Dossier Cabri Géomètre

Quelques réflexions
sur le logiciel CABRI-GÉOMÈTRE

Roger Cuppens
IREM de Toulouse

On comprend bien mieux une figure et on se la rappelle bien plus facilement quand on l'a vue pendant la période de construction.

Julius Petersen, 1879

1 - Introduction

Dans un précédent article [3], Michel Carral et moi-même avons montré tout l'intérêt du logiciel Cabri-Géomètre[1] pour faire de la géométrie. Depuis l'écriture de cet article, j'ai trouvé dans plusieurs articles concernant ou utilisant le logiciel Cabri-Géomètre de nombreuses inexactitudes, voire des contrevérités.

Par exemple, dans [7], J-L. GASSER signale *«quelques limitations dans le cadre du problème traité: impossibilité d'imprimer un lieu géométrique et impossibilité de reporter une distance simplement sur la figure (par exemple le cercle de centre A et de rayon IC)»*

De même AG ALMOULOUD [1] prétend que Cabri-géomètre *«ne permet pas d'élaborer toutes les constructions de la géométrie plane; c'est le cas*

1 Ce logiciel s'est toujours appelé Cabri-Géomètre dans sa version MacIntosh. Il s'est d'abord appelé Le Géomètre dans sa version PC, mais maintenant, il s'appelle aussi Cabri-Géomètre dans cette version. La version utilisée dans cet article est la version 2.1 pour MacIntosh. Elle contient diverses ressources qui ne sont pas actuellement implantées dans la version PC vendue actuellement; elles devraient l'être dans une prochaine version.

des figures dans lesquelles interviennent des relations mettant en jeu les notions d'angles ou de distance. Les tracés apparaissent à l'écran comme une juxtaposition de segments horizontaux ou verticaux, ce qui augmente l'imprécision des tracés et peut même, dans certains cas, nuire à la justesse des figures». Et, plus loin, *«on ne peut pas vérifier l'aptitude d'un élève à construire des objets semi-complexes comme la médiatrice d'un segment puisque le logiciel trace automatiquement l'objet désigné. De plus, il ne comporte pas de module de vérification de l'adéquation de la figure construite par l'élève aux hypothèses fournies pour le problème.»*

Enfin, j'ai entendu beaucoup de gens se plaindre oralement de l'absence des nombres réels pour l'étude des vecteurs ou des transformations.

La première de ces critiques peut se résoudre en lisant la notice d'accompagnement : dans la version incriminée (celle implantée sur MacIntosh), il suffit, quand un lieu est affiché à l'écran, de taper au clavier un «Control-I» pour obtenir une impression de ce lieu. Mais les autres révèlent une méconnaissance grave, soit de la philosophie du logiciel, soit des problèmes fondamentaux posés par la construction des figures géométriques. Nous nous proposons donc de reprendre un certain nombre de notions de base qui fourniront une réfutation des allégations ci-dessus.

Je remercie Colette Laborde et Michel Carral pour avoir bien voulu lire le manuscrit et m'avoir fait des remarques judicieuses dont j'ai essayé de tenir compte dans la suite.

2 - Figures et constructions géométriques

2.1 - Figures géométriques

On lit dans l'article de Ag Almouloud déja cité que *«Cabri-géomètre est un logiciel d'aide à la construction de figures géométriques»*. On remarque que cette phrase contient deux termes qui avaient autrefois un sens très précis, mais qui ont peut-être moins connus aujourd'hui, à savoir la notion de figure géométrique et cette de construction d'une telle figure.

En langage moderne, on peut définir une figure géométrique comme un ensemble fini d'objets élémentaires et de relations entre ces objets. En général, les objets élémentaires de la géométrie euclidienne plane sont, au moins au début : le point, la droite, la demi-droite, le segment, le cercle et l'arc de cercle. Si on regarde les objets de base de Cabri-Géomètre, on trouve tous les objets précédents, sauf la demi-droite (pour laquelle nous proposerons une définition "potentielle" ci-dessous) et l'arc de cercle qui est effectivement absent. Les relations entre objets sont des relations d'appartenance, d'intersection, de parallélisme ou de perpendicularité qui figurent toutes dans Cabri-Géomètre.

Il faut bien se garder de confondre la figure que je viens de définir avec ce qu'on trace sur une feuille de papier ou sur un écran graphique et qui n'est qu'une instance approximative de cette figure : un angle droit est un concept abstrait dont on peut avoir une idée en dessinant sur une feuille ou sur un écran d'ordinateur. Puisqu'un tel dessin n'est qu'approximatif, les propriétés d'une figure que l'on peut y voir sont des propriétés stables : par exemple, si on peut constater qu'un triangle dont les côtés sont dans un rapport 3, 4, 5 est rectangle (et si un maçon peut utiliser cette propriété pour vérifier l'aplomb d'un mur), c'est que l'on peut énoncer la propriété *«Si un triangle ABC est tel que* a^2 *est presque égal à* $b^2 + c^2$*, alors l'angle* $\widehat{A}$ *est presque droit»*[2]. On peut regretter que ce fait essentiel soit rarement mis en évidence dans les livres de géométrie.

Cabri-Géomètre génère de manière automatique une représentation de la figure correspondant à ce qu'on voit à l'écran. On peut en obtenir une représentation externe en utilisant l'article `Afficher` du menu `Divers`. A partir de cette représentation, on peut espérer qu'un jour Cabri-Géomètre fournisse une analyse automatique de l'adéquation de la figure tracée par l'élève avec une spécification (énoncé) fournie par l'enseignant. L'étude théorique d'un tel analyseur a été réalisée par P. NICOLAS [10] pour le système Mentoniezh ; les problèmes posés par son implantation dans Cabri-Géomètre sont étudiés par C. DESMOULINS [6].

2.2 - Constructions à la règle et au compas

Passons à la notion de construction géométrique. Ces problèmes ont été abondamment étudiés au début du siècle, en particulier par J. PETERSEN [11] et E. LEMOINE [9]. Nous partirons des travaux de LEMOINE sur la géométrographie. Il y définissait un certain nombre d'actes de base pour obtenir une construction à la règle et au compas, à savoir :

- faire passer le bord d'une règle par un point placé,
- faire passer le bord d'une règle par deux points placés,
- tracer une ligne en suivant le bord de la règle,
- mettre une pointe du compas en un point placé,
- prendre dans le compas la distance de deux points placés,
- mettre une pointe de compas en un point indéterminé d'une ligne tracée,
- tracer le cercle,

2 Avec le sens du mot "presque" à préciser.

et calculait en décomposant une construction donnée en ces actes élémentaires un coefficient de simplicité et un constat de précision[3] de cette construction ; la construction géométrographique était alors la construction minimisant ces coefficients. Il ajoutait d'ailleurs *«nous supposerons que toute droite tracée et que tout cercle tracé dans le cours d'une construction le sont en entier»*. Les notions de segment, de demi-droite et d'arc de cercle ne semblent donc pas essentielles dans le domaine des constructions géométriques.

Si on cherche les actes élémentaires fournis par Cabri-Géomètre, on trouve, dans le menu `Création` :

- point de base
- droite de base
- cercle de base
- segment
- droite passant par deux points
- cercle défini par centre et point

et dans le menu `Construction` :

- point sur un objet
- intersection de deux objets.

On voit facilement que les actes élémentaires de Cabri-Géomètre permettent de retrouver a priori tous les actes de LEMOINE, sauf un : prendre dans le compas la distance de deux points placés, c'est-à-dire, en langage moderne, reporter une longueur qui est aussi le problème soulevé par J.-L. GASSER. Nous montrerons ci-dessous que la notion de macro-construction permet facilement de résoudre ce problème. On peut alors conclure que ce logiciel permet de réaliser toutes les constructions à la règle et au compas. Peut-on faire plus ?

2.3 - Les construction supplémentaires de Cabri-Géomètre

On constate que Cabri-Géomètre fournit dans le menu Création un objet de base supplémentaire, le triangle, et, dans le menu Construction, quelques constructions supplémentaires :

- milieu
- médiatrice
- droite parallèle
- droite perpendiculaire
- centre d'un cercle
- symétrique d'un point
- bissectrice.

3 En réalité, un coefficient de complexité et un coefficient d'imprécision.

Puisqu'on sait qu'un triangle peut se construire à la règle seule et que les constructions précédentes sont réalisables à la règle et au compas, la donnée de ces objets n'augmente pas la puissance de construction, mais modifie, comme nous le verrons ci-dessous, la notion de construction géométrographique.

Par contre, comme on peut supprimer facilement des articles d'un menu, l'objection de AG ALMOULOUD qu'un élève ne peut pas apprendre à construire la médiatrice tombe d'elle-même ; il suffit de le faire travailler sur un menu réduit. C'est d'ailleurs peut-être la meilleure manière de prendre en main le logiciel[4]: on supprime les sept articles ci-dessus et on demande à l'apprenant de les réécrire.

2.4 - Les constructions par glissement

Le fait d'avoir plusieurs constructions supplémentaires n'ajoute donc pas de possibilité nouvelle. Mais a-t-on dans Cabri-Géomètre plus que les constructions à la règle et au compas ?

Pour répondre à cette question, il faut regarder avec plus de précision la notion de relation entre objets d'une figure. On constate alors qu'il y a dans une figure obtenue avec Cabri-Géomètre deux sortes d'objets :

- les objets ***libres*** qui peuvent être déplacés par manipulation directe (on peut les saisir avec le curseur qui prend alors la forme d'une main et les déplacer en manipulant la souris) ;
- les objets qui sont complètement ***déterminés par leurs relations avec les objets libres*** et ne peuvent être déplacés qu'indirectement par le déplacement d'un objet libre.

Les objets libres de Cabri-Géomètre sont

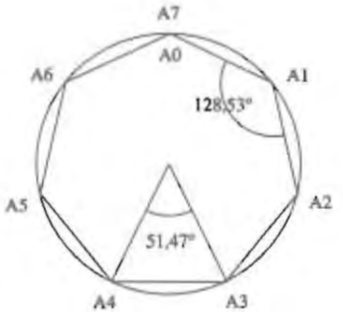
- les points de base qui ont deux degrés de liberté : ils peuvent se déplacer dans tout le plan,
- les points sur objet qui n'ont qu'un degré de liberté : ils ne peuvent se déplacer que sur l'objet en question,
- les droites de base qui peuvent se déplacer en gardant la direction fixée lors de leur création,
- les cercles de base dont on peut déplacer le centre, mais qui gardent le rayon fixé lors de leur création.

Si on respecte les règles du jeu proposées par les auteurs du logiciel, à savoir ne tracer que des figures dont les relations seront conservées pour tout déplacement des objets libres de la figure, on a effectivement les figures constructibles à la règle et au compas, pour ajouter une ou plusieurs relations qui ne seront vérifiées que pour une position particulière de l'objet. Nous

4 C'est en tout cas celle que j'emploie dans mes stages de formation.

dirons alors que la figure est définie par glissement.

L'exemple de la construction des polygones réguliers à n côtés[5] proposé dans le numéro 2 de la revue *Cabriole* [4] est de ce type. Pour construire un tel polygone, on prend deux points A_0 et A_1 sur un cercle et on trace $(n-1)$ points A_2, … A_n tels que A_0, A_1, … A_n soient équidistants sur le cercle[6], puis on déplace A_1 jusqu'à ce que A_n coïncide avec A_0.



Si la coïncidence est parfaite, le polygone $A_1 \ldots A_n$ est alors régulier. Si la coïncidence n'est qu'approchée, on obtient une représentation approximative un polygone régulier sur laquelle on peut quand même faire un certain nombre d'observations telles que mesurer les angles, etc. Sur la figure ci-dessus, on a une représentation approchée de l'heptagone et on peut vérifier que $51{,}4° \times 7 = 360{,}29°$ et que $128{,}53° \times 7 = 899{,}71°$, c'est-à-dire pratiquement 2 et 5 angles plats.

Construire des figures par glissement revient à simuler les systèmes articulés étudiés en particulier par H. Lebesgue [8] : on peut ainsi construire tous les points du plan à coordonnées algébriques.

3 - Les macro-constructions

3.1 - Définition

Nous avons rappelé ci-dessus que l'on peut toujours supprimer un article d'un menu de Cabri-Géomètre. On peut aussi ajouter des macro-constructions.

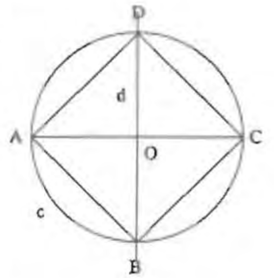
Qu'est-ce qu'une macro-construction ? Nous commençons par une approche sommaire : si on a à faire une même construction plusieurs fois, on peut faire la construction une fois pour toutes, la stocker sous forme de macro-construction et utiliser cette dernière pour faire directement les autres constructions.

Prenons l'exemple particulièrement simple de la construction d'un carré *ABCD* connaissant la diagonale [*AC*]. On va prendre le point *O* milieu de

5 On sait, depuis Gauss qu'un tel polynôme n'est constructible à la règle et au compas que pour des valeurs très particulières de n liéres aux nombres de Fermat premiers.

6 Pour ce faire, il est à mon avis préférable d'utiliser les symétries par rapport aux droites passant par le centre du cercle et l'un des sommets plutôt que les rotations préconisées dans *Cabriole*.

[*AC*], tracer la médiatrice *d* de [*AC*], prendre le cercle *c* de centre *O* et passant par *A* : l'intersection de *d* et de *c* se compose des deux points *B* et *D*.



Tous les actes se font directement à partir des menus de Cabri-Géomètre. ceci permet de définir une macro-construction carré dont

- les objets initiaux sont deux points *A* et *C*,
- les objets intermédiaires sont le point *O*, le droite *d* et le cercle *c*,
- les objets finaux sont les deux points *B* et *D* (ou, si 'l'on veut, les quatre segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*]).

La création de cette macro-construction ajoute l'article correspondant au menu `Construction` et on peut alors l'utiliser : en désignant à l'écran deux points correspondant aux objets initiaux, le carré correspondant sera automatiquement tracé à l'écran (mais pas les objets intermédiaires).

Une macro-construction est dons une construction d'une figure composée de trois types d'objets :

- les objets initiaux,
- les objets intermédiaires,
- les objets finaux.

Si on se contente de cette approche, il arrivera souvent que le logiciel refuse de créer une macro-construction parce que la définition proposée est incohérente. Pour avoir une macro-construction cohérente, il faut ajouter que les objets initiaux sont les seuls objets libres de la figure[7] : tous les objets finaux, mais aussi les objets intermédiaires doivent être des objets liés.

3.2 - Les demi-droites

Nous fournissons maintenant quelques macro-constructions simples et fondamentales. Commençons par les demi-droites.

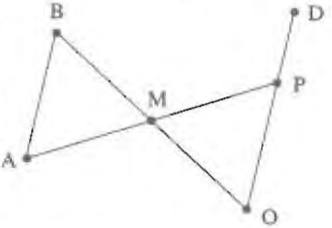
Si on veut simuler une demi-droite, il suffit de partir de deux points A_0 et A_1 et de définir un ensemble fini de points intermédiaires A_j qui sont définis, pour $j \geq 2$, comme le symétrique de A_0 par rapport à A_{j-1}. Si les deux points initiaux sont très rapprochés et si n est assez grand (j'ai pris $n = 8$), la macro-construction qui aura pour objets initiaux les points A_0 et A_1 et pour objet final le segment $[A_0A_n]$ fournira une représentation satisfaisante des demi-droites surtout lorsqu'on l'appliquera à des points assez éloignés.

7 On peut transgresser cette règle comme nous le verrons plus loin.

3.3 - Le report des longueurs

Le problème général peut s'énoncer sous la forme suivante : se donnant quatre points A, B, O et D, déterminer le point P de la demi-droite $[OD)$ tel que $OP = AB$.

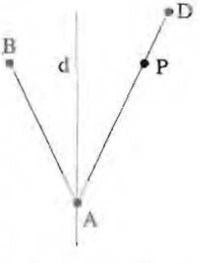
Nous commençons par le cas particulier où la demi-droite $[OD)$ a même direction et même sens que la demi-droite $[AB)$. On constate alors que le problème se ramène à : se donnant trois points O, A, B, construire le point P tel que $OABP$ soit un parallélogramme. Ce problème qui est déjà compliqué si on n'utilise que la règle et le compas, devient très simple avec les constructions supplémentaires de Cabri-Géomètre. Puisque le cas particulier où les demi-droites $[AB)$ et $[OD)$ sont portées par une même droite (c'est-à-dire où le parallélogramme est aplati) ne doit pas être écarté, on utilisera la caractérisation d'un parallélogramme par la propriété de ses diagonales : on prend le milieu M de $[OB]$ et le symétrique P de A par rapport à M. Nous aurons donc la macro-construction parallélo ayant :



- trois objets initiaux, les points O, A et B,
- un objet intermédiaire, le point M
- un objet final, le point P,

et nous noterons P = parallélo (O, A, B).

Avec cette macro-construction, le problème de J.-L. Gasser devient évident : se donnant trois points O, A et B, pour construire le cercle de centre O et de rayon AB, on prend le point P = parallélo(O, A, B) et on trace le cercle C de centre O et passant par P.



Un deuxième cas particulier intéressant est celui où $C = A$. Ceci revient à, se donnant trois points A, B et D, déterminer le point P de la demi-droite $[AD)$ tel que ABP soit un triangle isocèle en A. On utilisera évidemment la symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$: on trace la bissectrice d de l'angle $\widehat{BAD}$ et on prend le symétrique P de B par rapport à d. Nous avons donc la macro-construction isocèle ayant :

- trois objets initiaux, les points A, B et D,
- un objet intermédiaire, la droite d,
- un objet final, le point P

et nous noterons P = isocèle (A, B, D).

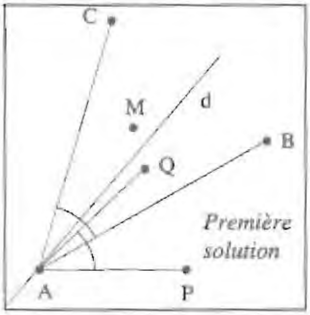
Le cas général se réduit à la "composition" de ces deux cas particuliers : se donnant les quatre points A, B, O et D, on prend le point Q = parallélo(O, A, B) et le point P = isocèle (O, Q, D).

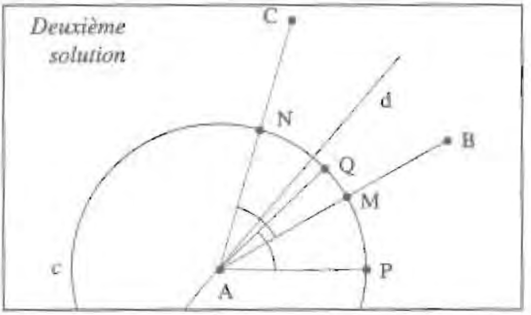
3.4 - Le report des angles

Le problème est le suivant : se donnant cinq points A, B, C, O et P, trouver un point Q tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit égal à l'angle $\widehat{POQ}$.

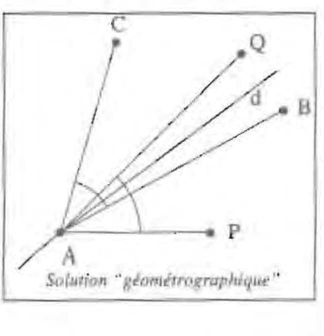
Nous commencerons à nouveau par le cas particulier où $O = A$. On peut évidemment considérer Q comme le transformé de P dans la rotation d'angle $\widehat{BAC}$, problème pour lequel deux solutions sont fournies dans le numéro 2 de *Cabriole*. La première utilise le fait qu'une rotation peut s'exprimer comme le produit de deux symétries axiales : on trace la bissectrice d de l'angle $\widehat{BAC}$ et on prend le symétrique M de P par rapport à la droite (AB), puis le symétrique Q de M par rapport à d.

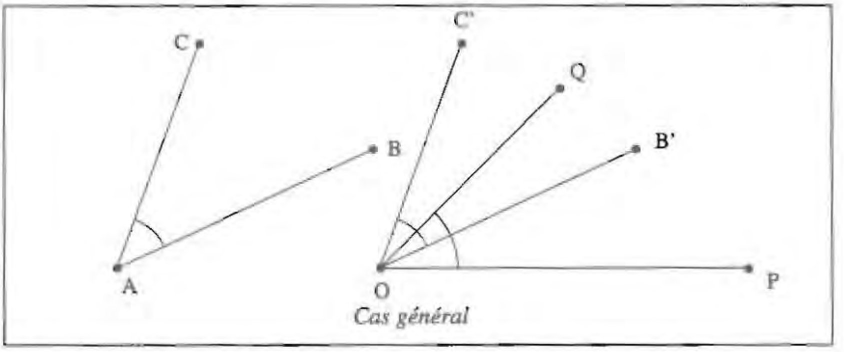
La deuxième consiste à tracer le cercle c de centre A passant par P, à déterminer les intersections M et N des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ avec c et à prendre le symétrique Q de M par rapport à la médiatrice de $[PN]$.





En simplifiant cette dernière idée, on arrive à la construction suivante qui est sans aucun doute la plus économique (Lemoine aurait dit la construction "géométrographique") : on trace la bissectrice d de l'angle $\widehat{PAC}$, puis le symétrique Q de B par rapport à d. On notera Q = rot-angle(A, B, C, P).



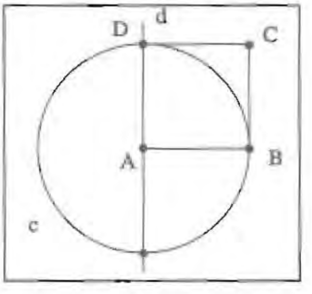


Cas général

Le cas général se ramène alors au cas particulier : on translate l'angle $\widehat{BAC}$ en O et on est ramené au cas précédent, ce qui donne :

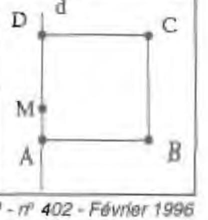
- construire B' = parallélo(O, A, B),
- construire C' = parallélo(O, A, C),
- construire Q = rot-angle(O, B', C', P).

3.5 - Quelques remarques supplémentaires



Nous ajouterons quelques remarques. Si, au lieu de se donner la diagonale, on se donne le côté $[AB]$ du carre $ABCD$, on peut construire celui-ci en traçant la perpendiculaire d en A à $[AB]$ et le cercle c de centre A et de rayon AB. L'intersection de d et c est composée de deux points dont on choisit arbitrairement l'un d'eux comme sommet D et, à partir de D, on construit le point C = parallélo(B, A, D).

Si le choix de l'un des points d'intersection semble dans ce cas ne poser aucun problème, il n'en est pas de même pour des figures complexes, car le choix entre deux intersections est lié à des problèmes d'orientation qui ne sont pas toujours facilement prévisibles. Pour éviter cela, je conseille de se passer le plus possible de l'emploi de cercles intermédiaires dans les macro-constructions (ce n'est évidemment pas toujours possible).



Remarquons aussi qu'on peut transgresser la règle selon laquelle les objets intermédiaires ou finaux doivent être des objets liés en enfonçant la touche Symbol lors de la création de la macro-construction.

Par exemple, pour le problème précédent, on pourra tracer la perpendiculaire d en A à (AB), prendre un point M sur d, et définir D et C par D = isocèle (A, B, M) et C = parallélo (B, A, D).

On pourra alors créer une macro-construction ayant pour objets initiaux les points A et B, pour objets intermédiaires la droite d et le point à un degré de liberté M et pour objets finaux les quatre segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Mais les figures obtenues avec de telles macro-constructions sont parfois plus difficiles à prévoir que celles obtenues avec des cercles intermédiaires.

4 - Mesures des segments et des angles

4.1 - La précision des mesures

Quand on parle de la précision des figures tracées par Cabri-Géomètre, il ne faut pas confondre deux choses fort différentes :
- les mesures effectuées par le logiciel sur la représentation interne de la figure (ou, pour être précis, sur l'une de ses instances),
- ce que l'on voit à l'écran et qui n'est qu'une représentation graphique de la précédente rendue très imprécise par le fait qu'un écran graphique n'est composé que d'un nombre fini de pixels.

Cabri-géomètre calcule les coordonnées d'un point, la pente d'une droite, la longueur d'un segment en centimètres, l'aire d'un polygone en cm^2 et la mesure d'un angle en degrés avec une précision de l'ordre de 10^{-18}. On peut obtenir cette précision avec l'article `Calculer` du menu `Divers` (à condition d'avoir choisi la précision maximale dans l'article `Préférences` du menu `Édition`).

Pour la représentation graphique, Cabri-Géomètre affiche à l'écran avec l'article `Mesurer` du menu `Divers` la longueur d'un segment avec une précision de 10^{-3} cm et la mesure d'un angle avec une précision d'un centième de degré. On voit que ceci est une précision largement supérieure à ce que l'on peut obtenir dans une construction papier/crayon. La construction de figures faisant intervenir des longueurs de segments ou des mesures d'angles ne pose donc aucun problème.

4.2 - Vérification d'une propriété

L'article `Vérifier` une propriété du menu `Divers` permet de vérifier un certain nombre de propriétés :

---

[8] Un tel démonstrateur existe : Chou [5] a implanté une méthode due à Wu avec laquelle il a démontré 512 théorèmes de géométrie (dont quelques-uns sont nouveaux). Mais un tel démonstrateur nécessite un gros ordinateur et est relativement lent.

- points alignés, - appartenance,
- parallélisme, - orthogonalité, - longueurs égales.

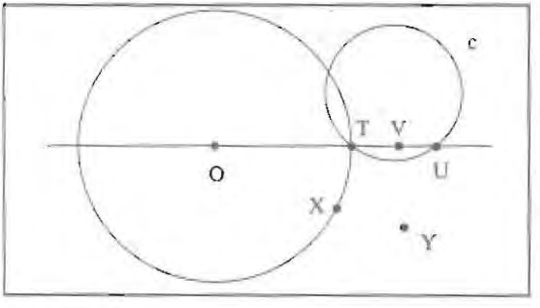
Pour une telle vérification, Cabri-Géomètre n'utilise pas de démonstrateur de théorèmes[8] : il se contente de vérifier par calcul la validité de cette propriété sur un échantillon d'instances représentatives de la figure. On peut donc mettre en défaut l'oracle de Cabri-Géomètre pour des problèmes exigeant des calculs en grande précision comme dans l'exemple suivant[9] qui correspond à une étude géométrique de l'approximation de $\sqrt{2}$ par la suite (x_n), définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}\right) \end{cases}$$

Pour obtenir une telle suite, nous utiliserons la notion de puissance d'un point par rapport à n cercle : si O est un point extérieur à un cercle c, et si une droite d passant par O coupe le cercle c en T et U, alors $OT.OU$ est indépendant de la droite d et est appelé puissance du point O par rapport au cercle c. Si cette puissance est m et si $OT = x$, alors le milieu V de $[TU]$ est tel que $OV = \frac{1}{2}\left(x + \frac{m}{x}\right)$.

Il suffit d'obtenir le cas où la puissance de O est égale à 2, ce qui est le cas si la longueur de la tangente menée de O au cercle c est égale à $\sqrt{2}$.

Pour réaliser ceci dans Cabri, nous commençons par construire la macro-construction auxiliaire dont les objets initiaux seront deux points O et X et un cercle c et l'objet final un point Y = isocèle(O, V, X), V étant le milieu de l'un des points d'intersection T du cercle c et de centre O passant par X et de l'intersection U du cercle c et de la droite (OT) :

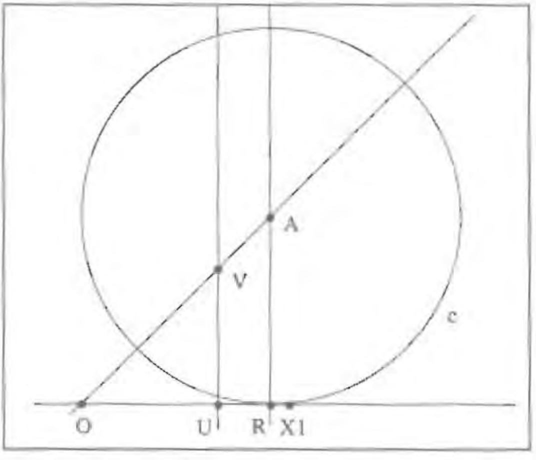


9 Cet exemple m'a été suggéré par Bernard Genevès.

D'après ce qui précède, $y = OY$ et $x = OX$ sont liés par la relation $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{m}{x}\right)$, m étant la puissance du point O par rapport au cercle c.

On prend alors deux points O et U tels que la longueur OU soit l'unité de mesure, le point V de la perpendiculaire en U à (OU) tel que $UV = OU$ et le point R = isocèle(O, V, U). Alors $OR = OV = \sqrt{2}$. Si on prend un point A de la perpendiculaire en R à (OR) (par exemple le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la droite (OV)), la puissance de O par rapport au cercle c de centre A passant par R est égale à 2.

On construit alors la suite des points X_j définis comme étant égaux à U si $j = 0$ et au transformé de O, X_{j-1}, c par la macro-construction précédente : $x_j = OX_j$ est alors la suite définie ci-dessus.



Géométriquement, pour OU = 5 cm, on constate que seul X_1 est nettement différent de R et que, dès $j = 2$, X_j est pratiquement confondu avec R.

Une application de l'article `Calculer` fournit les valeurs suivantes :

Longueur(O U) = 5,000000000000000000 cm
Longueur (O X1) = 7,500000000000000000 cm
Longueur (O X2) = 7,083333333333333334 cm
Longueur (O X3) = 7,071078431372549020 cm
Longueur (O X4) = 7,071067811873449556 cm
Longueur (O X5) = 7,071067811865475246 cm
Longueur (O R) = 7,071067811865475244 cm

tandis que l'article `Vérifier` la propriété répond que les segments $[OR]$ et

$[OX3]$ ont des longueurs inégales tandis que les segments $[OR]$ et $[OX_4]$ ont des longueurs égales : la vérification d'une propriété n'utilise donc pas toute la précision de calcul fournie par l'article `Calculer`.

5 - Les nombres réels et Cabri-Géomètre

Les auteurs de Cabri-Géomètre n'ont pas introduit de nombres dans leurs menus. On peut y suppléer en représentant un nombre k par un triplet de points alignés O, U, K tels que $\dfrac{\overline{OK}}{\overline{OU}} = k$: si les deux premiers points O et U représentent l'origine et le point d'abscisse 1 d'un axe, k est l'abscisse du point K sur cet axe. Ceci est suffisant pour faire dans Cabri-Géomètre de la géométrie analytique, de la géométrie vectorielle ou pour y étudier les transformations[10].

Montrons, par exemple, comment définir une macro-construction fournissant le transformé M' d'un point M par une homothétie de centre C et de rapport k. Une telle macro-construction aura donc cinq points initiaux, les points M, C, O, U et K, et un point final, le point M'.

On commence par translater l'axe (OU) en amenant O en C, ce qui donne les points U' et K'. Si l'axe (OU) et la droite (CM) ne sont pas parallèles, on peut obtenir directement le point M' comme l'intersection de la droite (CM) avec la droite passant par K' et parallèle à (MU'). Mais une telle construction ne donnera rien dans le cas où (OU) et (CM) sont parallèles. Pour obtenir le cas général, il suffit de prendre une droite d passant par C qui ne soit pas parallèle à (CM) (par exemple le perpendiculaire à (CM)) et de considérer des points V et L sur d tels que $\dfrac{\overline{CL}}{\overline{CV}} = \dfrac{\overline{OK}}{\overline{OU}}$.

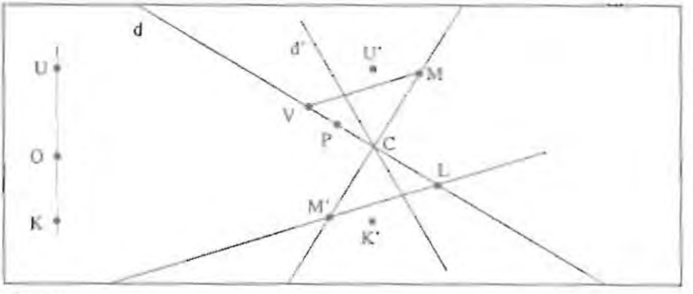
M' est alors le point d'intersection de la droite (CM) avec la droite passant par L et parallèle à (MV).

Ceci donne la réalisation suivante en Cabri. On prend U' = parallélo(C, O, U) et K' = parallélo(C, O, K). On prend la perpendiculaire d en C à (CM), un point quelconque P sur d, la bissectrice d' de $\widehat{PCU'}$ [11] et les symétriques L et V de K' et U' par rapport à d'. Le point M' est alors le point d'intersection de la droite (CM) avec la droite passant par L et parallèle à (MV).

---

10 Y. Bouteiller et M. Dupérier utilisent cette méthode pour une représentation unifiée des coniques et, dans le numéro 2 de *Cabriole*, il est même suggéré d'étudier certaines fonctions en utilisant un seul axe de coordonnées.

11 Le point P ne sert que pour permettre à Cabri de tracer cette droite.



Remarques :

1. Une telle introduction constitue un retour aux sources de la géométrie : les nombres apparaissent, comme chez Euclide, comme rapports de grandeurs.

2. Si les points de base d'une figure sont à coordonnées rationnelles et si la figure est constructible, soit à la règle et au compas, soit même par glissement, les longueurs des segments de la figure seront toujours des nombres algébriques. Tant qu'on ne se pose pas le problème de la longueur ou de la quadrature du cercle, introduire l'ensemble de tous les réels pour faire de la géométrie euclidienne est presque inventer le marteau-pilon pour casser des noix : on sait, depuis les travaux de Cantor, qu'on introduit des tas de figures qui ne seront jamais constructibles, ni même concevables.

6 - Conclusion

On voit que la compréhension et la maîtrise d'un logiciel, même aussi convivial que Cabri-Géomètre supposent un minimum de connaissances informatiques et géométriques et un certain apprentissage.

De plus, un logiciel a un domaine d'emploi privilégié : Cabri-Géomètre est parfaitement adapté à la géométrie euclidienne. L'utilisation dans d'autres domaines mathématiques (géométrie vectorielle, géométrie des transformations ou même analyse) est possible, mais suppose une invention de l'utilisateur : par exemple, la construction du produit d'un vecteur par un réel suppose une compréhension profonde de l'introduction des nombres réels en géométrie ; il en est de même du rapport d'homothétie.

L'introduction d'un outil informatique dans l'enseignement se fait donc plus ou moins bien si le programme n'a pas été prévu pour l'utilisation de cet outil. Elle sera profondément facilitée le jour où la conception des programme intégrera la dimension informatique. On constatera alors peut-être que, pour enseigner la géométrie avec un outil comme Cabri-Géomètre, un retour aux sources est sans doute nécessaire : une introduction trop rapide de notions trop abstraites telles que vecteurs ou transformations est peut-être un obstacle à l'apprentissage d'une bonne "vision" géométrique.

Références

[1] Sado AG ALMOULOUD, *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec la preuve : des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration*. Recherche en didactique des mathématiques vol. 12 n° 23 (1992).p. 271-318.

[2] Yves BOUTEILLER et Michèle DUPÉRIER, *Les coniques avec le logiciel "Le Géomètre"*, Plot n°57 (décembre 1991), p. 22-25.

[3] Michel CARRAL et Roger CUPPENS, *Les tribulations d'un pentagone (ou, comment mener une recherche avec Cabri-Géomètre)*. Paru dans Repères n°12.

[4] *Cabriole*, Journal des utilisateurs de Cabri-Géomètre. Deux numéros parus (au moment de la rédaction de l'article).

[5] SHANG-CHIN CHOU, *Mechanical Geometry Theorem Proving*. D. Reidel Publishing Company, 1988.

[6] Cyrille DESMOULINS, *Problèmes de mise en œuvre pour un tuteur de construction de figure*. In Environnement interactifs d'apprentissage avec ordinateur (M. Baron, R. Gras et J.- F. Nicaud, ed), Eyrolles, 1993, p. 135-146.

[7] Jean-Luc GASSER, *Visions angulaires sur un terrain de football*, in *Bulletin* APMEP n°386, p.543-549.

[8] Henri LEBESGUE, *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthiers-Villars, 1950, Réédité par les éditions Jacques Galay en 1987.

[9] Emile LEMOINE, *Géométrographie ou art des constructions géométriques*. Scientia, Février 1902.

[10] Pierre NICOLAS, *Construction et vérification de figures géométriques dans le système Mentoniezh*. Thèse de l'Université de Rennes, 1989.

[11] Julius PETERSEN, *Méthodes et théories pour la résolution de problèmes de constructions géométriques*, Cinquième édition. Gauthiers-Villars. 1946.