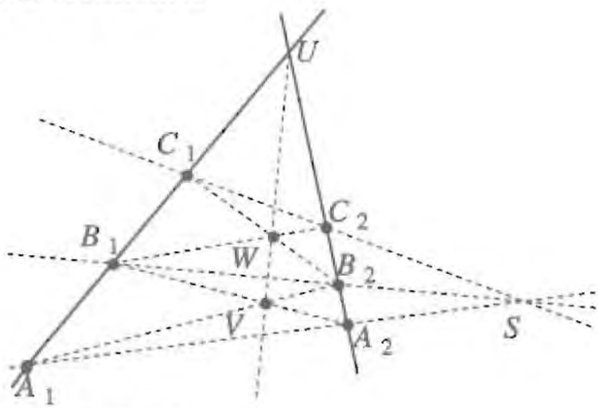
Fabrication de Données Mathématiques Assistée par Ordinateur

Marc Laura
Poissy

L'objectif de cet article est d'aider les enseignants, de lycée ou de collège, à introduire dans leurs énoncés des données bien adaptées et rapidement accessibles à leurs élèves. Il s'agit de montrer la possibilité de fabriquer certaines données à l'aide d'un logiciel de construction plane (GEOPLAN) et d'un logiciel de calcul formel (DERIVE).

Le lecteur disposant de ces logiciels est invité à reprendre les développements qui suivent sur son ordinateur.

Une figure et des énoncés



Un professeur décide de fabriquer, à l'intention d'élèves un énoncé de problème, exploitant les propriétés de la figure précédente, à partir de points donnés par leur couple de coordonnées, dans un repère du plan.

Ce professeur devra trouver des coordonnées, les plus simples possible, de sept points A1, B1, C1, A2, B2, C2 et S tels que :

A1, B1, C1 soient alignés

A2, B2, C2 soient alignés

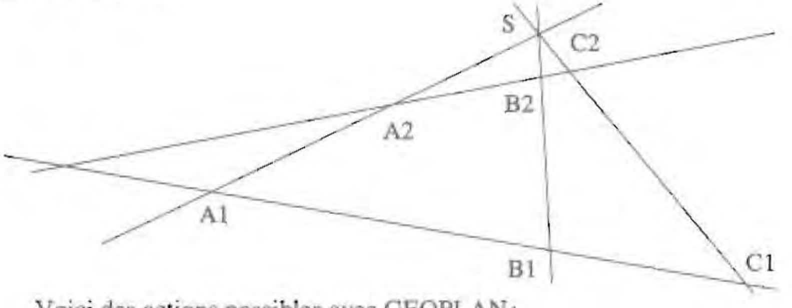
(A1 A2), (B1 B2), (C1 C2) soient concourantes en S.

A chaque sept-uplet de points, le professeur sera en mesure d'associer un énoncé, dans lequel les questions pourraient être :

1) Montrer que les points A1, B1, C1 sont alignés.
2) Montrer que les points A2, B2, C2 sont alignés.
3) Montrer que les droites (A1 A2), (B1 B2), (C1 C2) sont concourantes en S.
4) Soit {**U**} = (**A1 B1**)∩(**A2 B2**), {**V**} = (**A1 B2**)∩(**B1 A2**), {**W**} = (**B1 C2**)∩(**C1 B2**)
   a) Faire une figure sur papier millimétré
   b) Montrer que les points U, V, W sont alignés.

Tâtonnements avec un logiciel de construction

Avec certains logiciels de construction, on pourra construire la figure suivante et lire les valeurs approchées des coordonnées des points A1, B1, C1, A2, B2, C2 et S.



Voici des actions possibles avec GEOPLAN :

- Avec le menu MOBILE, placer les POINTS LIBRES A1, B1, A2, B2.
- Dans le mode MOUVOIR, déplacer ces points de façon à obtenir une disposition qui ressemble à la disposition de ces points sur la figure précédente
- Avec le menu POINT D'INTERSECTION, définir : {**S**} = (**A1 A2**)∩(**B1 B2**)
- Avec le menu MOBILE SUR LIGNE, placer le point C1 sur la droite (A1 B1).
- Avec le menu POINT INTERSECTION, définir {***C2***} = (***S C1***)∩(***A2 B2***).

- Avec le menu DIVERS COMMANDES, utiliser AJOUTER UNE COMMANDE :

la commande X, pour obtenir les coordonnées de A1 et B1

la commande Y, pour obtenir les coordonnées de A2 et B2

la commande Z, pour obtenir les coordonnées de S et C1.

On pourra trouver par exemple :

A1 (−5.0957, −2.9139)	B1 (1.3353, −4.1637)
A2 (−0.503, 0.3981)	B2 (1.9209, 1.224)
S (2.0267, 2.224)	C1 (5.1957, −4.914)

Pour avoir une configuration assez proche de la précédente et des coordonnées plus simples, on pourra redéfinir les points A1, B1, A2 et B2, en essayant par exemple : A1 (−5, −3) B1 (1, −4)

A2 (−1, 0) B2 (2, 1).

On pourra trouver dans ce cas : S(2.2941, 2.4706) C1 (4.6017, −4.6003)

Ainsi, ayant attribué des valeurs entières aux coordonnées des points A1, B1, A2 et B2, on peut vouloir calculer les valeurs exactes (non données par GEOPLAN) qui correspondent aux coordonnées des points S et C1. Les rationnels, coordonnées, de S et C1, se calculeront facilement avec DERIVE.

Un fichier utilitaire pour DERIVE

Pour calculer les coordonnées de points, points d'intersection de droites ou points alignés avec deux autres points, il est possible, avec DERIVE, de créer des fonctions adaptées que l'on regroupe dans un fichier utilitaire.

Avec la commande `OPTION ENTREE`, on choisira le mode `MOT` et on remplira le champ Maj/min par `DIFFERENCIE`.

On peut définir la fonction P qui, au point M(x, y), associe le couple [x, y] de ses coordonnées dans un repère du plan par :

```
1:      P(x,y):=[x,y]
```

et ainsi considérer m1, m2, m3, m4, m, les couples de coordonnées des points M1, M2, M3, M4 et M

```
2:      m1:=P(x1,y1)
3:      m2:=P(x2,y2)
4:      m3:=P(x3,y3)
5:      m4:=P(x4,y4)
6:      m:=P(x,y).
```

On peut définir la fonction EQ des variables m1 et m2 qui donne l'équation de la droite (M1 M2) :

```
7:      EQ(m1,m2):=DET([m2-m1,m-m1])=0
```

On peut définir la fonction RES1 des variables m1, m2 et a qui donne [x=a, y=a'] permettant d'obtenir l'ordonnée a' du point d'abscisse a de la droite (M1 M2) :

```
8:RES1(m1,m2,a):=RESOUS([EQ(m1,m2),x=a],[x,y])
```

On peut définir la fonction RES2 des variables m1, m2, m3, m4 qui donne [x=b,y=b'] permettant d'obtenir les coordonnées b et b' du point d'intersection des droites (M1 M2) et (M3 M4) :

```
9:RES2(m1,m2,m3,m4):=RESOUS([EQ(m1,m2),EQ(m3,m4)],[x,y])
```

On peut définir la fonction ALIGNES des variables m1, m2, m3 qui exprime par «OUI» ou par «NON», l'alignement ou non des points M1, M2, et M3.

```
10:ALIGNES(m1,m2,m3):=SI(DET([m2-m1,m3-m1]=0,"Oui","Non")
```

A l'aide de la commande `TRANSFERT SAUVE`, ces 10 lignes peuvent être sauvegardées dans un fichier que l'on notera, par exemple : FDMAO.MTH.
(Fabrication de Données Mathématiques Assistée par Ordinateur…)

Des calculs avec DERIVE

A l'aide de la commande `TRANSFERT FUSIONE`, choisir `DERIVE`, puis demander la fusion de FDMAO.MTH. Cette fusion se fait sans qu'apparaissent les 10 lignes du fichier.

Pour avoir des points dont la disposition d'ensemble est voisine de la configuration que présente la figure du début, nous avons vu que les calculs des coordonnées des points S et C1 nécessitaient l'introduction des points A1 (–5,–3), B1 (1, –4), A2 (–1, 0) et B2 (2, 1) et du point C1 d'abscisse 5.

Pour entrer les coordonnées de A1, B1, A2 et B2, on écrira :

```
1:     a1:=P(-5,-3)
2:     b1:=P(1,-4)
3:     a2:=P(-1,0)
4:     b2:=P(2,1)
```

Pour obtenir les coordonnées du point d'intersection S des droites (A1 A2) et (B1 B2), on écrira :

```
5:     RES2(a1,a2,b1,b2)
```

On utilisera pour la ligne 5:, la commande `SIMPLIFIE` et on obtiendra

```
6:     [[x=39/17,y=42/17]]
```

On pourra ainsi introduire les coordonnées de S par

```
7:     s:=P(39/17,42/17)
```

On introduira les coordonnées du point d'intersection C1, d'abscisse 5 de la droite (A1 B1)

```
8:     RES1(a1,b1,5)
9:     [[x=5,y=-14/3]]
10:    c1:=P(5,-14/3)
```

On introduira les coordonnées du point d'intersection C2 des droites

(S C1) et (A2 B2):

```
11:    RES2(s,c1,a2,b2)
12:    [[x=113/41,y=154/123]]
13:    c2:=P(113/41,154/123)
```

Ainsi obtient-on les points: $C1\left(5,-\frac{14}{3}\right)$, $C2\left(\frac{113}{41},\frac{154}{123}\right)$, $S\left(\frac{39}{17},\frac{42}{17}\right)$ qui, avec les points A1, B1, A2 et B2 sont les seules données mathématiques nécessaire pour bâtir l'énoncé ...

En posant $\{U\} = (\mathbf{A1\ B1})\cap(\mathbf{A2\ B2})$, $\{V\} = (\mathbf{A1\ B2})\cap(\mathbf{B1\ A2})$,
$\{W\} = (\mathbf{B1\ C2})\cap(\mathbf{C1\ B2})$
on pourra aussi calculer les coordonnées des points U, V et W, et vérifier l'alignement de ces points.

On introduira les coordonnées du point U intersection des droites (A1 B1) et (A2 B2)

```
14:    RES2(a1,b1,a2,b2)
15:    [[x=-25/3,y=-22/9]]
16:    u:=P(-25/3,-22/9)
```

On introduira les coordonnées du point V intersection des droites (A1 B2) et (B1 A2)

```
17:    RES2(a1,b2,b1,a2)
18:    [[x=-13/18,y=-5/9]]
19:    v:=P(-13/18,-5/9)
```

On introduira les coordonnées du point W intersection des droites (B1 C2) et (C1 B2)

```
20:    RES2(b1,c2,c1,b2)
21:    [[x=41/17,y=2/9]]
22:    u:=P(41/17,2/9)
```

On aura ainsi les points $U\left(-\frac{25}{3},-\frac{22}{9}\right)$, $V\left(-\frac{13}{18},-\frac{5}{9}\right)$, $W\left(\frac{41}{17},\frac{2}{9}\right)$

On pourra ainsi vérifier l'alignement de ces points en tapant :

```
23:    ALIGNES(u,v,w)
```

puis en utilisant pour la ligne 23:, la commande `SIMPLIFIE`, on obtiendra:

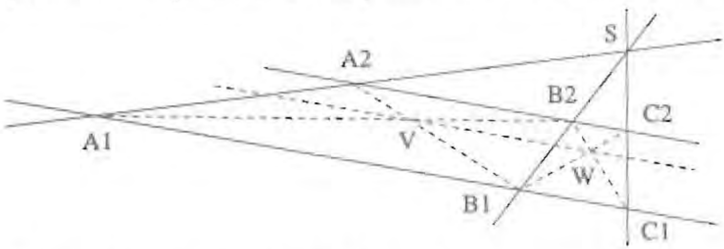
```
24:    "Oui"
```

Une famille d'énoncés

Voici quatre familles de points créées avec la méthode précédente, pouvant jouer le rôle d'hypothèse dans un énoncé avec quelques questions analogues à celle formulées au début de cet article.

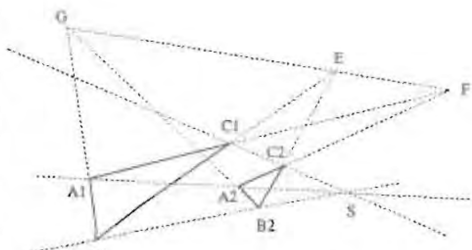
A1	(1, 1)	(−4, 1)	(−4, 0)	(−6, 2)
B1	(2, 2)	(4, −3)	(0, 2)	(2, 0)
C1	(3, 3)	(8, −5)	(2, 3)	(4, −1/2)
A2	(−4, 1)	(−2, 3)	(−6, −3)	(−1, 3)
B2	(3, −2)	(3, 3)	(0, −4)	(3, 2)
C2	$\left(\frac{18}{13} ; -\frac{17}{13}\right)$	$\left(\frac{50}{13} ; 3\right)$	$\left(\frac{15}{2} ; -\frac{21}{4}\right)$	$\left(4 ; \frac{7}{4}\right)$
S	$\left(\frac{9}{4} ; 1\right)$	$\left(\frac{13}{5} ; \frac{27}{5}\right)$	(0 ; 6)	(4 ; 4)
U	$\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$	(−8 ; 3)	$\left(-9 ; -\frac{5}{2}\right)$	?
V	$\left(\frac{1}{2} ; \frac{7}{4}\right)$	$\left(-\frac{3}{13} ; \frac{27}{13}\right)$	$\left(-\frac{36}{11} ; -\frac{8}{11}\right)$	(0 ; 2)
W	$\left(3 ; \frac{59}{8}\right)$	$\left(\frac{66}{17} ; \frac{27}{17}\right)$	$\left(\frac{90}{67} ; \frac{47}{67}\right)$	$\left(\frac{10}{3} ; \frac{7}{6}\right)$

On remarquera que dans le quatrième cas, les droites (A1 B1) et (A2 B2) sont parallèles : les questions 1) et 4)b) seront modifiées comme il convient !



Conclusion : fabriquez votre énoncé

Voici une figure :



Cette figure, comme celle du début, peut être génératrice d'énoncés. En voici un que j'ai composé en utilisant la "FDMAO", entendez par là «la Fabrication de Données Mathématiques Assistée par Ordinateur» que je vous ai indiquée dans les pages précédentes.

On considère les points :

$$A1\left(-\frac{3}{2}\,;-1\right);\ B1\left(-\frac{7}{5}\,;-\frac{5}{2}\right);\ C1\left(\frac{3}{2}\,;0\right)$$

et

$$A2\left(\frac{8}{5}\,;-1\right);\ B2\left(2\,;-\frac{9}{5}\right);\ C2\left(\frac{12}{5}\,;-\frac{63}{307}\right)$$

On définit :

$\{E\} = (\mathbf{B1\ C1})\cap(\mathbf{B2\ C2})$, $\{F\} = (\mathbf{C1\ A1})\cap(\mathbf{C2\ A2})$,
$\{G\} = (\mathbf{A1\ B1})\cap(\mathbf{A2\ B2})$

1) Faire une figure sur papier millimétré.

2) Montrer que les droites (A1 A2), (B1 B2) et (C1 C2) sont concourantes au point

$$S\left(\frac{206}{35}\,;-1\right)$$

3) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Je livre cet énoncé au lecteur qui pourra répondre aux questions, tester les données avec un logiciel de construction plane de son choix, ou alors modifier les données en utilisant la "FDMAO"...

Pour faire revivre des énoncés de géométrie projective, j'ai choisi deux figures illustrant des théorèmes de PAPPUS (mathématicien grec du III^e siècle) et de DESARGUES (mathématicien français du XVII^e siècle)...