

## Vie de l'Association

---

# LONGUEUR - AIRE VOLUME

*"Nous avons déjà souligné que les élèves avaient du mal à travailler sur des grandeurs sans passer par leurs mesures ; c'était le cas lorsqu'il s'agissait de comparer, c'est aussi le cas lorsqu'il s'agit de reproduire. Il y a là un obstacle à la prise en compte du sens même des situations et il n'est pas impossible que cet obstacle ait, au moins partiellement, ses racines dans les pratiques d'enseignement. C'est du moins une hypothèse à laquelle nous pourrions réfléchir."*

EVAPM 6/89-5/90 (page 28)

### Constats

Nous observons que les notions d'une part de longueur, d'autre part d'aire et de volume, sont loin d'être acquises en début de Sixième.

On constate souvent une erreur d'objectif dans l'enseignement de ces notions, aussi bien à l'école élémentaire qu'au collège : l'utilisation de formules prend le pas sur l'acquisition des concepts et réduit l'activité à une tâche exclusive de calcul. Un élève, à qui on demandait pourquoi il ne pouvait pas calculer le périmètre d'un triangle dont il connaissait les mesures des côtés alors qu'il savait calculer le périmètre d'un rectangle, répondait : "Ben ... je ne connais pas la formule" ! De telles pratiques donnent aux élèves, dans des situations "classiques", l'illusion de la connaissance et, de ce fait, peuvent devenir une entrave aux actions qui pourraient permettre une bonne acquisition de ces concepts.

L'apprentissage de ces notions s'effectue en continuité de l'école élé-

mentaire à la fin de la scolarité, et doit reposer sur des activités riches et variées portant prioritairement sur les concepts de grandeurs.

Signalons aussi que la disparition de l'enseignement des Sciences Physiques en Sixième et Cinquième et de l'Education Manuelle et Technique prive les élèves d'activités de manipulation et n'améliore pas la situation.

### À la lecture des programmes.

Ces observations nous ont amenés à lire plus attentivement les textes officiels; et force est de constater que la confusion signalée au niveau des pratiques règne aussi dans le libellé des programmes.

Dans les programmes de Collège, seuls les commentaires de Sixième traitent de la comparaison d'aires planes et font appel à des activités "de reports, de décompositions, de découpages et de recollages" ou des activités utilisant "quadrillages et encadrements". En Cinquième, en liaison avec la symétrie centrale, l'aire du triangle peut être obtenue à partir de l'aire du parallélogramme, elle-même obtenue à partir de celle du rectangle. Bien entendu, une autre démarche est possible : aire du rectangle  $\rightarrow$  aire du triangle  $\rightarrow$  aire du parallélogramme. Figurant dans la rubrique Gestion de données, les aires et volumes ne sont que trop souvent utilisés comme support d'activités pour la proportionnalité, et, de ce fait, traités numériquement. De même, en Quatrième et en Troisième, les activités de mesure se réduisent souvent à des calculs d'aires et de volumes sur les solides (sphère, pyramide et cône). Les concepts d'aire et de volume seraient-ils considérés acquis en fin de Cinquième ? Simultanément, on constate les difficultés qu'ont les élèves de Troisième à accepter le théorème nommé parfois familièrement "théorème  $k$ ,  $k^2$ ,  $k^3$ " plus particulièrement à propos des volumes. Au lieu d'utiliser ce théorème, ils n'hésitent pas à se lancer dans de longs calculs si la possibilité leur en est offerte et restent impuissants dans les autres cas.

A l'école primaire, au cycle des approfondissements, l'ancien texte officiel (1985) sur ce sujet est la partie du programme que nous reproduisons dans l'encadré ci-dessous (un texte de la même forme régissait le cycle des apprentissages fondamentaux et celui des apprentissages premiers).

#### C. Mesure de quelques grandeurs

- \* Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée ; utilisation des systèmes de mesure : expression par un nombre ou par un encadrement du résultat d'un mesurage.
- \* Utilisation des unités du système légal et usuel.

- \* Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de poids.
- \* Utilisation des instruments de mesure : double-décimètre, balance, montre, etc.
- \* Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume d'un pavé.
- \* Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné.

Voici ce que devient cette partie dans le nouveau programme paru au B.O. spécial n° 5 du 9 mars 1995 :

### Mesure

- \* Mesure de diverses grandeurs : longueur, masse, durée, aire, volume (en litre).
- \* Distinction entre périmètre et aire.
- \* Comparaison de deux angles, reproduction d'un angle donné.
- \* Unités de mesure :
  - pour les longueurs et les masses, unités du système métrique ;
  - pour les aires et volumes :  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$ ,  $\text{km}^2$ , cl, dl, l ;
  - pour les durées : unités usuelles et relations entre ces unités ;
- \* Ordre de grandeur pour longueur, masse, aire, volume, durée ; choix de l'unité appropriée.
- \* Périmètre d'un polygone, d'un cercle.
- \* Aire d'un rectangle.
- \* Utilisation d'un recueil de formules simples.
- \* Conversion d'unités :
  - entre unités usuelles de longueur ; de masse ;
  - entre unités légales et usuelles (entre hectare et  $\text{m}^2$ ).

Entre ces deux textes, nous déplorons la disparition de l'expression "*formation du concept*". On peut craindre que l'approche des grandeurs se réduise à des calculs et à l'utilisation d'un formulaire ! Seule la rubrique "Distinction entre périmètre et aire" évoque une possibilité d'activités permettant aux élèves de différencier les deux concepts, mais encore faudrait-il que ce soit explicité ! Un projet de programme présenté en trois colonnes : [Contenus - Activités - Compétences repères] prenait en compte cette acquisition des concepts et préconisait certains types d'activités. Malheureusement ce projet n'a jamais vu le jour !

Cependant, actuellement, un espoir subsiste : une publication de docu-

ments d'accompagnement est officiellement prévu comme "*information pédagogique indispensable à la réussite de l'action éducative*". Et nous souhaitons que ce texte tienne compte de nos propositions.

**Nous insistons sur la nécessité de recentrer les apprentissages fondamentaux de l'école élémentaire sur les concepts de longueur, d'aire et de volume** plus que sur les tâches calculatoires liées à ces notions. C'est par l'intermédiaire d'activités nombreuses et variées, activités qui doivent être poursuivies au collège, que les élèves pourront approcher ces concepts et se les approprier. Il faut éviter en effet de passer trop tôt à des exercices visant la technicité qui, comme nous le disions précédemment, donnent l'illusion de la connaissance.

**Pour le cycle 2** (Grande Section, CP, CE1) :

Pour les grandeurs au programme à ce niveau, de nombreuses activités bien ciblées devraient aboutir à ancrer les notions de grandeurs avant d'aborder leurs mesures, sans se précipiter dans l'usage exclusif des unités usuelles. Il faut permettre aux élèves de prendre "n'importe quoi" comme unité pour mesurer une grandeur pourvu que le nombre qui donne la mesure soit "fréquentable". Les unités usuelles viennent alors comme un outil de communication sociale. A ce niveau, en ce qui concerne la longueur, on devrait développer des activités mettant en œuvre la comparaison et le report de longueurs sans privilégier les mesures. Rappelons ce que nous écrivions dans notre article sur les Constructions géométriques : "*L'utilisation du compas-ficelle, du compas, de la bande de papier non graduée ou de la règle graduée pour un report de longueur met en jeu des concepts différents : la grandeur ou sa mesure.*"

**Pour le cycle 3** (CE2, CM1, CM2) :

Dans la partie **Géométrie**, la rubrique "Action sur les figures planes" devrait conduire à analyser les effets de déplacements et de retournements d'une part, de l'agrandissement et de la réduction d'autre part. Ces effets présentent un grand intérêt dans le cadre d'un travail sur les longueurs et les aires, sur des supports variés : papier ou écran quadrillés, pointés, blanc, etc ... Il serait souhaitable de proposer des activités allant dans ce sens.

Nous souhaitons que les documents d'accompagnement distinguent "Grandeurs" et "Mesures de ces grandeurs". Après avoir travaillé sur les grandeurs elles-mêmes, il serait bon de faire de nombreuses activités à l'aide de gabarits, étalons sur les diverses grandeurs abordées.

Dans cette optique, la disparition dans le libellé du nouveau programme "d'aire du triangle" et "d'aire du disque", nous semble un élément positif. Cela n'empêche pas des activités sur ces aires, par exemple en obtenant l'aire d'un triangle à partir de décompositions en plusieurs surfaces simples,

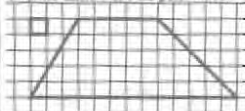
et en approchant l'aire d'un disque par encadrements (utilisation de quadrillages de plus en plus fins ...). Cela permet de faire réellement fonctionner le concept d'aire.

Il serait utile de développer les calculs sur les grandeurs elles-mêmes, ce qui entraîne la mention des unités dans les calculs. Par exemple :  $5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$  ;  $1 \text{ m} + 12 \text{ cm} = 112 \text{ cm}$  ;  $2 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 6 \text{ m}^2$  ;  $2 \text{ m} \times 3 = 6 \text{ m}$  ;  $3 \times 2 \text{ m} = 6 \text{ m}$ . Cela n'interdit pas dans un deuxième temps les calculs sur les mesures en montrant la distinction entre les deux registres. Quant à la rubrique "Utilisation d'un recueil de formules simples", elle déborde le cadre de la mesure et serait plus appropriée dans le paragraphe "Nombres et calcul" en signalant d'ailleurs son caractère pluridisciplinaire.

### Longueurs - Aires - Volumes à travers les évaluations.

Les tests d'évaluation sont souvent significatifs des objectifs d'enseignement. Encore faut-il être vigilant dans l'élaboration des tests et ne pas se tromper d'objectif. Voici un extrait de l'analyse faite dans la brochure EVAPM6/89-5/90 (page 82) à propos de la détermination de l'aire d'un trapèze en fin de Sixième :

Calculer l'aire de ce trapèze en prenant comme unité l'aire du petit carré. EVAPM6/89 M6

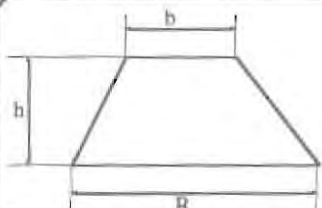


réponse

" Il est tout à fait intéressant de comparer les questions C17-18 et M6. Pour M6 qui obtenait 21% de réussite en 1987, on tombe à 14% en 89, et dans les mêmes conditions de passation (le questionnaire M est repris intégralement d'EVAPM6/87). Ce type d'activité aurait-il été mis en "veilleuse" dans notre enseignement ? C'est pourtant avec ce genre de problème qu'on peut développer la notion d'aire chez nos élèves. Il faut dire que les élèves ont dû être gênés par le mot "Calcule" : nous aurions plutôt dû écrire "Trouve".

Par contre, en C17-18 on teste seulement l'aptitude des élèves à appliquer une formule littérale. En effet, contrairement à la question que nous posons ci-après, les élèves n'ont pas à reconnaître sur la figure les éléments

EVAPM6/89 C17-18

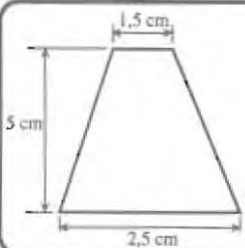


L'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze qui vérifie :  $B = 2,5 \text{ cm}$  ;  $b = 1,5 \text{ cm}$  ;  $h = 5$

de la formule ; et la correspondance entre les lettres et leurs valeurs numériques ne met pas en jeu leurs connaissances géométriques. La réussite n'a donc aucun rapport avec la notion d'aire, ou encore, la question n'est pas valide relativement au domaine étudié."



L'aire du trapèze est donnée par la formule:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

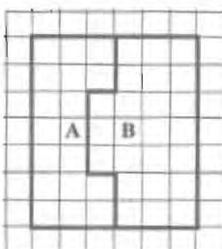
où B désigne la grande base, b la petite base et h la hauteur du trapèze.

Utilise cette formule pour calculer l'aire d'un trapèze dont les mesures sont indiquées sur le dessin ci contre.

Cet exemple nous montre que ce n'est pas parce qu'il est question d'aire que nous avons une question sur la notion d'aire ! Nous ne considérons pas, bien évidemment, les tests d'évaluation de pur calcul sur les longueurs, aires et volumes.

Les évaluations à l'entrée en Sixième sont significatives des modes d'apprentissages souhaités à l'école élémentaire. Bien sûr nous trouvons chaque année une question sur l'utilisation d'un formulaire, question qui semble chère aux "évaluateurs" ! Mais nous trouvons aussi, à partir de 1990 des questions qui vont dans le sens de nos préoccupations.

Evaluation à l'entrée en Sixième 90 et 92 - Exercice 36.



Un terrain est partagé comme l'indique la figure ci-contre

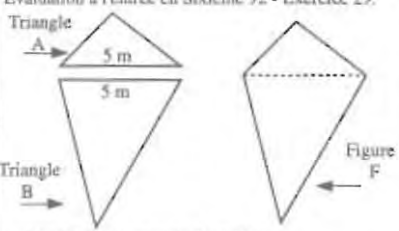
(Et on demandait de comparer les aires parcelles A et B : plus petite, égale, plus grande. Le même travail était demandé pour les périmètres.)

La question ci-contre donne un exemple d'activités où les élèves, par modification d'un dessin polygonal sur quadrilla-

ge, doivent augmenter ou réduire l'aire d'une figure sans en changer le périmètre.

Au collège, en plus de l'exemple cité en introduction de cette partie, voici, à propos des aires, deux questions qui font appel, l'une, à une

Evaluation à l'entrée en Sixième 92 - Exercice 29.



Triangle A → 5 m

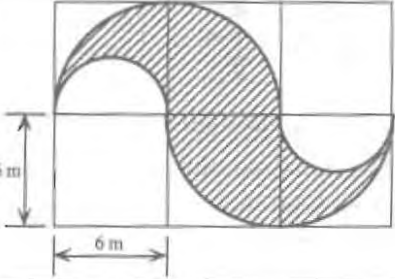
Triangle B → 5 m

Figure F ←

Le périmètre du triangle A est 12 m  
Le périmètre du triangle B est 17 m  
La figure F est formée à l'aide des deux triangles comme indiqué sur le dessin.

Quel est le périmètre de la figure F ?

réorganisation du dessin (découpage mental et recollement puis différence d'aires) et l'autre, à une différence d'aires "connues" :

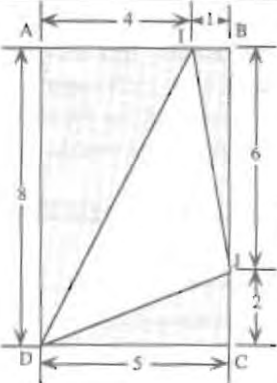


Cette figure représente un décor mural en réduction.

Ce décor est composé de plusieurs demi-cercles tracés sur un quadrillage formé de carrés de 6 mètres de côté.

**CALCULE**, en  $m^2$  l'aire réelle du décor (surface hachurée).

Prends  $\pi = 3,14$



ABCD est un rectangle. Les mesures de longueurs sont faites en cm.

En n'utilisant que les mesures portées sur la figure :

1° ) Calcule l'aire du triangle DAI.

2° ) calcule l'aire du triangle DJI.

3° ) Toujours sans mesurer, COMPARE la hauteur issue de A dans le triangle DAI et la hauteur issue de J dans le triangle DJI.

L'ensemble de la question Q28-30 fait intervenir à la fois le concept d'aire et l'aire comme outil par l'utilisation pertinente d'une formule. En ce qui concerne les volumes une question d'EVAPM3/92: I29-33, reprise et modifiée d'EVAPM3/90, a attiré notre attention. Il s'agit là aussi d'utiliser de façon très pertinente les formules de volume du cône et de la pyramide en relation avec celles du cylindre et du prisme. Voici un extrait de l'analyse faite dans la brochure EVAPM4/91-3/92 (page 75).

"La question I 29 à 33 a été reprise d'EVAPM 3/90 mais avec une modification de l'énoncé. Il y a deux ans nous n'avions pas donné de valeur numérique à la hauteur commune aux quatre solides, l'appelant seulement "h" sur le dessin. En donnant une valeur numérique précise à la hauteur, nous voulions connaître la proportion d'élèves qui calculeraient l'aire de la base, et celle des élèves qui procéderaient par "mise en relation", sachant que le volume du cône et celui de la pyramide valent respectivement un tiers

EVAPM3/92 I29-33

La figure représente quatre solides : un cylindre de révolution, un cône de révolution, un prisme droit et une pyramide régulière.

Ces quatre solides ont la même aire de base et la même hauteur. Le cône a un volume de  $24 \text{ cm}^3$

Quel est le volume du cylindre? .....

Quel est le volume du prisme? .....

Quel est le volume de la pyramide? .....

Explique comment tu as fait pour trouver les réponses : .....

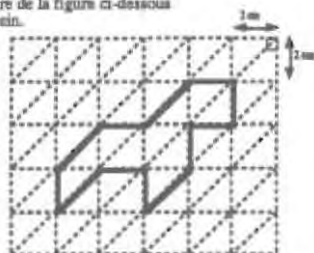
du volume du cylindre et du cône et du prisme ayant la même base et la même hauteur. Nous pensions ainsi voir les taux de réussite augmenter : or il n'en est rien !

Les résultats font apparaître qu'un élève sur deux a traité la question, et que, parmi ceux-là, 1/3 en moyenne a répondu correctement, 16% en calculant l'aire de la base et 7% en appliquant directement le coefficient 3 au volume du cône. Le fort taux de non-réponses fait craindre qu'en Troisième les élèves ne soient peut-être toujours pas familiarisés avec la notion de volume.

Enfin empruntons à l'évaluation à l'entrée en Seconde des Lycées Professionnels (rappelons que c'est une évaluation diagnostique) une question qui mérite notre attention. La résolution de ces trois exercices retenus ici fait vraiment appel aux notions d'aire et de périmètre, sans que les calculs nécessaires à cette résolution soient complexes. Seul le deuxième

évaluation à l'entrée en Seconde professionnelle 1993 - Exercice II.B.  
On trouve en particulier :

- 3.1 Calculer les aires des triangles rectangles isocèles dont les côtés de l'angle droit mesurent : 4 cm, 8 cm, 10 cm.
5. Calculer, en cm, le périmètre d'un triangle rectangle isocèle dont l'aire est de  $72 \text{ cm}^2$ .
6. Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de la figure ci-dessous limitée par un trait plein.



exercice ne peut être donné avant le niveau Quatrième puisqu'il nécessite la connaissance de la propriété de Pythagore pour le calcul de la longueur de l'hypoténuse. Ce sont de telles activités que les programmes devraient préconiser à tous les niveaux du collège.



## Quelques activités.

Dans cet esprit, nous présentons, en annexe, quelques types d'exercices qu'il faudrait développer, sans rappeler tous les exercices plus classiques de reconstitution de figures de toutes sortes style Tangram, puzzles, pavages.

*Texte adopté à l'unanimité par le Comité des 24 et 25 juin 1995.*

### Bibliographie :

- Grandeur - Mesure, (MOTS Tome VI) ; APMEP Brochure n°46 (1982).  
Aires de surfaces planes, 1ère partie : Petit x n° 6 (1984) ; 2ème partie : Petit x n° 8 (1985)  
Aires - Initiation à la preuve (Géométrie plane en 5ème) IREM de POITIERS (1986)  
Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane :  
Educational Studies in Mathematics, n° 20 (1989)  
Aires (Second cycle) IREM de POITIERS (1991)  
Actes du Colloque Inter-IREM de Géométrie, IREM de LIMOGES (1992)  
Démontrer avec des aires, GALION (1993).  
Remise à l'honneur des méthodes géométriques, IREM de LIMOGES (réédition 1994)  
Le tour de l'aire au Collège, IREM de LYON (1994).

## ANNEXE

### LONGUEURS - AIRES - VOLUMES

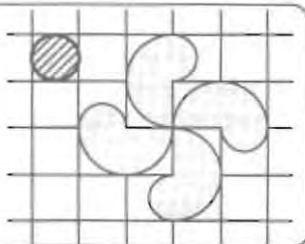
Exercice 1. (6ème - 5ème)

En prenant comme unité l'aire du carré hachuré, exprime la mesure des aires des deux figures grisées construites à l'aide du quadrillage.

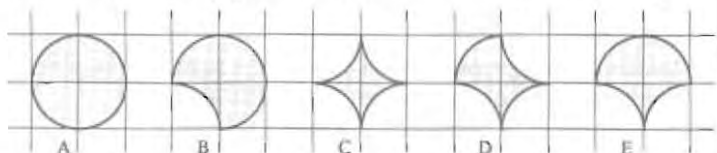
The diagram consists of two separate grid-based exercises. The left exercise shows a 5x4 grid with a semi-circle of radius 2 units attached to the right side of the bottom two rows. A small square in the top-left corner is shaded and labeled 'Aire unité'. The right exercise shows a 6x6 grid with a complex shape made of circles. The shape is composed of a 2x2 arrangement of circles with radius 2 units, and a 2x2 arrangement of circles with radius 1 unit in the center. A small square in the top-left corner is shaded and labeled 'Aire unité'.

**Exercice 2. (6ème - 5ème)**

- 1°) En choisissant comme unité le périmètre du disque hachuré, exprime le périmètre de la figure grisée construite à l'aide du quadrillage.
- 2°) En choisissant comme unité l'aire du disque hachuré, exprime l'aire de cette même figure.
- 3°) Si les côtés des carrés du quadrillage mesurent 1 cm, calcule le périmètre de la figure à un millimètre près, et son aire à un millimètre carré près.

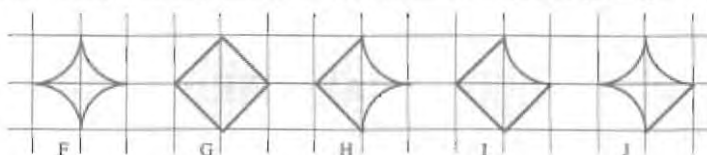


**Exercice 3. (6ème - 5ème)** Les cinq figures ci-dessous ont été construites à partir du quadrillage.



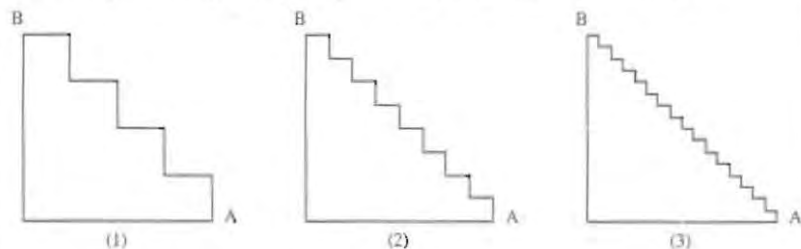
- 1°) Compare les périmètres des figures B, C, D et E à celui du cercle A.
- 2°) Range ces figures de la plus petite aire à la plus grande.

**Exercice 4. (6ème - 5ème)** Les cinq figures ci-dessous ont été construites à partir du quadrillage.



- 1°) Range ces figures du plus petit périmètre au plus grand.
- 2°) Range ces figures de la plus petite aire à la plus grande.

**Exercice 5. (6ème - 5ème)** De plus en plus de marches de moins en moins hautes !



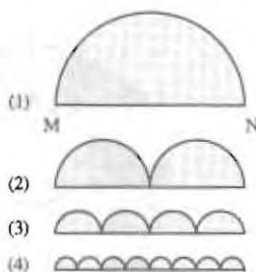
Pour quel escalier la longueur de la ligne allant de A à B est-elle la plus petite ?

**Exercice 6. (5ème) Des arceaux de plus en plus petits.**

Toutes les figures sont construites sur un segment de longueur MN. Les arceaux sont des demi-cercles et, d'une figure à la suivante, on double le nombre d'arceaux.

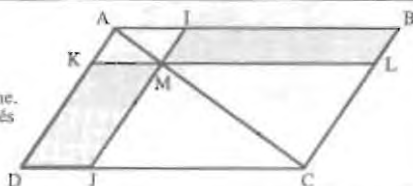
1°) Exprime la longueur des arceaux des figures (2), (3) et (4) en fonction de la longueur  $L$  du demi-cercle de la figure (1).

2°) Exprime l'aire des zones grisées des figures (2), (3) et (4) en fonction de l'aire  $A$  du demi-disque de la figure (1).



**Exercice 7. (5ème)**

ABCD est un parallélogramme. Par un point M de la diagonale [AC], on trace les parallèles aux côtés du parallélogramme. Ces parallèles coupent les côtés aux points indiqués sur la figure. Comparer les aires des zones grisées.



**Exercice 8. (5ème)**

Les médianes d'un triangle partagent ce triangle en six zones. Montrer que les aires de ces zones sont égales.

