

A la découverte d'une curieuse famille de polyèdres, très élémentaires, pouvant aussi bien servir de matériel d'initiation à la géométrie dans l'espace qu'à l'utilisation de méthodes mathématiques non scolaires.

Les Tectoèdres

Roger ISS
Embrun

1. Manipulations préliminaires

Posez sur une table un tétraèdre en terre glaise ou en pâte à modeler. Avec un couteau, découpez une "pointe" de ce solide, en pratiquant une coupe plane, pas forcément verticale, allant jusqu'au ras de la table (fig 1). Enlevez

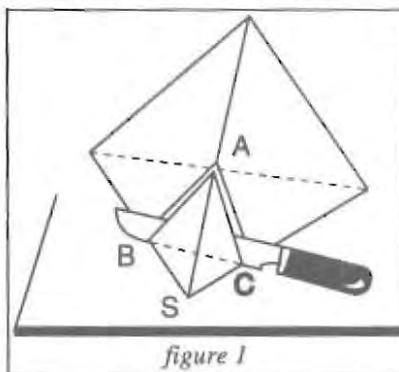


figure 1

le petit tétraèdre ainsi découpé; il vous reste un polyèdre dont la base est un quadrilatère. Sans changer la face en contact avec la table, continuez à tronquer ce polyèdre de la même manière, c'est-à-dire, de façon plus précise, à

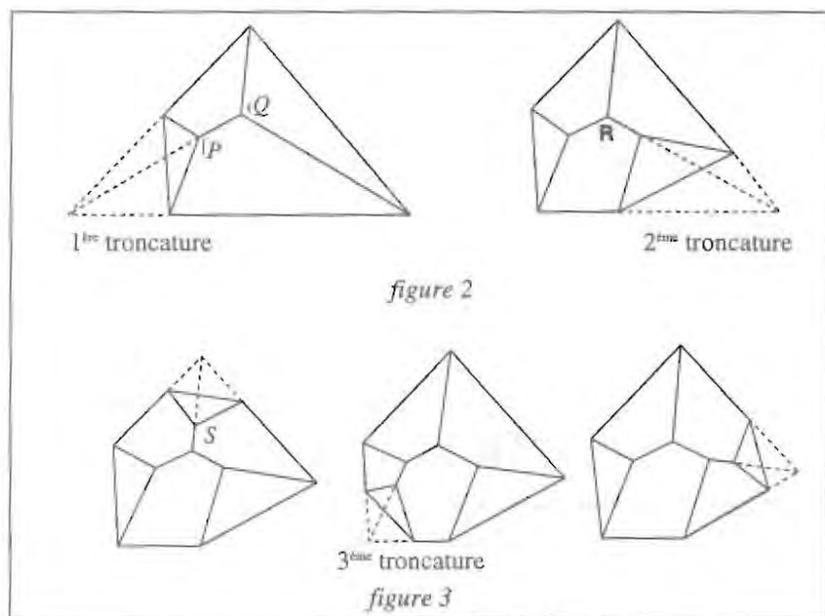
- choisir un sommet S de la face située dans le plan de la table;
- choisir, sur chacune des trois arêtes issues de S , un point distinct de leurs extrémités;
- A, B, C étant les points ainsi choisis, enlever au solide le tétraèdre $SABC$.

En répétant cette opération, que nous appellerons *troncature triangulaire*, on obtient des polyèdres convexes ayant la particularité suivante: chaque face

visible a un côté commun avec la face en contact avec la table. On peut aussi se contenter de représenter ces polyèdres par des vues en projection horizontale, car il est facile de voir, sur un tel dessin, l'effet d'une troncature triangulaire (fig 2 et 3). Que ce soit en découpant de la terre glaise ou en dessinant, on constate que, quelle que soit la manière de faire la première troncature, les solides à base quadrangulaire que l'on obtient se ressemblent tous par la disposition de leurs faces et le nombre de côtés de celles-ci. Il en est de même des solides à base pentagonale obtenus après deux troncatures (fig 2). Par contre, avec trois troncatures, on peut obtenir *trois* types différents de solides à base hexagonale (fig 3). Et on peut continuer les troncatures... Nous allons étudier de plus près les polyèdres ainsi obtenus..

2. Définitions

Fixons d'abord quelques points de vocabulaire. La face, en contact avec la table, sera appelée *base*. Pour bien la différencier des autres faces, nous utiliserons les mots *faces*, *arêtes*, *sommets* pour désigner, respectivement, les faces, arêtes, sommets qui ne sont pas dans le plan de la base. Pour ceux de ces éléments qui sont dans ce plan, nous parlerons de *base*, de *côtés de la base* et de *sommets de la base*.



Définition:

On appelle **tectoèdre** tout polyèdre convexe ⁽¹⁾ dont

1. une face, appelée *base*, a un côté en commun avec chacune des autres faces du polyèdre;
2. chaque sommet est commun à trois faces seulement.

Le nombre n de côtés de la base est l'**ordre** du tectoèdre. On dira aussi que le polyèdre est un tectoèdre pour - ou relativement à - la face qui joue le rôle de base. Les solides que nous avons obtenus précédemment satisfont évidemment à la première condition. Mais comme nous avons choisi de couper ces polyèdres successifs par des plans ne passant pas par les extrémités des arêtes, ils vérifient aussi la deuxième condition.

Remarque :

En fait, on peut donner une définition plus générale en supprimant la deuxième condition. Par exemple, toute pyramide satisfait à cette définition générale, mais seule la pyramide à base triangulaire vérifie la deuxième condition. Celle-ci a pour seul but de simplifier notre étude en écartant des cas particuliers que l'on peut considérer comme "limites" des autres, certains sommets étant venus se confondre (la limite extrême étant obtenue lorsque tous les sommets sont confondus : c'est le cas de la pyramide).

Toute arête étant commune à deux faces, et deux seulement, on peut distinguer deux types d'arêtes (en dehors des côtés de la base) :

- les *arêtes latérales*, issues des sommets de la base et communes à deux faces passant par deux côtés adjacents de la base; il y en a autant que de sommets de la base;
- les *arêtes sommitales*, joignant deux sommets et communes à deux faces passant par des côtés non adjacents de la base.

On peut de même distinguer trois types de sommets, suivant la nature des arêtes qui en sont issues :

→ *type 1* : c'est le sommet d'une face triangulaire: deux des arêtes sont latérales et la troisième sommitale. Exemple: les sommets P et Q du polyèdre de la figure 2;

→ *type 2* : une arête est latérale et les deux autres sommitales. Exemple, le sommet R du tectoèdre à base pentagonale de la figure 2;

→ *type 3* : les trois arêtes sont sommitales. Exemple le sommet S du premier

⁽¹⁾*Tectoèdre* : du latin tectum (toit). *Convexe* : le mot peut être pris au sens élémentaire; un polyèdre est convexe s'il est entièrement situé d'un même côté du plan de chacune de ses faces.

solide de la figure 3.

Remarques :

1. Les trois arêtes peuvent aussi être latérales toutes les trois. Le sommet est alors unique mais cela ne se produit que dans le cas du tétraèdre.
2. Deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf pour le tétraèdre.

3 - Dénombrement des sommets et des arêtes

Considérons un tectoèdre d'ordre n ($n > 3$) et appelons s_1, s_2, s_3 , le nombre de ses sommets respectivement de type 1, 2 et 3. Le nombre des arêtes latérales est égal à n , mais il est aussi égal à $2s_1 + s_2$, et, par suite

$$(1) \quad s_2 = n - 2s_1.$$

D'autre part, la somme des nombres des arêtes sommitales pour chaque type de sommet, est

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 2n + 3(s_3 - s_1).$$

Mais, dans ce décompte, chaque arête sommitale est comptée deux fois. Le nombre des arêtes sommitales est donc $n + (s_3 - s_1)$

Finalement, pour notre polyèdre, en tenant compte de la base, le nombre total des sommets est

$$S = 2n + s_3 - s_1$$

celui des arêtes

$$A = 2n + \frac{3}{2}(s_3 - s_1).$$

et celui des faces

$$F = n + 1.$$

Or ces trois nombres sont liés par la *relation d'Euler* pour les polyèdres :

$$F + S - A = 2.$$

Celle-ci nous donne, après réduction :

$$(2) \quad s_1 = 2 + s_3.$$

Des relations (1) et (2), nous tirons les deux inégalités suivantes:

$$s_1 \leq n/2 \quad \text{et} \quad s_1 \geq 2.$$

Comme s_1 est aussi le nombre des faces triangulaires, on en déduit le

Théorème 1 :

Le nombre des faces triangulaires d'un tectoèdre d'ordre n est au moins égal à 2 et au plus égal à $n/2$.

Il est facile d'obtenir des tectoèdres correspondant à ces deux cas extrêmes. Reprenons les manipulations du §1 et remarquons que chaque troncature ajoute une face triangulaire au tectoèdre de départ et remplace un sommet de la base par deux autres. Si chaque nouvelle troncature est faite systématiquement sur l'un de ces deux sommets, le nombre des faces triangulaires ne varie pas et reste égal à 2. Les tectoèdres obtenus n'ont pas de sommet de type 3 et leur ligne sommitale ne comporte pas de bifurcation.

De même, si à partir d'un tectoèdre d'ordre n , on tronque systématiquement tous les sommets de la base, on obtient un tectoèdre d'ordre $2n$ qui a n faces triangulaires.

En tenant compte des relations (1) et (2) ci-dessus, on voit, de plus, que le nombre des sommets et celui des arêtes sont indépendants de la forme du tectoèdre et ne dépendent que de son ordre :

Théorème 2 :

Dans tout tectoèdre d'ordre n , il y a $(n - 2)$ sommets et $(n - 3)$ arêtes sommitales.

Exercices d'application

1. *Tout tectoèdre d'ordre 4 est tectoèdre pour trois de ses faces*

Dans un tectoèdre d'ordre 4, deux faces seulement sont triangulaires (théorème 1). Les autres faces ont donc plus de 3 côtés, mais 4 au plus puisqu'il n'y a que quatre faces avec lesquelles elles peuvent avoir un côté commun. Ce sont donc des quadrilatères et le polyèdre est tectoèdre pour chacune d'elles.

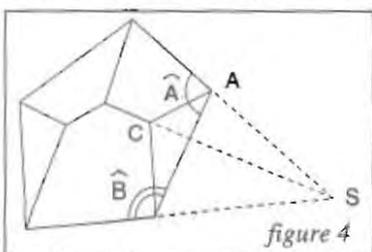
2. *Tout pentaèdre est un tectoèdre d'ordre 4.*

Ne pouvant avoir 5 faces triangulaires (le nombre de ses arêtes serait $3 \times 5/2 \dots$), le pentaèdre admet au moins une face ayant plus de 3 côtés. Comme précédemment, elle a 4 côtés au plus : c'est donc un quadrilatère et le pentaèdre est tectoèdre d'ordre 4.

4. Génération par récurrence des tectoèdres

Dans le §1, nous avons obtenu des tectoèdres par des troncutures à partir d'un tétraèdre. Inversement, tout tectoèdre peut-il s'obtenir, par des troncutures successives à partir d'un tétraèdre ? La réponse est oui, à une exception près...

En effet, considérons un tectoèdre T d'ordre n et soit $[AB]$ le côté de la base qui définit l'une de ses faces triangulaires. Soit \widehat{A} et \widehat{B} les mesures en radians des angles en A et B du polygone de base (fig 4) Supposons



$\widehat{A} + \widehat{B} > \pi$. Les prolongements des côtés adjacents au côté $[AB]$ se coupent alors en un point S tel que le triangle SAB soit, en entier, extérieur au polygone de base. Si C est le troisième sommet de la face triangulaire considérée, le tétraèdre $SABC$ est extérieur au polyèdre

T. Réunissons ce tétraèdre et le tectoèdre T: nous obtenons encore un tectoèdre, mais d'ordre $(n - 1)$, qui contient T. L'opération que nous venons de faire est exactement l'opération inverse de la troncature triangulaire. Elle est donc possible chaque fois qu'il existe une face triangulaire pour laquelle la condition $\widehat{A} + \widehat{B} > \pi$ ci-dessus est vérifiée. Or, dans un polygone convexe de plus de 4 côtés, la somme de quatre angles quelconques de ce polygone est toujours supérieure à 2 ⁽¹⁾. Si donc la condition n'est pas vérifiée pour l'une des faces, elle l'est nécessairement pour une autre, puisqu'il y en a au moins deux.

Par contre, pour un pentaèdre $(n = 4)$, il n'y a que deux faces triangulaires, et on peut avoir $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$ pour chacune de ces deux faces. La condition n'est pas satisfaite. La base du tectoèdre est, dans ce cas, un trapèze (pouvant, bien sûr, être un parallélogramme ou un rectangle...) et les faces triangulaires sont relatives aux côtés "obliques" du trapèze. Les deux autres faces se coupent suivant une arête sommitale parallèle au plan de base. Ce tectoèdre particulier ne peut donc pas être obtenu par troncature à partir d'un tétraèdre. Il en est de même de ses descendants par troncatures: ils sont caractérisés par l'existence d'une arête sommitale parallèle au plan de base. Une telle arête est l'intersection de deux faces déterminées respectivement par deux côtés parallèles de la base. On peut d'ailleurs montrer qu'une telle arête est unique sur le tectoèdre. En résumé:

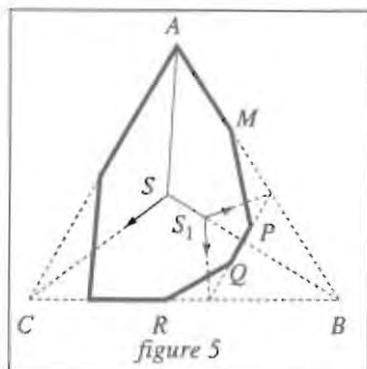
Tout tectoèdre qui n'a pas d'arête sommitale parallèle au plan de base, est "descendant" d'un tétraèdre par des troncatures triangulaires successives. Sinon il descend d'un pentaèdre ayant une telle arête.

5. Dessin d'un tectoèdre

Etant donné un polygone convexe, comment dessiner la projection orthogonale sur son plan d'un tectoèdre l'admettant pour base?

Cela est possible d'une infinité de façons. On dessine d'abord un

⁽¹⁾ Pour $n > 4$, s'il existait quatre angles dont la somme soit inférieure ou égale à 2 , la mesure de chacun des $(n - 4)$ autres angles étant strictement inférieure à la somme s des angles du polygone serait strictement inférieure à $2 + (n - 4)$, soit $s < (n - 2)$. Or, la somme s des angles d'un polygone convexe de n côtés est égale à $(n - 2)$. C'est donc impossible. Pour $n = 4$, par contre, on a $s = 2$. Si donc $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$, deux côtés opposés du quadrilatère de base sont parallèles et on a aussi $\widehat{A}' + \widehat{B}' = \pi$ pour les deux autres angles du quadrilatère. Dans ce cas, le point S n'existe pour aucune des deux faces triangulaires.

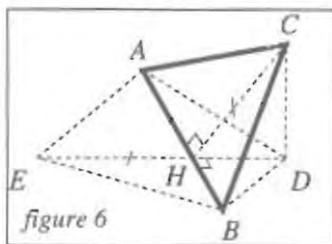


tétraèdre dont le tectoèdre descend par troncatures. Pour cela, on prolonge trois côtés de la base choisis de façon à obtenir un triangle ABC contenant le polygone (fig 5). On choisit ensuite arbitrairement le sommet S de ce tétraèdre (2). Si le triangle ABC a un sommet commun avec le polygone - par exemple A - $[SA]$ est une arête latérale du tectoèdre (la "pointe" A n'est pas tronquée...). Si un des sommets du triangle ABC n'est pas un sommet du polygone - par exemple B - on choisit, sur

l'arête $[SB]$ un sommet S_1 intérieur au segment $[SB]$. On a ainsi la première arête sommitale $[SS_1]$. Pour déterminer les deux autres arêtes issues de S_1 , il faut choisir celui des côtés de la base qui détermine la troisième face passant par S_1 . De simples considérations sur la convexité permettent de déterminer celle des deux lignes polygonales (séparées sur le polygone par les côtés déjà utilisés de la base) sur laquelle ce troisième côté doit être choisi. Sur la figure 5, par exemple, le côté $[PQ]$ a été choisi sur le contour $MPQR$. On continue en choisissant successivement, sur une arête déjà dessinée, un sommet, puis le côté de la base qui détermine la troisième face passant par ce sommet. On applique chaque fois un résultat simple de géométrie dans l'espace :

Si une arête est l'intersection de deux faces définies respectivement par deux côtés de la base, cette arête, ainsi que sa projection sur le plan de base, passent par le point commun aux prolongements de ces deux côtés (ou leur est parallèle s'ils ne se coupent pas).

6. Développement d'un tectoèdre



Imaginons un tectoèdre réalisé en carton. Coupons-le suivant toutes ses arêtes (autres que les côtés de la base) et rabattons chaque face sur le plan de base, en la faisant pivoter autour du côté correspondant de la base. On obtient ainsi un développement du tectoèdre.

Le dessin exact d'un tel développement peut se faire à partir du seul dessin de la pro-

(2) Il peut être pris n'importe où dans le plan. S'il est extérieur au polygone de base, cela entraîne simplement pour le tectoèdre, l'existence de faces inclinées vers l'extérieur de la base.

jection orthogonale du tectoèdre sur son plan de base. Commençons par une face triangulaire ABC (fig 6) et soient ABD et ABE respectivement la projection et le rabattement de cette face. Les hauteurs $[HD]$ et $[HE]$ sont alignées. Le triangle ABE est donc déterminé si on connaît la longueur de la hauteur $[HE]$. Evidemment, la seule donnée de la projection horizontale du tectoèdre ne définit ce dernier qu'à une affinité près, comme une carte topographique où les altitudes ne seraient pas données. On peut donc se donner arbitrairement la longueur de HE , pourvu, évidemment, qu'elle soit supérieure à celle de sa projection $[HD]$. (Pour éviter que le tectoèdre obtenu ne soit trop aplati, il faut la prendre au moins double de HD). Ce choix étant fait, le rabattement des autres faces se fait sans difficulté, de proche en proche.

En effet, il suffit de remarquer que :

- 1) après rabattement, les "hauteurs" d'une face, c'est-à-dire les perpendiculaires abaissées des sommets sur le côté de la base, sont alignées avec les hauteurs correspondantes de sa projection.
- 2) les alignements de l'espace sont conservés dans le rabattement: si une arête sommitale passe par le point commun aux prolongements de deux côtés de la base, son rabattement passe aussi par ce point.
- 3) chaque arête se retrouve en vraie grandeur dans le rabattement: ses rabattements, dans les deux faces qui la contiennent, sont donc des segments de même longueur.

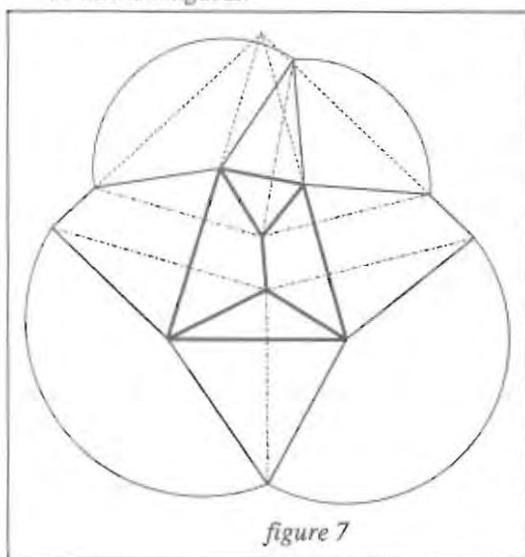
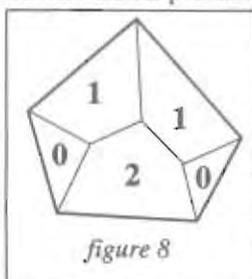


figure 7

Dessiner un tel développement (fig 7) constitue un exercice instructif de géométrie dans l'espace. Pour construire effectivement le tectoèdre à partir du développement, il est plus intéressant de redessiner les faces rabattues les unes à la suite des autres, en superposant les arêtes latérales homologues - sauf pour l'une d'elles le long de laquelle sera fait le collage. - et de ne pas utiliser le polygone de base: pliage et collage sont alors plus faciles.

7. Classification des tectoèdres

Ce n'est pas la forme exacte des tectoèdres qui nous intéresse, mais la nature et la répartition de leurs faces. Déjà, en découpant notre tétraèdre de terre glaise, nous avons fait un tri parmi les polyèdres obtenus. En disant qu'on ne trouvait qu'un seul modèle de tectoèdre de base à 4 ou à 5 côtés, et trois modèles avec une base hexagonale, nous avons utilisé une relation d'équivalence dans l'ensemble des polyèdres considérés. Pour préciser cette relation, nous allons convenir d'un code. Etant donné un tectoèdre d'ordre n , orientons le polygone de base et choisissons un de ses sommets pour origine. Cela revient à ranger les côtés du polygone, et, par conséquent, les faces du tectoèdre, dans un certain ordre. A chacune des faces, associons le nombre des arêtes sommitales qu'elle contient (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités) et que nous appellerons indice de la face. On obtient ainsi une suite de n entiers dont la somme est $2n - 6$ (il y a $(n - 3)$ arêtes sommitales et chacune est comptée deux fois dans cette formule). Mais l'origine et le sens choisis sur la base étant arbitraires, cette suite n'est définie qu'à des permutations circulaires près et, en convenant de ne pas faire de différence entre un tectoèdre et son symétrique par rapport à un plan (image-miroir), à une inversion près. Elle doit donc être considérée comme représentant un cycle non orienté. Par exemple, pour le tectoèdre d'ordre 5 de la figure 8, on trouve 10201, mais aussi 20110, 02011...



Convenons de classer toutes les écritures d'un tel cycle par ordre lexicographique et de ne conserver que la plus "grande". Nous l'appellerons *formule du tectoèdre*. Ainsi la formule du pentaèdre ci-contre est 20110. La relation d'équivalence cherchée est alors évidente:

Deux tectoèdres sont équivalents s'ils ont la même formule.

Comment se traduit une troncature triangulaire sur cette formule? Chaque troncature crée une nouvelle face triangulaire et augmente d'une unité le nombre des arêtes sommitales des faces qui lui sont adjacentes (elle transforme l'arête latérale qui leur était commune en sommitale). Cela nous donne la règle suivante:

Pour chaque troncature, on intercale un 0 entre deux termes consécutifs de la formule et on augmente d'une unité les deux nombres ainsi séparés (étant entendu qu'il faut le faire aussi pour les termes extrêmes, car ils sont consécutifs dans le cycle).

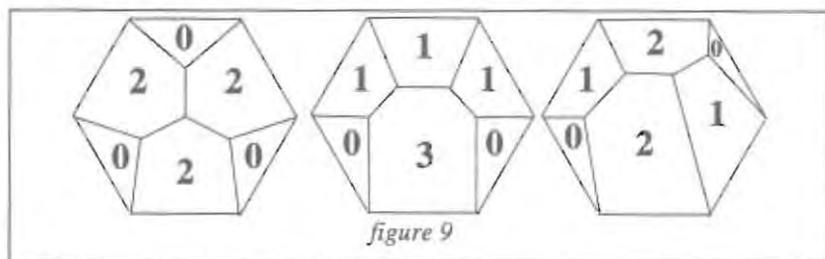
On peut donc obtenir facilement les formules de tous les descendants par troncatures d'un tectoèdre donné et, la règle étant évidemment, valable en sens inverse, celles de ses descendants.. Ainsi la formule 1010 du pentaèdre donne 20110 dans le sens descendant et 000 dans le sens ascendant. On peut ainsi "remonter" toute formule jusqu'à celle du tétraèdre

La recherche des différentes classes de tectoèdres se ramène donc à une recherche purement numérique et on peut oublier complètement le contexte géométrique. La règle de récurrence ci-dessus permet de trouver les cycles associés à tous les tectoèdres d'un ordre n donné, à partir des formules des tectoèdres d'ordre $(n - 1)$. Ainsi, à partir de la formule 20110 du tectoèdre d'ordre 5 on obtient les 5 descendants suivants:

030111 301110 210210 202020 201201.

Seulement, en ordonnant ces suites, comme convenu, on s'aperçoit qu'il n'y en a que trois distinctes: 301110 210210 202020.

Il y a donc trois classes de tectoèdres d'ordre 6 et trois seulement (fig 9). Nous les avons déjà trouvées au début de notre étude.



Mais, comme le montre l'exemple précédent, la récurrence donne les cycles non ordonnés et avec répétitions, la même suite pouvant être obtenue plusieurs fois, à une permutation circulaire ou une inversion près. Il faut donc opérer un tri, parmi les cycles obtenus. Cela peut se faire à la main jusqu'à l'ordre 7, pour lequel on trouve les quatre formules suivantes:

4 011 110, 3 102 110, 3 020 210, 2 201 210.

Au delà, les calculs et le tri deviennent fastidieux et il vaut mieux les faire avec un ordinateur qui, avec un programme pas trop difficile à écrire, fera ce tri avec rapidité et sûreté. On trouve ainsi 12, 27, 82, 228 et 733, formules respectivement pour les ordres 8, 9, 10, 11 et 12. Néanmoins, lorsque l'ordre n augmente, l'ordinateur, finit par s'essouffler. A défaut de déterminer explicitement toutes les formules d'un ordre, donné, nous devons nous contenter de calculer leur nombre.

8. Dualité

Etant donné un polyèdre, si, à chacune de ses faces, on fait correspondre un point et si on joint par un segment deux de ces points lorsqu'ils correspondent à des faces ayant une arête commune, on obtient une figure dite *duale* ou *transformée par dualité* du polyèdre. Cette figure est encore un polyèdre si on choisit chaque point dans la face correspondante. Par exemple, pour un polyèdre régulier, il est classique de prendre ce point au centre de la face. Ainsi, le dual du cube est un octaèdre régulier.

Nous allons utiliser cette dualité d'une manière un peu différente, en opérant sur la projection du tectoèdre sur son plan de base. Marquons, dans chaque face, sauf la base, un point et joignons par un segment deux de ces points lorsqu'ils appartiennent à deux faces ayant une arête commune. On constate (fig 10) que l'on dessine ainsi un polygone (que l'on peut toujours supposer convexe, quitte à déplacer quelques uns de ses sommets), dans lequel sont tracées des diagonales.

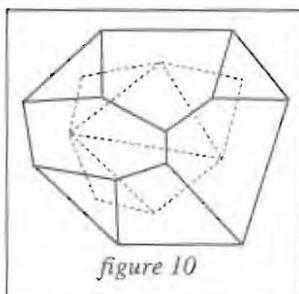


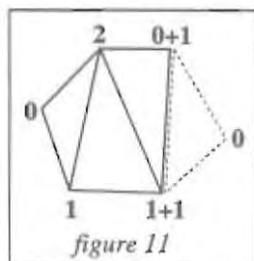
figure 10

Les côtés de ce polygone correspondent aux arêtes latérales du tectoèdre et les diagonales à ses arêtes sommitales. Ces diagonales *partagent le polygone en triangles* dont les sommets sont ceux du polygone, autrement dit, elles réalisent ce qu'on appelle une *triangulation* de ce dernier.

Remarquons, de plus, que l'indice dont nous avons affecté chaque face du tectoèdre est égal au nombre des diagonales issues du sommet correspondant à cette face. Appelons-le *indice* du sommet. En raisonnant comme on l'a fait pour les tectoèdres, on peut donc, à partir de la suite des indices, définir une *formule* du polygone triangulé. Cette formule est, évidemment, la même que celle du tectoèdre associé. En considérant comme équivalentes deux triangulations qui ont la même formule, la relation "avoir la même formule" définit une bijection entre l'ensemble des tectoèdres et celui des triangulations. Chaque propriété des tectoèdres a donc son homologue pour les polygones triangulés.

Par exemple, plaçons-nous en géométrie euclidienne. La somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est $(n - 2)\pi$ (cette somme se calcule d'ailleurs à partir d'une partition du polygone en triangles ayant tous un sommet commun). Un polygone triangulé contient donc $(n - 2)$ triangles déterminés par $(n - 3)$ diagonales. Or chacun des n côtés du polygone est côté d'un triangle de la partition: il y a donc, dans celle-ci, au moins deux

triangles qui ont deux côtés communs avec le polygone. A ces deux triangles correspondent deux sommets du tectoèdre d'où partent deux arêtes latérales, donc deux faces triangulaires. On retrouve ainsi le théorème affirmant l'existence d'au moins deux faces triangulaires dans un tectoèdre...



On retrouve également la troncature. Elle se traduit par l'adjonction au polygone triangulé, d'un triangle supplémentaire, construit sur un de ses côtés, vers l'extérieur. Cela provoque bien, dans la formule, l'insertion d'un zéro et l'augmentation d'une unité des deux nombres qui l'encadrent dans la formule (fig 11) L'opération inverse est évidemment aussi possible.

Il est facile de construire la triangulation correspondant à une formule donnée; c'est presque un jeu... Dessiner le polygone à trianguler et marquer chaque sommet de son indice lu dans la formule (le choix du premier sommet étant arbitraire). Pour chaque sommet d'indice 0, tracer la diagonale qui joint les deux sommets adjacents et enlever une unité à l'indice de ces derniers. Recommencer ensuite l'opération sur la partie non encore triangulée du polygone, et ainsi de suite... Faites l'essai avec l'octogone 31 022 020 et le décagone 4 103 103 110.

9. Dénombrement des tectoèdres

On sait, depuis 1960, calculer le nombre des triangulations possibles pour un polygone de n côtés. Nous pouvons donc aussi calculer le nombre T_n de tectoèdres d'ordre n donné. Voici la formule qui donne ce nombre :

$$T_n = \frac{(2n-5)!}{n!(n-3)!} + \frac{3(n-3)!}{2\binom{n}{2}\binom{n-4}{2}!} + \frac{(n-3)!}{2\binom{n-1}{2}\binom{n-3}{2}!} + \frac{\binom{2n-2}{3}!}{3\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}!}$$

Dans cette formule, on convient de considérer comme nul tout terme contenant une factorielle portant sur un nombre non entier, pour éviter d'avoir à donner quatre formules différentes suivant que n est de la forme $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$ ou $6k + 3$. Voici les premières valeurs de T_n , pour $n > 5$:

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T_n	3	4	12	27	82	228	733	2282	7528	24834

Le nombre T_n augmente évidemment très vite avec n : pour $n = 20$, il dépasse déjà 10 millions...