_0 et x_{1995} seraient dans des intervalles de couleurs différentes, il ne pourraient pas être égaux. Ce qui prouve par l'absurde, qu'un au moins des termes de la suite, appelons-le x_k, est égal à 1.

Posons maintenant $t_i = |\log_2 x_i|$. La relation (1) entraîne que $t_i - t_{i-1}$ vaut 1, -1 ou 0.

Or, comme $x_k = 1$, $t_k = 0$, donc $t_0 \leq k$ et $t_{1995} \leq 1995 - k$, si bien que : $t_0 = t_{1995} \leq \inf(k, 1995 - k) \leq 997$, ce qui implique que $x_0 = x_{1995} \leq 2^{997}$.

Or, cette valeur maximale est bien atteinte si l'on pose $x_i = 2^{997-i}$ pour $0 \leq i \leq 1994$ (donc $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$) et $x_{1995} = \dfrac{1}{x_{1994}} = 2^{997} = x_0$.

La plus grande valeur de x_0 est donc 2^{997}.

COMMENTAIRE

Problème classique sans difficulté particulière, du moins pour les Français. Notons que, comme c'est souvent le cas pour ce genre de problème, l'*imparité* de l'année 1995 joue un rôle primordial, et l'idée du jury de matérialiser la rôle de la parité en coloriant des intervalles de deux couleurs distinctes, pour faire apparaître une alternance, est tout à fait recommandable.

PROBLÈME N°5

Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que : $AB = BC = CD$
$DE = EF = FA$

et $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60°$

Soient G et H deux points intérieurs à l'hexagone, tels que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120°$.

Montrer que : $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

SOLUTION

1 - *Propriété préliminaire*

Soit MNP un triangle équilatéral inscrit dans un cercle et soit Q un point du petit arc $\overset{\frown}{NP}$.

La rotation de centre N qui transforme P en M transforme Q en Q' tel que le triangle NQQ' soit lui aussi équilatéral. Mais comme l'angle inscrit $\widehat{MQN} = \frac{\pi}{3} = \widehat{Q'QN}$, Q' est situé sur le segment $[MQ]$.

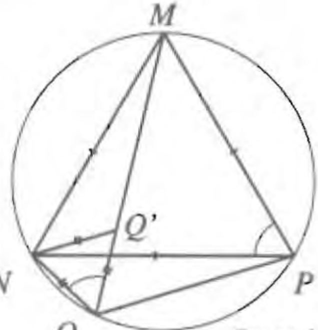


figure 1

Donc $QM = QQ' + Q'M = NQ' + Q'M = NQ + QP$ car $[NQ']$ et $[Q'M]$ sont les transformés de $[NQ]$ et $[QP]$ par la rotation ci-dessus.

2 - *Démonstration de l'inégalité*

L'hypothèse $BC = CD$ et $\widehat{BCD} = 60°$ entraîne que le triangle BCD est équilatéral, et donc $AB = AD$. De même, le triangle EFA est équilatéral et $DE = EA$. Donc A et D sont symétriques par rapport à (BE).

Appelons C' le symétrique de C par rapport à (BE) et F' le symétrique de F par rapport à (BE). Comme le segment $[BD]$ est intérieur à l'hexagone convexe $ABCDEF$, les points G et C' sont de part et d'autre de la droite (AB), et comme $\widehat{AGB} = 120°$, G est sur le petit arc AB du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC'. Nous pouvons donc utiliser la propriété préliminaire pour affirmer que : $C'G = GA + GB$.

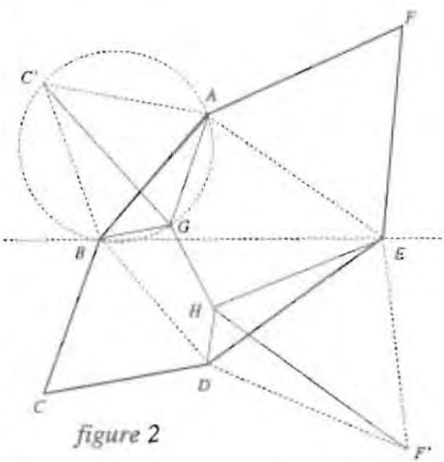


figure 2

Nous pouvons également, pour la même raison, affirmer que $F'H = HD + HE$, donc finalement que :

$$AG + GB + GH + DH + HE = C'G + GH + HF' \geq C'F'$$

ce qui prouve l'inégalité cherchée, car par symétrie, $CF = C'F'$. L'égalité a lieu si et seulement si G et H sont tous les deux sur la droite $(C'F')$.

COMMENTAIRE

Le fait qu'un angle soit égal à 60° et un autre à 120° est une indication forte qui doit automatiquement nous faire penser à des angles inscrits et à un quadrilatère inscriptible, car 120° + 60° = 180°. Reste à trouver le cercle, et à remarquer la symétrie résultant des triangles équilatéraux : notons que les trois démonstrations que j'ai, dont la mienne, construisent C' symétrique de C alors qu'on pourrait tout aussi bien construire G' symétrique de G. Est-ce plus "naturel" ? Oui, car cela permet de trouver le cas où l'égalité est vérifiée. En tout état de cause, en dehors de ces angles et des égalités de longueur qui fournissent instantanément les triangles équilatéraux et permettent d'établir la symétrie, les hypothèses sont maigres, et il faudra bien aboutir à une inégalité du type : *«le chemin le plus court d'un point à un autre est toujours la ligne droite»*.

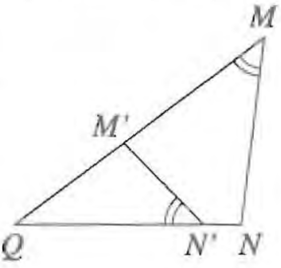
Si l'on ne connaît pas la propriété préliminaire, il faut la redémontrer, ce qui constitue un léger handicap. Mais plusieurs démonstrations sont possibles par la géométrie ou la trigonométrie, et cela peut se faire rapidement. La solution officielle mentionne à ce propos le théorème de Ptolémée. Jacques BOUTELOUP rappelle l'énoncé de ce théorème, beaucoup plus général : *«Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est égal à la somme des produits des côtés opposés»*. Il se démontre aisément par utilisation de la relation métrique de l'inversion, et on le traitait classiquement en exercice quand cette théorie était au programme de Math Elem. On peut aussi le déduire des relations trigonométriques :

$$\sin(\alpha+\beta+\delta)\sin\alpha + \sin\beta\sin\delta = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\delta) - \cos(2\alpha+\beta+\delta)\right)$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\delta)$$

Faut-il le connaître ? Faut-il le citer ? Ou est-il disproportionné par rapport au problème ?

Car enfin, si l'on connaît le théorème de Ptolémée, pourquoi ne connaîtrait-on pas la relation métrique de l'inversion, jadis enseignée en Terminales ? Celle-ci permet de constater que, dans l'absolu, près de la moitié des hypothèses de ce problème sont superflues : non seulement les hypothèses "hexagone convexe" et "points intérieurs à l'hexagone", dont le seul rôle visiblement, était d'éviter que l'on envisage plusieurs cas de figure et de mettre mieux en évidence la propriété préliminaire - les démonstrations que j'ai reçues ne mentionnent pas explicitement la convexité ni la position de G dans la solution - , mais aussi l'angle $\widehat{AGB}$, qui pourrait être quelconque. En définitive, que l'hexagone soit convexe ou non, si $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, et si les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{EFA}$ valent 60°, quels que soient les points G et H du plan, on a: $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.



Une inversion de pôle Q et de puissance k transforme le point M en le point M' de la droite (QM) tel que $\overline{QM}\ .\ \overline{QM'} = k$. Elle transforme pareillement N en N', et l'on a:

$$\overline{QM}\ .\ \overline{QM'} = k = \overline{QN}\ .\ \overline{QN'}\ .$$

On a donc en particulier: $\dfrac{QM}{QN'} = \dfrac{QN}{QM'}$ et les triangles QMN et $QN'M'$ sont semblables, ce qui entraîne:

$$\frac{M'N'}{QN'} = \frac{MN}{QM} \text{ ou encore : } M'N' = \frac{k}{QM\ .\ QN} MN\ .$$

Si maintenant, je considère un triangle MNP, j'ai:

$$M'N' = \frac{k}{QM\ .\ QN\ .\ QP} MN\ .\ QP\ ,$$

de sorte que l'inégalité triangulaire appliquée au triangle $M'N'P'$ permet de prouver que quels soient les quatre points M, N, P, Q du plan,

$$MN.\, QP \leq NP.\, QM + PM.\, QN$$

et si le triangle MNP est équilatéral, pour tout point Q du plan : $QP \leq QM + QN$, l'égalité étant vérifiée lorsque M', N' et P' sont alignés dans le bon ordre, donc lorsque Q est sur le bon arc du cercle circonscrit à MNP.

De cette relation résulte que si $AC'B$ et $DF'E$ sont équilatéraux, quels que soient les points G et H du plan, $C'G \leq AG + GB$ et $F'H \leq DH + HE$, donc $CF = C'F' \leq C'G + GH + HF' \leq AG + GB + GH + DH + HE$ sans aucune autre hypothèse.

PROBLÈME N°6

Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles A de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tels que :

(i) A contient exactement p éléments ;

(ii) la somme de tous les éléments de A est divisible par p.

SOLUTION

Pour tout sous-ensemble A de p éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, appelons $S(A)$ la somme de ses éléments.

Parmi les C_{2p}^{p} sous-ensembles considérés, $B = \{1, 2, \ldots, p\}$ et $C = \{p+1, p+2, \ldots 2p\}$ vérifient : $S(B) = p\left(\frac{p+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}$ et $S(C) = p^2 + S(B) \equiv 0 \pmod{p}$.

Les autres sous-ensembles A vérifient : $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \cap C \neq \varnothing$.

Répartissons ces $C_{2p}^{p} - 2$ sous-ensembles autres que B et C dans des classes ainsi définies : A et A' sont dans la même classe si et seulement si $A' \cap C = A \cap C$ et $A' \cap B$ est une permutation circulaire, dans B, de $A \cap B$. En d'autres termes, si l'on suppose que $A \cap B$ a n éléments ($1 \leq n \leq p-1$), il existe un m compris entre 1 et $p-1$ tel que $A' \cap B = \{x + \mathrm{m} \mid x \in A \cap B$ et $x \leq p - m\} \cup \{x + m - p \mid x \in A \cap B$ et $x > p - m\}$.

Dès lors, $S(A') - S(A) \equiv nm \pmod{p}$. Mais nm ne peut pas être divisible par p. On en déduit d'une part que chaque classe contient exactement p sous-ensembles : ce ne serait pas le cas si p n'était pas premier, mais comme, p étant premier, $S(A')$ est différent de $S(A)$, A' est distinct de A. D'autre part, à l'intérieur de chaque classe, la fonction S prend p valeurs distinctes modulo p, donc une et une seule fois chaque valeur de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, en particulier une et une seule fois la valeur 0. Il existe donc : $\frac{1}{p}\left(C_{2p}^{p} - 2\right)$ classes, et si l'on reprend en compte les sous-ensembles B et C, il existe $2 + \frac{1}{p}\left(C_{2p}^{p} - 2\right)$ sous-ensembles répondant à la question.

COMMENTAIRE

C'était le plus difficile des six problèmes, résolu par seulement 8% des candidats, dont un Français.

On peut déduire du résultat que $C_{2p}^{p} \equiv 2$ (mod. p), ou au contraire être aidé au démarrage si l'on connaît par avance cette relation. Mais même cette relation n'est plus vraie si p n'est pas premier, et la détermination du nombre de classes lorsque p n'est pas premier, n'est pas immédiate : l'hypothèse "p premier" intervient doublement.

Citons toutefois une démonstration italienne qui permet d'aborder le cas où p n'est pas premier.

ξ étant une racine p-ième de l'unité autre que 1, posons $P_\xi(x) = \prod_{i=1}^{2p} (x - \xi^i)$

Si p est premier, $P_\xi(x) = (x^p - 1)^2$. En effet, les ξ^i, pour tout i variant de 1 à p, sont les p racines distinctes de $x^p - 1$, et $\prod_{i=p+1}^{2p} (x - \xi^i) = \prod_{i=1}^{p} (x - \xi^i)$ car $\xi^{i+p} = \xi^i$.

Or, si p est impair, le coefficient de x^p *dans* $P_\xi(x)$ vaut :

$$-\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots 2p\}} \xi^{i_1+i_2+\dots+i_p} = -\left(n_0 + n_1\xi + n_2\xi^2 + \dots + n_{p-1}\xi^{p-1}\right)$$ en appelant n_j le nombre de sous-ensembles $\{i_1, i_2, \dots i_p\} \subset \{1, 2, \dots, 2p\}$ dont la somme des éléments est congrue à j modulo p. Mais ce même coefficient de x^p dans $P_\xi(x)$ vaut aussi (-2), car $P_\xi(x) = (x^p - 1)^2$. Donc $n_0 + n_1\xi + \dots + n_{p-1}\xi^{p-1} = 2$, et ce, pour toutes les racines p-ièmes de l'unité autres que 1. Pour $\xi = 1$, on a bien évidemment : $n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1} = C_{2p}^{p}$.

En additionnant ces p relations, comme la somme des ξ^i est nulle lorsque ξ décrit toutes les racines p-ièmes de l'unité, on a :

$$pn_0 = C_{2p}^{p} + 2(p-1).$$

Si maintenant p n'est pas un nombre premier impair, on peut encore considérer ce polynôme $P_\xi(x)$ pour ξ racine p-ième de l'unité, mais le coefficient de x^p dans $P_\xi(x)$ vaut $(-1)^p(n_0 + n_1\xi + \ldots + n_{p-1}\xi^{p-1})$.

Par ailleurs, c'est seulement si ξ est racine *primitive* p-ième de l'unité que les ξ^i pour $1 \leq i \leq p$ sont les p racines distinctes de $x^p - 1$, et donc que $P_\xi(x) = (x^p - 1)^2$.

Si d est un diviseur de p et si ξ est racine primitive (p/d)-ième de l'unité, les ξ^i pour $1 \leq i \leq p/d$ sont les racines distinctes de $(x^{p/d} - 1)$, donc $P_\xi(x) = (x^{p/d} - 1)^{2.d}$ et le coefficient de x^p dans $P_\xi(x)$ vaut $(-1)^d\, C_{2d}^{d}$.

La somme des ξ^i lorsque ξ décrit toutes les racines p-ièmes de l'unité est encore nulle, mais il faut prendre en compte, cette fois-ci, que pour chaque diviseur d de p, il existe $\varphi(p/d)$ racines primitives (p/d)-ièmes de l'unité pour lesquelles : $(-1)^p(n_0 + n_1\xi + \ldots + n_{p-1}\xi^{p-1})$. $= (-1)^d\, C_{2d}^{d}$

de sorte qu'en additionnant $(-1)^p p n_0 = \sum_{d \mid p} (-1)^d \varphi\left(\frac{p}{d}\right) C_{2d}^{d}$, soit

$n_0 = \frac{1}{p} C_{2p}^{p} + \sum_{\substack{d \mid p \\ d \neq p}} \frac{(-1)^{d+p}}{p} \varphi\left(\frac{p}{d}\right) C_{2d}^{d}$ le terme $\frac{1}{p} C_{2p}^{p}$ étant bien sûr prépondérant.

Pour revenir au problème initial, en appelant toujours n_j le nombre de sous-ensembles $A = \{i_1, i_2, \ldots i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, 2p\}$ tels que $S(A) = i_1 + i_2 + \ldots + i_p \equiv j \pmod{p}$, la principale piste à laquelle il convient de se raccrocher est que les n_j sont vraisemblablement du même ordre de grandeur $\frac{1}{p} C_{2p}^{p}$, et rien ne justifierait que l'un d'eux soit nettement plus grand ou plus petit que les autres. L'idéal, pour que le problème soit simple, serait qu'ils soient égaux, c'est-à-dire que l'on puisse associer bijectivement les n_j sous ensembles de somme congrue à j aux n_k sous-ensembles de somme congrue à k. Il faut alors utiliser pleinement l'hypothèse, non seulement le fait que $\{1, 2, \ldots 2p\} = \{1, 2, \ldots, p\} \cup \{p + 1, p + 2, \ldots 2p\}$ mais aussi les propriétés des nombres premiers p et des corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, car si p n'est pas premier, les n_j ne sont plus du tout égaux, bien qu'ils restent du même ordre de grandeur.