Vie de l'Association

Le Groupe de Réflexion et de Proposition sur les Programmes de Mathématiques au Collège (appelé parfois "Après EVAPM" du fait qu'il s'appuie sur les analyses faites dans les diverses évaluations EVAPM) poursuit son travail.

Après :

- Connaissances des nombres - Calcul numérique (Bulletin n° 387)
- Constructions géométriques (Bulletin n° 390)
- Calcul littéral (Bulletin n° 395)
- Longueur - aire - volume (Bulletin n° 402)

voici une réflexion sur la proportionnalité et les fonctions affines.

Ce texte a été discuté et adopté au Comité de l'A.P.M.E.P. des 22 et 23 juin 1996.

Proportionnalité, fonctions linéaires et affines

«La dualité d'aspect de la proportionnalité (fonction et isomorphisme) a suscité de nombreuses recherches sur l'enseignement élémentaire et de premier cycle. Les résultats déjà obtenus montrent en particulier que les procédures de type isomorphisme sont plus disponibles et utilisées plus volontiers par les élèves que les procédures de type "fonction". Toutefois, cela est à nuancer selon la familiarité des élèves avec les valeurs numériques en jeu dans les problèmes posés : un changement des valeurs numériques peut entraîner une modification des procédures ; dans ce cas, les variables numériques constituent des variables didactiques à la disposition de l'enseignant pour favoriser ou au contraire bloquer une procédure.»

Contribution à l'enseignement mathématique contemporain :

La proportionnalité - 1985 (COPREM)*

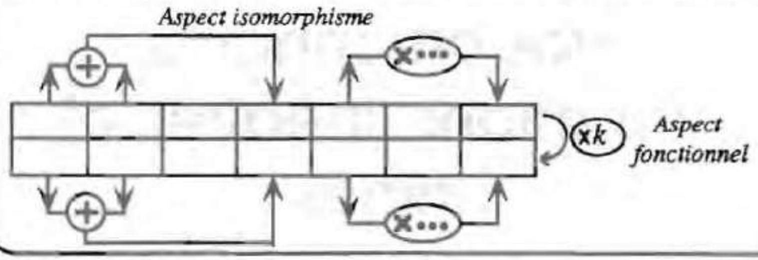
* Commission permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques

S'il y a parfois désaccord à l'intérieur de la communauté mathématique pour maintenir ou inclure dans les programmes certaines notions mathématiques (nous pensons en particulier à l'arithmétique au collège), la place de l'enseignement de la proportionnalité fait au contraire l'unanimité. Notre réflexion portera donc plutôt sur ses aspects pédagogiques ou didactiques, étant bien entendu que l'objectif essentiel de son enseignement au collège est la reconnaissance de situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité et leur traitement.

Quelques considérations d'ordre didactique.

Le document ci-dessous schématise sur un tableau la dualité d'aspect de la proportionnalité (fonction et isomorphisme) dont il est question dans l'extrait ci-dessus du texte de la COPREM.

Rappel pour deux grandeurs proportionnelles :
aspect isomorphisme et aspect fonctionnel présentés sous forme de tableau.



Pour étayer les remarques de la COPREM que nous rappelons en chapeau à ce texte, considérons quatre situations. Les situations 1 et 3 sont des questions d'EVAPM5/88. Nous n'avons donc pas modifié les énoncés. Remarquons que la proportionnalité y est implicite ; elle est considérée comme "naturelle". Ceci est fréquent dans les énoncés ; nous aborderons ce problème plus loin dans cet article.

Situation 1 (EVAPM5/88 N27-28)

En terrain plat, en 1 heure, tu parcours 30 km avec ton vélomoteur.

Combien de temps, en minutes, mettrais-tu pour parcourir :

7 km ? ; 17 km ? ; 24 km ?

Situation 2

En terrain plat, en 1 heure, tu parcours 30 km avec ton vélomoteur.

Combien de temps, en minutes, mettrais-tu pour parcourir :

6 km ? ; 15 km ? ; 21 km ?

Malgré les apparences, ces deux premières situations ne sont pas identiques. La nature des nombres dans les questions induit des traitements différents. Dans la première situation, 7 et 17 sont premiers avec 30. Le traitement de cette situation est facilité par le passage à l'unité, c'est-à-dire par la recherche du cœfficient multiplicateur [x 2 ici] ; c'est donc un traitement de type fonctionnel que la nature des nombres induit dans ce cas. L'exercice est réussi par près de 40 % d'élèves de Cinquième. En revanche, si la situation 2 peut être traitée de la même façon, la particularité pour 6 et 15 d'être des diviseurs de 30 permet un traitement de type isomorphisme [6 = 30 : 5 ; donc la durée cherchée est 60 : 5]. Il sera intéressant de tester cet exercice pour pouvoir comparer les procédures et les réussites.

Situation 3 (EVAPM 5/88 Questionnaire-thème)

La caissière du cinéma Rex a fabriqué un tableau indiquant le prix à payer selon le nombre de personnes. **Complète-le.**

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix à payer		54F	72F		108F				

Situation 4

La caissière du cinéma Rex a fabriqué un tableau indiquant le prix à payer selon le nombre de personnes. **Complète-le.**

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix à payer		60F	80F		120F				

De la même manière, les situations 3 et 4 diffèrent dans les possibilités de traitement : le choix des nombres de la situation 4 permet un traitement mental (table de multiplication par 2) et induit ainsi en réalité un traitement de type fonctionnel. Si la situation 3 peut aussi être traitée de la même manière, le traitement par isomorphisme semble plus probable, surtout en l'absence de calculatrice. Cette probabilité serait augmentée si le prix de la place était par exemple de 20,50 F. Cependant le contexte (le "vécu") incite au calcul du prix d'**une** place.

On le voit, il n'y a pas à privilégier a priori un type de traitement plutôt que l'autre. Le choix se fera naturellement et le plus souvent en fonction de la nature des nombres et des propriétés (multiples - diviseurs - premiers entre eux) plus ou moins évidentes qui existent entre eux, et dont la perception dépend donc des capacités de calcul mental de chaque élève. Il faut donc, suivant les objectifs poursuivis, être très attentif au choix des situations et des données numériques, et œuvrer pour développer les capacités de calcul mental.

L'apprentissage s'attachera donc à développer les deux types de procédures (aspect fonction et aspect isomorphisme). Trois paramètres influent alors sur le traitement des situations de proportionnalité :

* Influence des nombres mis en jeu. Suivant la nature des nombres (entiers, nombres à virgule, fractions, multiples, diviseurs, cœfficient multiplicateur entier ou non, plus petit ou plus grand que 1) les traitements mentaux sont différents et les résolutions plus ou moins complexes. Bien souvent, l'échec vient des difficultés rencontrées dans le calcul, ou de la perte de sens due à des nombres "peu fréquentables"... !!!

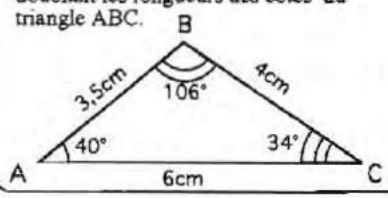
* Influence de la situation traitée. Bien souvent, pour éviter de donner des indications jugées trop importantes, la proportionnalité -nous l'avons déjà signalé- reste implicite dans les énoncés. On suppose qu'elle "va de soi" ou bien on fait appel au vécu de l'élève. Mais ce vécu ne lui permet pas toujours de comprendre la situation et donc de la traiter. La vente par lots ("1 paquet pour 20 F, 3 paquets pour 50 F" !) en est un exemple caractéristique : bien souvent le lot est a priori "proportionnellement moins cher" qu'à l'unité. Les situations dites "réelles" ont un "vécu" qui ne correspond pas toujours au modèle attendu par le professeur.

Il faut donc bien différencier d'une part les situations d'apprentissage et d'évaluation, et d'autre part les situations à visées éducatives prises dans la vie courante et qui sont souvent complexes. Les variables des situations d'apprentissages et d'évaluation doivent être bien contrôlées.

* Influence du support . Nous avons pu remarquer que la présentation sous forme de tableaux induit souvent un réflexe de proportionnalité ! Dans l'exemple suivant (EVAPM 6/89 P17-18 et Q7-8), la même situation est présentée de deux manières différentes.

EVAPM6/89 P17-18

Pierre réalise un triangle A'B'C' en doublant les longueurs des côtés du triangle ABC.



Indique dans le tableau ci-dessous les mesures (côtés et angles) du triangle A'B'C'

A'B'	B'C'	A'C'	$\widehat{A'}$	$\widehat{B'}$	$\widehat{C'}$
R = 59 %			R = 39 %		

Dans la question P17-18, les renseignements sont portés sur un dessin qui lui-même peut aider au traitement du problème ; seules les réponses sont à porter dans un tableau. En revanche, dans la question Q07-08, la situation est décrite par un texte peut-être plus difficile à "décoder" pour un élève de Sixième, et les renseignements sont portés dans un tableau. La meilleure réussite à la question Q07-08 en ce qui concerne les longueurs n'est qu'apparente car, en ce qui concerne les angles, elle est moins bonne qu'à la question P17-18. On le voit, la présentation sous forme de tableau a incité les élèves à étendre sans discernement la multiplication par 2 à l'ensemble des données numériques. La réussite pour les longueurs et l'échec pour les angles se trouvent ainsi amplifiés par rapport à la question P17-18 ; il nous faut donc rester très attentifs aux modes d'évaluation et très vigilants quant aux résultats obtenus.

EVAPM6/89 Q07-08

On donne dans le premier tableau les mesures (cotés et angles) d'un triangle ABC

Jean dessine le triangle A'B'C' en doublant les longueurs des côtés du triangle ABC.

Indique dans le deuxième tableau les mesures (côtés et angles) du triangle A'B'C'

AB	BC	AC	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
3,5cm	4 cm	6 cm	40°	106°	34°

A'B'	B'C'	A'C'	$\widehat{A'}$	$\widehat{B'}$	$\widehat{C'}$
R = 83 %			R = 22 %		

A l'inverse, la question EVAPM5/88 M11-13 montre que seulement 8 % des élèves en 6ème et 14 % en 5ème utilisent spontanément un tableau dans une situation où il serait pertinent.

EVAPM5/88 M11-13

Le négatif d'une photo est un rectangle de largeur 2,4 cm et de longueur 3,6 cm.
La photo, une fois tirée, a pour longueur 16,2 cm.

Quelle est sa largeur ? R = 58 % EVAPM6/87 AppC6 **R = 47 %**

Explique ici comment tu as fait pour trouver la réponse.

R = 55 % EVAPM6/87 AppC7 **R = 40 %**

Utilisation d'un tableau : 14 % EVAPM6/87 AppC8 : **08 %**

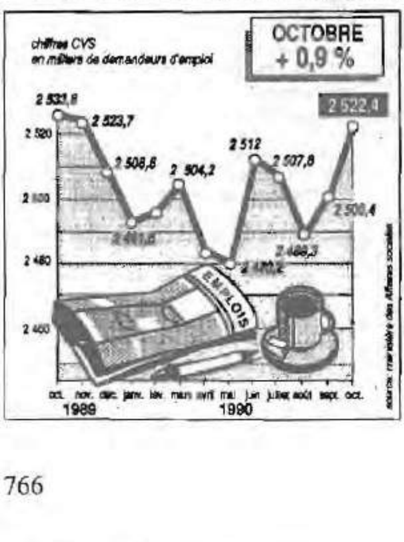
S'il est vrai que le tableau ne doit pas être l'unique support d'information et de traitement, il ne faut pas pour autant le négliger car il incite à organiser les informations et aide ainsi au traitement des problèmes.

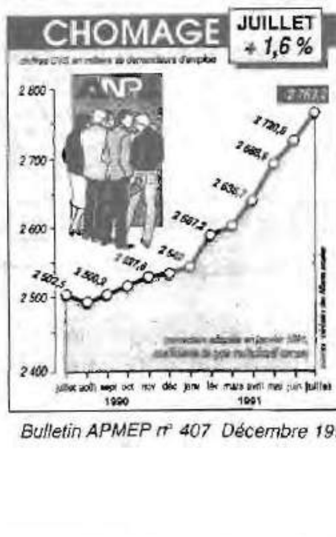
Situations à visées éducatives (mathématiques au service du citoyen).

Comme les autres domaines des mathématiques, l'étude de la proportionnalité et des représentations graphiques concourt à la formation de l'esprit. Mais, dans cette étude, les mathématiques sont de façon privilégiée au service du citoyen. Ce sont bien aux connaissances et aux capacités liées à cette partie des mathématiques que l'on fait souvent appel dans les domaines de la distribution, de l'habitat, des loisirs, de l'information... Rappelons donc ici les points particuliers des programmes qui nous paraissent importants de ce point de vue :

* Changement d'unités - conversions, en particulier le passage des heures sexagésimales aux heures décimales de plus en plus utilisées.
* Situations particulières de proportionnalité : échelles, vitesses, débits...
* Utilisation d'une approximation, par proportionnalité, dans la recherche d'un ordre de grandeur (comparaison de prix pour des quantités différentes...).
* Rôle éminent des pourcentages, par référence à 100 pour faire des comparaisons sur des effectifs différents, étant bien entendu qu'il faut rester vigilant sur l'affichage et l'interprétation hâtive de pourcentages reposant sur de trop faibles effectifs. Rappelons aussi que c'est dans le même esprit que l'«indice de base 100» est utilisé pour l'étude ou la comparaison de l'évolution de données statistiques.
* Lecture de tableaux, graphiques, diagrammes, et regard critique sur certains diagrammes figuratifs utilisant des dessins du plan ou de l'espace, leur lecture nécessitant une bonne connaissance du théorème «k, k^2, k^3» !

Considérons quelques situations caractéristiques :



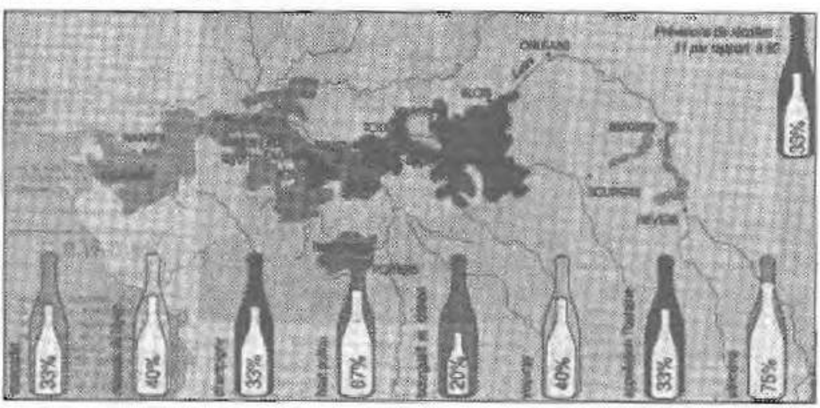


Bulletin APMEP n° 407 Décembre 1996

Par exemple, le choix de l'échelle sur les axes peut influencer l'interprétation (au niveau des impressions) surtout quand, pour des raisons d'encombrement, le graphiste tronque une partie de la graduation verticale (exemples ci-dessus).

Les diagrammes à bâtons dont on a tronqué la base (dessin ci-contre) n'assurent plus la correspondance proportionnelle entre les données numériques et la hauteur des bâtons et ont donc un effet trompeur. Souvent, en effet, la lecture de l'image, dans un premier temps, prédomine sur celle des données numériques. Les effectifs de 1991 donnent en effet l'impression d'être plus du double de ceux de 1990.

Dans le diagramme figuratif ci-après, quelles mesures de grandeurs (hauteurs, aires des dessins ou volumes des bouteilles) sont proportionnelles aux pourcentages annoncés ? Des mesures effectuées sur ce diagramme montrent que ce sont les aires qui, proportionnellement, se rapprochent le plus des pourcentages affichés.



Les projets de programmes de Cinquième et de Quatrième qui sont soumis actuellement à la concertation ont pris explicitement en compte cette composante. Dans l'introduction de la rubrique "Organisation et gestion de données, fonctions" de Cinquième, on peut lire : *«Les trois parties de cette rubrique s'éclairent et se complètent mutuellement. La contribution des mathématiques à l'éducation du citoyen y apparaît clairement. La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique»*. L'introduction de la même rubrique du programme de Quatrième confirme : *«Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé»*.

Les compétences exigibles préconisées et les commentaires correspondants de ces projets de programmes vont en effet dans ce sens.

Evolution entre les programmes de 1986 et les projets actuels.

Au moment où nous écrivons ces lignes, les projets de programmes de Cinquième et de Quatrième sont encore soumis à la consultation des enseignants. Cependant, nous appellerons "anciens programmes" ceux de 1986 et "nouveaux programmes" ceux qui entreront en vigueur en 1997.

Nous ne pouvons que nous réjouir de lire, dans la présentation du nouveau programme de mathématiques du cycle central du collège, à la suite de l'introduction des trois domaines, géométrique, numérique et gestion de données : *«Dans ces trois domaines d'étude la proportionnalité apparaît comme un fil conducteur : afin de favoriser sa maîtrise, le programme propose de nombreuses situations géométriques, numériques ou graphiques»*. Et il est vrai que la pratique de la proportionnalité est manifestement étendue et accentuée en Cinquième et en Quatrième. Les compétences exigibles sont plus nombreuses car plus précises. Les diagrammes circulaires ou semi-circulaires figurent explicitement dans les compétences exigibles de Cinquième. En ce qui concerne la liaison entre la proportionnalité et la géométrie, il faut signaler la nouvelle compétence exigible de Quatrième : *« Connaître et savoir utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés de deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes»* ; la propriété de Thalès reste cependant au programme de Troisième. Au niveau de la géométrie de l'espace, les cônes et pyramides passent de Troisième en Quatrième, mais la fabrication de patrons et en particulier *"la recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution"* qui *"peut être une activité de mise en œuvre de la proportionnalité"* figurent dans les commentaires.

L'étude en tant que telle de l'application linéaire est abandonnée en Quatrième au profit d'une pratique plus importante de "**problèmes mettant en œuvre la proportionnalité**", ce qui correspond tout à fait à nos souhaits. En plus de la vitesse déjà aux programmes, figurent les changements d'unités sur des grandeurs-quotients courantes, l'interprétation et l'utilisation d'un indice. Plus généralement, les changements d'unités sur les grandeurs composées seront au programme de Troisième. Signalons enfin que le mot "application" semble abandonné et que les commentaires insistent fortement sur la terminologie "fonction", "en fonction de". A ce propos, la compétence :*«Décrire une situation de proportionnalité par une relation de la forme y = ax, en liaison avec les tableaux de valeur»* pourrait très bien figurer dans la colonne centrale de ces programmes. L'ancienne compétence de Troisième : *« Savoir traduire par une fonction une augmentation ou une diminution exprimée en pourcentage. Par exemple, savoir qu'une augmentation de 5% fait passer de la valeur X à la valeur 1,05X»* trouverait alors naturellement sa place en Quatrième, et l'étude des fonctions linéaires et affines serait alors réservée à la Troisième, comme cela semble le cas d'après le tableau synoptique pour les programmes de collège, les fonctions linéaires étant alors considérées comme un cas particulier des fonctions affines. De ce fait, et nous le souhaitions, le mot "application" est supprimé au profit du mot "fonction" qui correspond mieux à l'objet mathématique considéré et qui est conforme à l'usage de "en fonction de" (usage constamment préconisé par les programmes dès le début du Collège) comme le montre l'exemple suivant : *«Si un commerçant augmente ses prix de 5%, on peut exprimer le nouveau prix* ***en fonction de*** *l'ancien de la manière suivante : le nouveau prix y est égal à 105 % de l'ancien prix x, et y = 1,05x».* On pourrait ainsi parler de fonction de proportionnalité ou de fonction à accroissements proportionnels.

En guise de conclusion.

La question EVAPM6/87 App B18-20 posée dans la première évaluation APMEP en Sixième mérite notre attention :

EVAPM6/87 App B18-20

En cinq minutes, une machine d'imprimerie effectue le tirage de 50 journaux.

COMPLETE les tableaux :

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
5	3	

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	5	50

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	2	500

Sans aucun doute c'est une situation complexe pour des élèves de Sixième. Signalons cependant qu'elle avait été empruntée à une évaluation fin de CM2 1981 du S.P.R.E.S.E.*. Du seul point de vue mathématique, elle fait appel à la proportionnalité directe, inverse et composée, en définitive à la proportionnalité double qu'on peut définir par la formule $y = xz$: en 1 minute, 1 machine tire 10 journaux ; donc en x minutes, z machines tirent $10xz = y$ journaux. Mais indépendamment de ce traitement mathématique, au sens conceptuel du terme, on peut très bien traiter cette situation avec son "bon sens", en prenant conscience de la réalité de la situation ; et les procédures calculatoires, du fait des capacités au traitement mental des données numériques, viennent "naturellement".

Par cet exemple, nous voulons mettre en évidence que la recherche d'une "mécanisation" précoce des traitements ou d'une application "aveugle" de procédures - et nous pensons en particulier au "produit en croix" - fait souvent obstacle à l'acquisition du concept de proportionnalité et à sa maîtrise. Aussi ne faut-il pas hésiter à inciter les élèves à revenir, dans une situation nouvelle, au sens "premier" et à les habituer à transformer une situation complexe en une situation voisine mais simple, au niveau numérique par exemple, pour mieux identifier les procédures de résolution. Il va sans dire en effet que le traitement de situations de proportionnalité requiert un minimum de compétence au niveau du calcul numérique et du calcul mental.

La maîtrise de la proportionnalité passe aussi par la diversité des cadres de traitement : les grandeurs, les mesures, le numérique, les représentations (solides, graphiques...) ; et c'est tout au long de la scolarité que les élèves doivent être amenés à traiter de telles situations.

Texte voté à l'unanimité

par le Comité de l'A.P.M.E.P. des 22 et 23 juin 1996

* Service de la Prévision et de l'Evaluation du Système Educatif, remplacé en 1987 par la D.E.P. (Direction de l'Evaluation et de la Prospective).