Décembre 1995
Supplément au Bulletin n°401

de la maternelle ...

Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle

...à l'université

ASSOCIATION
des
PROFESSEURS
de
MATHÉMATIQUES
de
L'ENSEIGNEMENT
PUBLIC

SOMMAIRE

Supplément au n° 401 : Décembre 1995

Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le 2^d cycle

Au début des années 80, un groupe de l'A.P.M.E.P. avait proposé *"Dix problématiques pour un renouvellement de l'enseignement des Mathématiques au Collège"* (supplément n°1 au *Bulletin* n°345, Octobre 1985). Les programmes actuels du collège se sont largement inspirés de ce texte en suggérant une nouvelle approche des concepts, en introduisant davantage de cohérence entre les contenus et les méthodes, en clarifiant les objectifs et en donnant plus de sens aux notions étudiées. Les pratiques pédagogiques ont évolué, les échecs ont diminué, enfin l'image des mathématiques a été revalorisée.

Le travail méritait d'être poursuivi pour le lycée. Malgré la complexité et les difficultés, ceux qui s'en sont chargés ont réussi à identifier les grandes classes de problèmes fondamentaux, tout en mettant en évidence la cohérence de la formation tout au long de la scolarité puisque **les dix problématiques sont les mêmes au collège et au lycée**. Le texte est désormais soumis à votre jugement. Les auteurs attendent vos remarques, critiques et suggestions. Le travail à venir va consister à illustrer les textes généraux présents par des situations exploitables à différents niveaux du lycée.

Qu'il me soit permis ici de les remercier pour le temps, les efforts et le talent qu'ils ont accepté de consacrer à cette lourde tâche. Souhaitons maintenant que ce document contribue à son tour, efficacement, à l'évolution de l'enseignement des mathématiques, à une meilleure formation de nos lycéens et à rendre encore plus attrayante cette discipline qui ne laisse jamais personne indifférent.

Jean-Paul BARDOULAT

APMEP - Groupe Problématiques

UNE APPROCHE DES CONTENUS D'ENSEIGNEMENT PAR DES PROBLÉMATIQUES POUR LE SECOND CYCLE

GÉNÉRALITES

1- Etat des lieux

Il nous faut avouer que l'image publique des mathématiques que nous renvoient en écho, à l'heure actuelle, les mass-médias n'est à la mesure ni de la qualité des recherches fondamentales, ni de celle des recherches en didactique en France, qualités pourtant reconnues à l'étranger. Cette représentation négative[1] tient beaucoup à l'importance, plus fantasmatique que réelle, prise par les mathématiques en matière de sélection et de rôle moteur omniprésent dans les recherches scientifiques. Des reproches, relayés par les politiques, dénoncent également l'excessive extériorité des mathématiques par rapport à la vie quotidienne et professionnelle.

D'un autre côté, chacun, qu'il soit maître ou élève, s'accorde à reconnaître que l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, sans les péjorer, sont encore, à l'heure actuelle, sources de résistances, voire d'obstacles, peut-être à l'origine eux-mêmes des critiques les plus sévères portées à la discipline, résistances et obstacles qu'il est de plus en plus difficile de maîtriser et de dépasser. L'ouverture des portes de la sixième à tous les élèves qui sortent de l'enseignement du premier degré, le passage quasi-automatique des élèves de l'enseignement secondaire en classe supérieure (à l'exception d'une bifurcation par décision ou par choix négatifs à la sortie de la classe de troisième), conduisent, sans émettre de jugement à ce sujet, à des cohortes d'élèves dont les aspirations, les capacités et les compétences sont diverses et hétérogènes. Cette hétérogénéité se développe en spirale au fil du cursus des élèves. Quand elle parvient à s'exprimer, elle se traduit par des questions sur la signification des mathématiques, leur rôle dans l'ensemble curriculaire, c'est-à-dire par rapport aux autres disciplines, et à leurs fonctions dans une société et relativement à une culture de la fin du 20ème siècle. La volonté, bien légitime, de donner leur chance à tous dans leur cursus scolaire, en particulier au baccalauréat, limite les niveaux d'exigence en faveur d'examens stéréotypés où l'algorithmisation des savoirs est plus un gage de succès que ne l'est la compréhension vive, profonde, critique et transverse des connaissances enseignées.

[1] Une enquête de 1994, effectuée par la Direction de l'Evaluation et de la Prospective montre cependant que les mathématiques représentent la matière enseignée à laquelle les personnes interrogées font le plus confiance.

Bien qu'il soit hors de propos de penser pouvoir agir sur les choix politiques à la source de certains des problèmes énoncés, il ne paraît pas illégitime de se poser la question sur la façon dont les programmes de mathématiques sont construits, commentés, traduits et opérationalisés. Mais ceci est évidemment transposable dans d'autres disciplines. Une approche traditionnelle, essentiellement centrée sur les contenus, peut satisfaire l'enseignant mathématicien qui est alors capable d'identifier les objets mathématiques en référence à sa formation universitaire, à sa culture et son expérience des transpositions qui en sont faites dans les manuels, en un mot en référence à la personnalisation de ses savoirs. La linéarisation de leur écriture traduit et l'idéologie et l'utopie d'une discipline autonome et unitaire, ainsi que le mythe d'une théorie de l'apprentissage comme processus cumulatif. La cohérence des programmes puise sa légitimité dans l'organisation rationnelle des contenus, plus en tant qu'objet qu'en tant qu'outil, organisation conduite selon des critères épistémologiques du mathématicien et non de ses "apprentis". Ce ne sont pas, alors, les commentaires visant à expliciter cette légitimité, qui suffiront à conférer à ces programmes la signification qui leur manque. Ce ne sont pas non plus les "modes d'emploi", les conseils méthodologiques artificiellement adjoints, comme ceux dont nous gratifient les "donneurs de leçons", qui y parviendront. Ce ne sont pas les exhortations à comprendre les mathématiques, les adjurations à reconnaître leur fonction première dans le développement de l'esprit scientifique, leur nécessité incontournable à l'octroi d'une certaine scientificité aux autres disciplines, qui permettront de donner aux contenus enseignés la puissance qui les rend opératoires. Ce ne sont pas ces gesticulations qui feront de l'activité mathématique autre chose qu'une agitation verbale d'un discours dans et sur les mathématiques. Les difficultés, voire les échecs, dans le cadre et la contrainte d'une pédagogie de masse, nécessitent donc une approche différente.

Il faut toutefois reconnaître que les programmes actuels de mathématiques dans le premier cycle sont parvenus, pour l'essentiel, à prendre en compte les critiques ci-dessus et à diminuer très sensiblement les échecs de leur enseignement. A l'exception de certains nostalgiques d'une présentation linéaire d'un programme et d'un entraînement à des connaissances algorithmisées, chacun semble tirer profit de l'approche nouvelle que ces programmes proposent. La plupart des enseignants du second cycle, en dépit de la tendance naturelle à imputer aux classes précédentes les maux ressentis à leur propre niveau, admettent un progrès indéniable dans l'attitude et le comportement intellectuel des élèves qui rentrent en seconde.

Quelles sont les origines de ce progrès ? Il semble, et la réflexion déjà menée depuis 1982 au sein d'un groupe de travail de l'A.P.M.E.P. sur les problématiques n'y est peut-être pas étrangère[2], il semble donc qu'une nouvelle cohérence ait été introduite dans l'énoncé des programmes[3], cohérence qui prendrait en compte, non seulement les contenus et les méthodes, mais aussi :

* les **objectifs spécifiques** des mathématiques pour des élèves de 11 à 15 ans, objectifs induits par les attentes et les besoins pluridisciplinaires, professionnels, quotidiens, se conciliant avec les finalités culturelles de l'école[4] (contribuer à la formation triple : l'homme, le citoyen, le travailleur) ;
* le **sens** que ces besoins et ces attentes entretiennent entre eux relativement aux notions enseignées, aux démarches, aux conduites développées, sens que les élèves sont susceptibles de leur attribuer ;
* la **fonction épistémologique** des notions et des démarches que celles-ci doivent assurer, en particulier dans le développement de "l'esprit scientifique" et la fourniture de modèles ;
* des **activités** à travers des **situations** qui favorisent la mise en cohérence de l'ensemble dans des contextes variés.

2- La question du sens

L'énonciation et l'étude des **objectifs spécifiques** à travers de nombreux exemples ont déjà fait l'objet d'une tâche à laquelle l'A.P.M.E.P. a apporté sa contribution (cf. notes 2 et 4).

Le **sens** se nourrit à différentes sources :

* *l'histoire personnelle* des élèves ou de la classe, donc dans les relations que ceux-ci ont avec le savoir, relations qui passent par leur vécu dans le quotidien et par les situations présentées en classe ;
* *l'environnement scientifique, social et culturel* des élèves ;
* *les relations interconceptuelles et pluridisciplinaires*, relations évidemment plus objectivables que les précédentes.

Selon le paradigme d'une théorie constructiviste de l'apprentissage, dans laquelle nous nous plaçons, le sens n'est alimenté et activé qu'à la faveur de *questions* que se posent ou peuvent se poser les élèves à partir de problèmes reconnus authentiques par eux, ni évidents, ni trop complexes. Il est optimisé en fonction de l'enjeu introduit par ces questions, et par les réponses qui ont

2 cf. "*Mathématiques au Collège. Pour un renouvellement*", Edition spéciale du supplément n° 1 au *Bulletin* national A.P.M.E.P. n° 345, Janvier 1985.

3 Nous formulons le vœu que les prochains programmes présentent les mêmes caractères positifs.

4 "*Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège*". Publication A.P.M.E.P., Janvier 1985.

pu être proposées a priori. Il est le moteur d'une authentique avancée didactique, et, par conséquent, de la construction et de l'appropriation (en son sens étymologique) des savoirs. L'histoire nous livre d'ailleurs que ce n'est que dans ces conditions que la connaissance scientifique a pu se développer.

3- Une réponse didactique : la problématisation des savoirs

On perçoit bien la **fonction épistémologique** du renversement didactique qu'il faut opérer : s'il parvient à lui donner un sens qui la problématise, répétons-le, la connaissance de l'élève s'accroîtra plus par les réponses aux questions qu'il fera siennes (G. Brousseau parlerait ici de "dévolution du problème") que par celles qui lui restent artificielles et étrangères. Certes, il ne faut pas se bercer de l'illusion que ce renversement serait didactiquement aisé, voire possible relativement à tous les concepts qu'il est nécessaire de construire en sept années de secondaire. Mais la recherche obstinée de situations didactiques le favorisant devrait être payée d'un changement d'attitude transférable dans un champ assez large pour qu'il y demeure efficace.

A. C. Clairaut (1713-1765) nous propose dans "*Elémens de géométrie*" (1753) ce que E. Barbin appelle une "*géométrie problématisée*", c'est-à-dire, dit-elle, "*une géométrie où les savoirs ont un sens parce qu'ils sont des instruments pour résoudre des problèmes*". En ce sens, poursuit-elle, "*contrairement à Euclide qui donne au début de chacun de ses livres des Eléments une longue liste des définitions, Clairaut n'introduit les concepts qu'au fur et à mesure, au moment où les concepts deviennent nécessaires à la résolution d'un problème. De même l'impératif qui dicte l'ordre d'introduction des propositions est l'ordre déductif chez Euclide, alors que chez Clairaut il se situe dans la problématique choisie, c'est-à-dire la mesure des terrains (...). Les concepts et les savoirs sont construits comme réponses à des questions : ce sont des instruments pour résoudre des problèmes.(...). Pour Clairaut, le savoir implique le processus par lequel on sait.*" [5]

C'est donc, dans un champ de contraintes et de nécessités, que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et intégrable. Citons quelques exemples :

* la résolution d'une inéquation, voire d'un système d'inéquations, prend son sens et sa fonction dans le cadre de la recherche de valeurs conduisant à l'optimisation d'une relation entre différentes variables numériques ;
* des limites d'incertitude sur des valeurs d'une grandeur à partir de la

---

5 cf."*Sur la conception des savoirs géométriques dans les Elémens de géométrie*" E. BARBIN, Edition bilingue rapport ERASMUS ICP-93 coordonnée par A.GAGATSIS, Université de Thessalonique. Article cité par A. GAGATSIS dans "*Histoire de la géométrie en Grèce. L'influence des géomètres français de 1830 à 1884*" Repères n°17, octobre 1994.

donnée de l'incertitude sur une autre (ou plusieurs) qui la détermine (nt) permettent de donner du sens à la continuité ;

* l'observation de régularités dans des situations aléatoires (tiercé, loto, ...) conduit à la notion de probabilité ;

* l'identification de caractères discriminants dans un ensemble d'objets (exemple : des figures ou des transformations géométriques) ou dans un ensemble d'individus prend surtout son sens dans la nécessité d'une organisation structurée, d'une création d'un support de mémoire (mental, écrit, informatique) et impliquant un problème de classification ;

* l'étude des coniques prend plus de sens à travers un problème de recherche de trajectoires de points astreints à garder un rapport constant de leurs distances à une droite et un point donnés ;

* dernier exemple puisé chez Clairaut : celui-ci n'introduit dans ses "*Elémens de géométrie*" le concept d'angle que, correspondant à un besoin, lorsque la mesure des côtés de triangles sur un terrain n'est pas possible. De même, pour trouver la position d'un point, il dira : "*On peut le trouver en tâtonnant ; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici...*".

Ainsi, le renversement didactique évoqué plus haut affecte l'économie de l'élève. Grâce au sens qu'elles prennent par la nécessité, le coût, ni trop élevé, ni dérisoire, des opérations cognitives engagées par l'élève dans la résolution de problème ou, ce qui est équivalent pour construire une connaissance, se rembourse sur la consistance de celle-ci et sa durabilité, sur son efficacité dans des situations voisines ou sa transférabilité dans d'autres disciplines.

4- Vers le développement de l'esprit scientifique

Si le savoir implique le processus par lequel on sait, comme le dit Clairaut, quelles composantes didactiques doivent constituer les situations-problèmes dont nous devrions jalonner le temps d'enseignement ? Sans que ces composantes soient toujours nécessaires dans leur ensemble, voici celles qui nous paraissent constituer le plus souvent un processus d'apprentissage conduisant à une acquisition et compatible avec notre volonté de développer ce qui est communément appelé "démarche scientifique" :

* **partir du questionnement d'une situation**, mais en inscrivant son sens avec une perspective théorique, conjecturer une réponse (éventuellement faire un pari), la formuler sous forme d'hypothèse avec les outils cognitifs à notre disposition au moment présent ;

* **modéliser**, et donc suspendre provisoirement le seul sens personnel en faveur d'une formalisation admise par le groupe-classe;

* traiter la situation formelle, éventuellement changer de cadre de résolution, de registres d'expression et mettre en place de nouveaux outils ;
* interpréter les réponses et résultats obtenus, et, donc, restituer du sens ; éventuellement, réfuter une hypothèse, revenir sur la modélisation et la formalisation choisies ;
* participer à leur institutionnalisation, une objectivation qui est une phase de mise en accord intersubjectif, c'est-à-dire entre les sujets du groupe-classe ;
* expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial.

5- Des propositions

L'approche par les "problématiques" va donc consister à identifier les grandes classes de situations-problèmes susceptibles de conduire à la génération des contenus plus ou moins traditionnels. Il s'agit d'un ensemble ordonné ni par le temps, ni par des classes de contenus disjointes, organisées selon une logique "bourbakiste" *a posteriori*. Il s'agit, à travers le mot "problématique" de faire référence à deux investigations principales qu'il faut mener, expliciter et coordonner :

* des classes de problèmes que les contenus mathématiques acquis ou à construire permettraient de résoudre ;
* des classes de situations qui peuvent naturellement poser question aux élèves, situations d'origine mathématique ou non (extra-disciplinaire, sociale, quotidienne, ...).

Nous en avons entrepris l'identification. Celle-ci nécessite d'être conduite dans le cadre d'objectifs généraux de l'enseignement et d'objectifs spécifiques des mathématiques, à la faveur de conditions remplies par la situation. Ces dernières doivent lui donner suffisamment de sens pour que l'engagement de l'élève soit réel et déterminant dans sa participation à une nouvelle acquisition, voire un nouvel équilibre cognitif ou un progrès cognitif consistant.

Au cours d'une même séquence en classe, une ou plusieurs problématiques peuvent être en jeu. Cependant, leur inventaire souligne que toute formation, générale ou technique, de notre temps, doit les prendre en compte dans les cursus scolaires. A chacune d'entre elles, nous devons faire correspondre des objectifs, des démarches, des contenus, des situations, des évaluations calibrées en fonction des niveaux scolaires impliqués.

Voici les dix problématiques que nous avons retenues comme constitutives d'un nouveau regard sur les programmes du second cycle et que nous illustrerons par des situations significatives.

Dix "problématiques" pour l'enseignement des mathématiques

1- Repérage.
2- Etude de certaines configurations planes ou spatiales. Représentations et mesures associées.
3- Etude de certaines transformations applicables à des configurations. Examen de leurs invariants, anticipation de leurs effets.
4- Modélisation d'une situation et résolution de problèmes avec recherche de solutions vérifiant certaines conditions.
5- Techniques algorithmiques.
6- Changements de registres et de cadres.
7- Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.
8- Traitement et représentation de données statistiques.
9- Choix opportun et optimal des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes.
10- Conjectures et preuves.

PROBLÉMATIQUE N° 1

REPÉRAGE

Dans la langue commune, "repérer" c'est "placer par rapport à..." et donc fournir les éléments décrivant de façon non équivoque une certaine position. En mathématiques, à la notion, voire au champ de notions, "repérage" sont associées couramment des activités mathématiques et plus ou moins quotidiennes s'exprimant par les verbes :

localiser, situer, décrire, représenter, etc.

Les objectifs spécifiques d'une activité mathématique faisant référence à cette problématique se condensent selon quatre axes principaux :

* *rendre objectives des positions* dans un but d'accord intersubjectif (vers la reconnaissance d'un certain repère commun, non ambigu, consensuel) ;
* *relativiser des positions et les moyens* de les repérer, visant à placer selon un certain "point de vue" ou à changer opportunément de "point de vue" pour des raisons d'efficacité ou d'optimalité ; savoir ainsi distinguer repère absolu et repère relatif ;
* *rechercher les propriétés invariantes d'une situation mathématique particulière*, c'est-à-dire celles qui, intrinsèques, sont indépendantes du repère ;
* *décrire le statique et surtout le dynamique* (instantanéité du repère) afin de pouvoir prévoir et anticiper.

Les démarches développées, à travers les situations-problèmes introductives et applicatives, accorderont aux concepts visés un statut d'*outil*, respectivement en amont puis en aval de leur étude didactique, conduite elle-même en tant que visant des *objets* de savoirs. Ceux-ci en tant que tels seront institutionnalisés (c'est-à-dire décontextualisés et décrétés comme faisant partie du patrimoine culturel de la classe). Les principales démarches sont donc les suivantes :

* *définir* un ou des *systèmes de référence* et des *modes de représentation* dans ces systèmes ; les modes retenus devront avoir une vertu de généralité pour être utiles dans de multiples situations, et d'efficience pour mériter leur apprentissage ;
* *paramétrer les objets* (points, figures, trajectoires,...) ; démarche qui permet de passer alternativement du géométrique à l'algébrique ou au topologique ;

* *numériser* pour décrire et anticiper en optimisant le mode et la complexité de calcul, la numérisation apparaissant comme une contrainte liée au problème donné où le repérage qualitatif ne suffit plus ;
* *dégager les propriétés invariantes* dans un changement de repère ;
* *lier de façon duale* des variétés du plan et de l'espace (droites et points, par exemple).

Les situations-problèmes devront, souvent, partir du réel ou de situations extra-mathématiques et y revenir, afin de convaincre des nécessités d'appel aux concepts mathématiques et de l'efficacité de leur fonctionnement. Elles devront faire une large place à la représentation graphique et, dans ce registre, conduire à des conflits socio-cognitifs.

PROBLÉMATIQUE N° 2

ÉTUDE DE CERTAINES CONFIGURATIONS PLANES OU SPATIALES. REPRÉSENTATIONS ET MESURES ASSOCIÉES

Aux activités relatives à cette problématique sont associés des contenus de natures très variées. Les activités sont repérées par des verbes d'action à référence mathématique comme :

représenter, justifier, conjecturer, calculer.

La signification des activités sur les configurations (assemblage organisé, structuré d'objets mathématiques élémentaires) est donc de plusieurs ordres et correspond à plusieurs ***objectifs spécifiques*** :

* connaissances (incontournables) d'objets socio-culturels de base,
* fonctionnement dialectique du raisonnement déductif et du contrôle perceptif, par une anticipation fiable et efficace,
* apprentissage d'outils de représentation et de description de morphologies géométriques.

Dans la recherche scientifique actuelle, les **méthodes géométriques** interviennent avantageusement tant en algèbre que, par exemple, en analyse, en statistique, en biologie, en économie, en physique théorique, en chimie. En même temps, dans les enseignements secondaire et supérieur, l'usage du **cadre graphique** se limite surtout à une fonction de représentation et de lieu d'apprentissage, puis d'évaluation de techniques et d'algorithmes. S'il sert quelquefois d'appui heuristique et intuitif à la découverte puis à la preuve, il n'intervient que très rarement pour contrôler l'existence de propriétés ou pour justifier des conjectures sous prétexte d'illégitimité. Ceci contribue à maintenir mutuellement étanches les cadres géométrique et algébrique.

Cependant, en particulier dans le fonctionnement professionnel du mathématicien, **le registre graphique a un pouvoir capable d'expliquer et de convaincre, comparable à celui de la démonstration canonique.** Ceci pourrait être bien souvent vrai dans notre pratique enseignante. C'est pour cela qu'à travers cette problématique, nous essayons de relier différents cadres et registres (cf. également problématique n°6) en insistant sur le passage légitime et fructueux du niveau de la prévision à celui de la justification.

Mais, en outre, l'usage de plus en plus répandu des calculatrices avec ou sans écran (cf. problématique n°7) rend dérisoires et obsolètes certaines preuves ainsi que la multiplication des calculs et tracés à la main. Certes, il ne s'agit pas de les éliminer de l'enseignement sinon le sens des objets manipulés et des résultats disparaîtrait. Par contre, **l'intégration de la puissance des outils informatiques** dans l'activité mathématique devrait libérer du temps, favoriser de nouvelles démarches, particulièrement des changements de cadre salutaires à une compréhension approfondie et plus personnalisée, et le passage entre les deux niveaux prévision-justification.

Pour toutes ces raisons, nous envisageons cette problématique relative à l'étude des configurations, comme classe de problèmes où se mêleront, intimement, le géométrique, le graphique et l'algébrique et où l' informatique interviendra transversalement pour substituer à des activités algorithmiques traditionnelles des activités favorisant la conjecture et des formes nouvelles de validation.

PROBLÉMATIQUE N° 3

ÉTUDE DE CERTAINES TRANSFORMATIONS APPLICABLES A DES CONFIGURATIONS. EXAMEN DE LEURS INVARIANTS, ANTICIPATION DE LEURS EFFETS

D'emblée, précisons que, par transformation, nous entendons toute application de l'espace réel ou d'une partie de cet espace dans lui-même, application bijective ou non, sur des objets signifiés par des figures, des relations algébriques, le tout relativement à un cadre géométrique.

L'enseignement dans le premier cycle met l'accent (doit mettre) sur la fonction outil des transformations géométriques, par rapport aux objectifs suivants :

* examen de leur effet sur des configurations simples (droites, segments, cercles, polygones, etc.),
* anticipation perceptive de leurs effets (où devrait se trouver l'image, quelle devrait être sa forme, son sens, quels éléments devraient coïncider avec leur image? ...),
* considération "dynamique" de concepts inertes (médiatrice, bissectrice → symétrie orthogonale, angle → rotation, vecteur → translation, proportionnalité → homothétie, milieu, moyenne → symétrie centrale, ...).

En prolongement de ces objectifs, qu'il s'agit de continuer à viser et renforcer en second cycle, nous dégageons deux fonctions de nature différente, à pondérer d'une filière à l'autre en importance et en nature :

* ***une fonction dite objet*** où, cette fois, les transformations sont étudiées en tant que telles à travers leurs propriétés et, en particulier, leurs invariants ponctuels ou figuraux. Des classifications variées peuvent prêter à une synthèse au moyen de critères différents (invariants, représentations analytiques, ...) et par examen rapide de transformations qui ne font pas l'objet d'enseignement approfondi. Mais, ces dernières (par exemple, affinité orthogonale, inversion,...) par leurs propriétés particulières, différentes des autres donneront un sens à des propriétés jugées triviales par les élèves (conservation de la forme, par exemple). Nous sommes conscients que la composition des tranformations nécessite, pour la pensée, de s'élever à un niveau immédiatement supérieur à celui des objets géométriques ou numériques habituels. Son

étude sera donc progressive et toujours illustrée par son fonctionnnement direct et inverse (décomposition) sur des configurations simples. La recherche de classifications sur l'ensemble des transformations prendra un nouveau sens par la constatation de la stabilité interne de classes de tranformations. L'anticipation, sans cesser de faire appel à la perception, deviendra de plus en plus une action rationnelle de la pensée ;

* ***une fonction outil*** où, au delà de leur rôle culturel et conceptuel, évoqué ci-dessus, les transformations apparaissent et, peu à peu, fonctionnent comme de véritables outils de pensée déductive. C'est la prise de conscience progressive de leur puissance et leur efficacité qui doit faire accepter aux élèves un surcoût par rapport aux moyens jusqu'alors efficaces (auxquels ces nouveaux outils se substituent), mais de plus en plus laborieux en temps et en longueur discursive. Ce n'est que si l'élève perçoit pour lui-même cet aspect économique et souvent élégant, qu'il s'engagera dans un investissement qui donne tout son sens opératoire aux transformations. Le problème didactique consistera à trouver les bonnes situations où le passage par les transformations est incontournable, mais ni artificiel, ni décourageant.

Enfin, cette problématique présentera, en outre, un ensemble de situations et de tâches où les **changements de registres**, en particulier numérique ↔ graphique ↔ figural, prouvent également leur efficacité sur les objets géométriques, grâce à la plasticité des représentations induites par leurs définitions, comme de leurs propriétés : la recherche d'une conjecture, l'exposé d'une preuve peuvent tirer un grand bénéfice du traitement d'un problème dans un certain registre qui favorise et renforce ces représentations.

PROBLÉMATIQUE 4

MODÉLISATION D'UNE SITUATION ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AVEC RECHERCHE DE SOLUTIONS VÉRIFIANT CERTAINES CONDITIONS

Les problèmes extérieurs au champ des mathématiques (vie réelle, situations extra-disciplinaires) cherchent des solutions à l'aide de méthodes, de modèles et de concepts mathématiques. Les résultats attendus peuvent être de nature variée, par exemple :

* une propriété qualitative (par ex. relation entre deux phénomènes à la suite d'un raisonnement),
* une expression quantitative (par ex. une valeur, un ensemble de valeurs, une relation fonctionnelle, ...),
* une représentation (par ex. un graphique),
* mais aussi un modèle, c'est-à-dire un ensemble général, abstrait et structuré.

Les résultats peuvent avoir pour fonctions, par exemple, de :

* décrire,
* modéliser,
* anticiper, prévoir,
* calculer, préciser,
* décider (rejet d'une hypothèse par ex.).

L'obtention de ces résultats nécessite un travail important **de transformations du problème posé**, engageant bien souvent dans la réalité, la coopération du mathématicien et du spécialiste de la discipline où le problème prend son origine. En effet, les transformations et les réductions peuvent porter simultanément sur :

* le nombre et la nature des données fournies,
* les grandeurs et les concepts en jeu, l'univocité de leur représentation,
* le nombre et la nature des relations entre eux, les contraintes qui agissent sur elles,
* le codage mathématique ou non,
* la précision attendue du résultat.

Toutes ces tâches conduisent à des activités dans la classe à la charge (éclairée éventuellement) de l'élève qui, à travers elles, prend conscience des difficultés levées par le réel, avec ses ambiguïtés, sa résistance à la modélisation mutilante, ses données et ses faits superflus, négligeables, redondants ou insuffisants, ... Il doit apprendre **à questionnner ce réel**, à **critiquer un résultat** eu égard aux contraintes, aux indéterminations ou aux surdéterminations que lui impose le réel. Il apprend également ainsi à **ajuster ses compétences mathématiques** à des problèmes extradisciplinaires, constatant (avec humilité le plus souvent) les limites relatives des réponses qu'il peut apporter dans l'état présent. Autant de sources motivantes en vue de l'introduction ultérieure, plus ou moins rapprochée, de notions, de procédures et de méthodes nouvelles. Autant de lieux variés où les concepts théoriques peuvent prendre leur sens et où les mathématiques révèlent leur caractère d'outil.

Toutes ces démarches alimentent également une **formation à l'esprit scientifique**, celui-ci se caractérisant par le développement d'un processus séquentiel constitué de conjectures, choix opportun et peut-être provisoire d'un modèle, traitement dans ce modèle, interprétation avec confrontation avec les hypothèses et anticipation dans le cas d'une bonne adéquation modèle-réalité.

Les situations qui peuvent être proposées dans le cadre de cette problématique sont à prélever , certes, dans les disciplines scientifiques plus ou moins enseignées au lycée (physique, biologie, économie, astronomie,...) mais également dans les disciplines à composantes sociale, humaine ou artistique. Si une certaine schématisation, par le professeur, de la situation s'impose quelquefois, elle doit rester suffisamment brute pour donner un sens à la traduction mathématique et aux opérations plus ou moins formelles qui s'appliquent sur elle. De plus, ce caractère brut doit conduire à la mobilisation de champs de concepts nécessitant une synthèse des connaissances et une mise à distance des contextes dans lesquels ils ont été enseignés.

PROBLÉMATIQUE N°5

TECHNIQUES ALGORITHMIQUES

S'il est une problématique qu'il ne convient pas d'aborder en termes de contenus, il s'agit bien de celle-ci ; sinon la quasi-totalité du programme de lycée risque de s'y trouver énoncée.

Algorithme : ensemble de règles opératoires dont l'application permet de **résoudre un problème** en un nombre fini d'opérations. La caractéristique d'un algorithme est de transformer des quantités, dites grandeurs d'entrée, en d'autres quantités, dites grandeurs de sortie, à partir d'un ensemble bien défini d'instructions de transformation.

Quel est le problème qui se pose à l'élève, dès son entrée au lycée ?

Ce n'est pas tant d'essayer de "fréquenter le monde des mathématiques" que d'**engranger des savoirs** qu'il lui faudra "replacer", à bon escient si possible, le jour du baccalauréat ! Ce qui l'intéresse le plus souvent, ce sont les grandeurs de sortie et les sanctions en vrai-faux associées !

Le problème qui se pose alors à l'enseignant est celui du "bon escient" de la phrase ci-dessus. Pour améliorer la qualité de la sortie, l'option sur laquelle nous nous fondons est d'améliorer chez l'élève la **qualité de la perception du problème posé**, des entrées, des opérations à effectuer et de la vraisemblance de cette sortie.

Il s'agit alors de présenter les notions et propriétés mathématiques **non comme des objets exposés** derrière une vitrine, celle d'une **culture mathématique figée** et définitivement acquise à laquelle il convient d'adhérer, mais comme des **outils agissants** et permettant de résoudre tel ou tel type de problème en fonction du niveau scolaire où l'on travaille, contribuant ainsi à l'émergence d'une **culture mathématique**, et plus généralement scientifique, **vivante et en construction**.

Ne nions pas que l'**algorithme libère**, rend disponibles des segments de la pensée opératoire, mais, simultanément, risque d'emporter celui qui s'y réfugie et l'utilise **dans une spirale où se perd le sens** de la situation initiale. Aussi, conformément à ce qui est avancé ci-dessus, convient-il d'amener les élèves à le **maîtriser** au cours de son utilisation.

* Quel outil faut-il mobiliser dans **cette** situation ?
* Quelles sont les **conditions** de son utilisation ?

* Ce qu'il me permet d'obtenir a-t-il un **sens dans le contexte proposé** (test de vraisemblance, d'ordre de grandeur...) ?

"Algorithmisés" qu'ils sont, de nombreux élèves de terminale connaissent la formule donnant l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point x_0 où elle est dérivable.

Mais que se passe-t-il lorsqu'il s'agit de tracer la tangente en *(0 , 0)* de la représentation graphique de la courbe définie par :

$$f : [0 \,; +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \begin{cases} f(x) = x\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Nous sommes devant un défi : faire en sorte que, devant un problème à résoudre , les élèves cherchent d'abord le sens des questions posées, puis se rassurent par l'utilisation d'un algorithme, et non l'inverse, ce qu'ils ont naturellement tendance à faire, encouragés la plupart du temps par la forme même des situations proposées. La principale difficulté didactique réside donc dans la recherche d'un compromis entre l'apprentissage, la maîtrise et le contrôle des techniques.

PROBLÉMATIQUE N° 6

CHANGEMENTS DE REGISTRES ET DE CADRES

La résolution d'un problème nécessite fréquemment un - ou des - changements de cadres. Par ce terme nous entendons, non seulement un domaine des mathématiques et les concepts qui lui sont associés, mais également les relations entre ces objets, ainsi que les formulations correspondantes : vocabulaire et syntaxe spécifiques à ce domaine. C'est ainsi, par exemple, que la résolution d'un même exercice relatif aux nombres complexes pourra faire intervenir, selon la stratégie de résolution envisagée :

- le cadre *algébrique* (en se plaçant dans **C**)
- le cadre *vectoriel* (en se plaçant dans le plan vectoriel complexe)
- le cadre de la *géométrie plane* (en se plaçant dans le plan affine complexe).

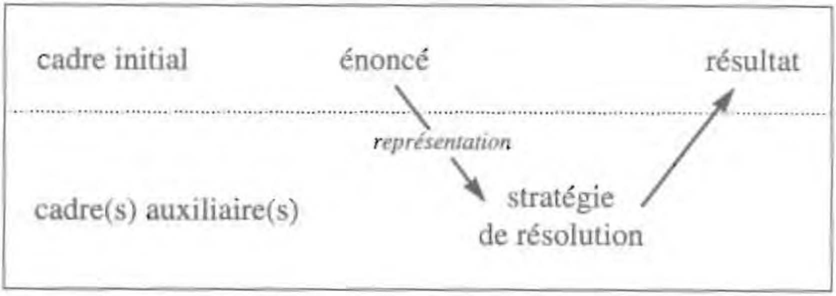
Les changements de cadres peuvent être :

- **objectifs** : lorsqu'ils sont nécessaires, ou imposés par l'énoncé (par exemple, si l'énoncé demande le lieu géométrique des points du plan complexe dont l'affixe vérifie une relation donnée, on sera nécessairement amenéà effectuer des changements de cadres entre l'algébrique et le géométrique)

- **subjectifs** : le passage dans un autre cadre peut rendre - pour celui qui cherche - le problème plus aisé à résoudre, car il lui permet de se ramener à un domaine dans lequel il se sentira plus à l'aise, parce que ses connaissances y sont plus familières et/ou plus facilement exploitables (par exemple, dans la résolution d'un problème de géométrie dans l'espace, travailler dans un plan particulier (section) permet de réinvestir les connaissances de géométrie plane).

Ce second aspect présente un avantage du point de vue didactique : les connaissances visées par l'enseignant (qui se situent dans le cadre initial) vont pouvoir progresser en s'appuyant sur les connaissances de l'élève dans un - ou des - cadres plus familiers, le(s) changement(s) de cadres étant alors piloté(s) par le maître.

Cette démarche peut être schématisée par la figure suivante :



D'autre part, à l'intérieur d'un même cadre, les formulations relèvent de plusieurs **registres**, ayant leurs propres règles de fonctionnement ; on peut identifier en particulier, dans le discours mathématique :

- le registre de la *langue naturelle*
- le registre de la *langue mathématique*
- le registre du *langage symbolique*
- le registre *graphique*....

et leur adaptation au milieu scolaire.

Prenons l'exemple de la résolution d'un exercice de probabilités : l'énoncé peut consister en la description d'une situation en langue naturelle (lancer de dés, tirage de cartes dans un jeu...), la consigne être formulée dans la langue mathématique (quelle est la probabilité de tel événement ?), et la résolution utiliser le registre graphique (arbre probabiliste, diagramme de Carroll...) et le langage symbolique (formule de la probabilité conditionnelle...)

On retrouve souvent les mêmes registres dans les différents cadres, ce qui fait que registres et cadres apparaissent comme plus ou moins transversaux les uns aux autres: il existe un registre symbolique en analyse comme en algèbre ou en probabilités, et celles-ci, on vient de le voir, font usage des registres graphique, symbolique, etc.

Grâce aux aller-retour qu'ils permettent, l'intérêt des changements de registre est comparable à celui des changements de cadre en ce qui concerne **l'accès aux concepts mathématiques** ; c'est ainsi que le recours à une représentation graphique peut faciliter le passage à l'écriture symbolique de l'encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles ou des trapèzes, et au-delà à l'idée de la convergence vers cette intégrale.

L'intervention de plusieurs cadres et/ou registres dans la résolution d'un problème peut également permettre un contrôle de la stratégie utilisée (par exemple, une vérification numérique ou une représentation graphique peuvent contrôler la résolution d'un système d'équations); elle peut aussi permettre d'**anticiper** ou de **conjecturer** (c'est le cas des outils graphiques en particulier).

Le passage d'un cadre (resp. registre) à un autre nécessite corrélativement une **reformulation** de l'énoncé, étape essentielle mais qui ne va pas toujours sans une distorsion plus ou moins importante: les concepts ne se correspondent pas toujours de façon "naturelle", et il en est de même pour les langages associés (il n'y a pas "congruence" parfaite). C'est ainsi que des outils graphiques différents, bien qu'usuellement associés à un même concept mathématique, ne seront pas nécessairement interchangeables, et n'auront pas la même efficacité dans la résolution de tel ou tel type de problème (pour la probabilité conditionnelle, par exemple: séquentialité de l'arborescence *vs* non séquentialité du diagramme de Carroll). Il importe donc que l'enseignant soit conscient de l'intérêt des changements de cadres et de registres et puisse les piloter à bon escient, mais aussi qu'il en connaisse les limitations éventuelles. Toutefois, si les changements de cadre et de registre présentent des difficultés qu'il faut bien sûr prendre en compte dans l'enseignement, ils constituent par contre un moteur puissant de l'apprentissage qui ne saurait être négligé.

PROBLÉMATIQUE 7

FORMATION AU RECUEIL, AU TRAITEMENT, A LA CONSULTATION ET A LA COMMUNICATION DE L'INFORMATION

Une des finalités essentielles de l'enseignement secondaire est de donner aux élèves une formation qui en même temps qu'elle leur fournit les outils nécessaires à la préparation de la vie professionnelle leur permette de devenir des adultes cultivés et des citoyens responsables, c'est-à-dire d'être des acteurs dans leur environnement. Cela nécessite non seulement qu'ils se soient familiarisés avec cet environnement, mais aussi qu'ils soient capables d'un regard critique et d'une attitude créative.

Le développement des moyens de communication auquel on assiste depuis quelques décennies, et plus encore l'explosion qu'on peut prévoir dans un avenir très proche, mettent à la disposition de chacun une quantité d'informations telle que la gestion et même la consultation nécessite à la fois un apprentissage technique et conceptuel ainsi que la capacité de prendre du recul, de confronter, de choisir...

Dans cette perspective de formation, la démarche scientifique en général et les mathématiques en particulier ont un rôle primordial à jouer en donnant des outils et des méthodes d'une part, et d'autre part grâce au type de raisonnement et de pensée qu'elles développent.

Sur le plan de la réception, les élèves disposeront d'informations de types très divers qui pourront être le fruit de la consultation de documents écrits, textuels ou numériques, visuels, sonores, issus de bases de données informatisées.

Sur le plan de l'émission, les différents traitements à faire exigeront ou permettront de développer particulièrement la capacité à définir des critères de façon précise, objective et non équivoque, visant un certain caractère d'universalité.

Leur apprentissage leur donnera des **outils** et des **méthodes** pour :

* **identifier**, **recueillir** et **organiser** en données exploitables des informations brutes, de nature et d'origine très diverses,
* **analyser**, **traiter** et **interpréter** ces données,
* **sélectionner**, **choisir** un mode et un support de présentation, **communiquer** et **diffuser** les résultats obtenus.

Les données recueillies ou produites seront présentées sous des formes très variées : textes, listes ou tableaux de nombres, arbres, courbes, schémas, diagrammes.

L'apprentissage de la lecture et de l'écriture acquiert ainsi une dimension plus large que le "déchiffrage intelligent" de mots ou de phrases.

Lire un graphique, un tableau de nombres, ... sont des compétences indispensables à chacun aujourd'hui, se déplacer et même intervenir dans l'arborescence d'une banque de données informatisée interactive sera sans doute tout aussi nécessaire demain.

L'apprentissage des mathématiques contribue à développer la capacité à :

* *construire un répertoire personnel organisé de connaissances* : des champs de savoirs et de savoir-faire et des classes de problèmes structurés en réseau ;
* *associer à chacun de ces constituants des mots-clés* permettant de rechercher et objectiver l'information à l'intérieur ou à l'extérieur de ce répertoire ;
* *participer à la constitution d'une mémoire collective* , la mémoire-classe constituée
    - de documents écrits (les cahiers et les devoirs des élèves)
    - de l'utilisation qui est faite de documents produits hors de la classe (manuel scolaire et documents de toute nature)
    - le vécu commun à la classe.

La mémoire-classe joue un rôle de référence et un rôle moteur à travers la confrontation qui permet à chacun d'enrichir son répertoire individuel.

Les activités associées sont à développer dans divers domaines des mathématiques et dans de nombreuses situations pluri-disciplinaires.

PROBLÉMATIQUE N°8

TRAITEMENT ET REPRÉSENTATION DE DONNÉES STATISTIQUES

La multiplicité des données numériques pluridisplinaires rencontrées dans le cadre scolaire, mais également l'abondance des "informations" fournies dans notre société par les médias, conduisent chacun d'entre nous, et en particulier l'élève, à la nécessité d'effectuer des tris, de réduire et d'organiser des signaux - informations brutes, inertes, non signifiantes, également génératrices de bruits- en données structurées, puis celles-ci en informations. Ces dernières ne prennent véritablement ce statut que lorsqu'il a été possible d'effectuer un certain traitement des données qui les génèrent, en vue de leur conférer un sens, lui-même attribué à la suite d'une interprétation. Sans cette capacité de l'individu à effectuer une mise à distance personnelle, l'aliénation au traitement externe de ces données risque d'être totale : l'école se doit de délivrer une culture suffisante et quelques savoir-faire afin de préparer l'élève à échapper à cette dépendance, à acquérir des moyens de traitement mais aussi de jugement et d'esprit critique qui lui soient propres.

L'enseignement au cours de l'élémentaire et du 1er cycle fournit de primitifs et timides outils dans cette direction, conduisant cependant à une première autonomie, à des représentations imagées et à la mise en correspondance entre les données numériques et des concepts mathématiques, comme la proportionnalité. Dans certains cas de relation fonctionnelle, ces concepts permettent d'organiser les données et de mener à des calculs. Mais, faute d'avoir relié l'aléatoire et le numérique, d'avoir forgé des outils spécifiques d'un traitement des données et du hasard qui peut être lui-même à la fois l'origine de ce traitement et la source de la prévision, la maîtrise visée est loin d'être satisfaite. De plus, la relation entre données numériques et proportionnalité fait courir le risque de mettre en place chez l'élève un obstacle épistémologique consistant à croire, par exemple, que si un événement est apparu 3 fois en 10 épreuves, il devrait apparaître 30 fois en 100 épreuves, 300 fois en 1000 épreuves, etc.

La France demeure donc l'une des dernières nations à prendre conscience qu'elle a en charge une véritable formation à l'école en matière de statistique et de probabilité. La formation des maîtres en est la première responsable.

Par suite, tout en regrettant que le terrain n'ait pas été mieux préparé en amont, nous devons, à travers les programmes de lycée pallier sérieusement cette carence par des **objectifs** plus ambitieux touchant au civique, au culturel et au cognitif :

- permettre à l'élève de s'intégrer dans une société où abondent les "informations" et leurs interprétations, puis d'y exercer une profession, société où la référence aux sondages et aux jeux de hasard est omniprésente, quelquefois sous des formes pernicieuses, misant sur la crédulité des individus, prétendant rationaliser la composante irrationnelle de la psychologie humaine,
- faire prendre conscience de la différence entre les modes de raisonnement déterministe utilisés jusqu'alors dans la majorité des activités mathématiques et les modes non déterministes utilisés en statistique inférentielle où les décisions s'assortissent de risques qu'il s'agira d'optimiser,
- mettre en place des situations suffisamment variées et pluridisciplinaires pour que des changements de cadres et de registres soient efficacement mobilisés, que les connaissances trop éclatées soient plus transverses, mieux globalisées et qu'une démarche scientifique soit déployée.

Pour ce faire, il est nécessaire que des **objectifs** plus **spécifiques** soient atteints par l'élève:

- explorer et structurer des données, puis comprendre les structures obtenues,
- disposer d'éléments conceptuels de la statistique et des probabilités,
- savoir, dans des situations pluridisciplinaires peu complexes, mathématiser en un modèle où intervient le hasard sur des données empiriques, résoudre dans le modèle et revenir de façon critique à la situation initiale.

Les **situations** et les **activités** associées seront donc largement ouvertes et variées :

- recueillir, organiser, condenser, coder, représenter en tableaux ou graphiques des données numériques d'origine scolaire ou non,
- analyser, interpréter, comparer et critiquer des représentations,
- rendre pertinents, opérationnels, anticipateurs donc efficaces, des concepts de probabilité, à travers des situations de défis et de paris,
- émettre une hypothèse dans une situation aléatoire simple, et étudier l'éventualité de son rejet ou de son acceptation.

Les **démarches** sollicitées nécessiteront donc le déploiement de ce qui relève de la démarche scientifique : analyser, conjecturer, modéliser, résoudre, spécifier, anticiper et appliquer avec esprit critique.

Ceci nécessite que les **contenus** des programmes soient sensiblement élargis, tout en étant spécifiés aux différentes filières. Il nous semble raisonnable, du point de vue didactique, d'aborder l'ensemble des notions par celles qui relèvent de la statistique descriptive, en partie enseignées à un niveau élémentaire au 1er cycle, en particulier la notion de fréquence. C'est celle-ci qui donnera, par la suite, un sens à la notion de probabilité, de même que les opérations intuitives puis explicitées sur la fréquence donneront à l'axiomatique de Kolmogoroff toute sa signification. Quelques lois théoriques, discrètes ou continues (binomiale, Poisson, hypergéométrique, multinomiale, exponentielle et normale) apparaîtront comme des outils permettant ensuite d'étudier l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique et de juger sa pertinence. A cette occasion, sans développement théorique, le test du χ^2 permettra de répondre à l'hypothèse d'ajustement. L'étude de la distribution conjointe de 2 variables conduira à une première étude de la régression linéaire et de ses applications à la prévision. Les notions de décision et de risque associé pourront être abordées à travers des fonctions simples où la recherche de minima prendra un de ses sens. Une méthode de classification hiérarchique de données (par exemple, celle qui était utilisée dans l'analyse du test d'entrée en seconde en 1993 et 1994) sera enseignée sur la base d'exemples numériques et pourra conduire à la notion de typologie utile en sciences biologiques et en sciences humaines. Un changement de cadres comme statistique $\leftrightarrow$ géométrie associant moyenne et barycentre, écart-type et distance, covariance et produit scalaire, coefficient de corrélation et cosinus permettrait de munir l'élève de riches images intuitives, efficaces à la mémorisation et à l'interprétation de certains phénomènes.

En résumé, pour satisfaire cette problématique, de grands efforts sont à faire sur plusieurs plans, si l'on souhaite modifier sa représentation au niveau de l'institution :
- la formation initiale et continue des enseignants,
- la révision des programmes où cette problématique n'apparaîtrait plus comme le superflu dont on peut amputer sans dommage l'enseignement lorsque les programmes sont jugés chargés,
- la totale intégration institutionnelle de l'évaluation des connaissances et des compétences des élèves en matière de statistique et de probabilité dans les différents examens de l'enseignement secondaire.

Enfin, ne fermons pas ces pages sans réfléchir sur la philosophie à incidence sociale, pédagogique et culturelle :

"*Qu'est devenue la sagesse que nous avons perdue dans la connaissance ?*
Qu'est devenue la connaissance que nous avons perdue dans l'information ?
Qu'est devenue l'information que nous avons perdue dans les données ?"

Mark ASPEN, Musée des Enfants du Capitole à Washington

PROBLÉMATIQUE N° 9

CHOIX OPPORTUN ET OPTIMAL DES OUTILS ET DES MÉTHODES DANS DES SITUATIONS SOUS CONTRAINTES

Les qualificatifs "opportun" et "optimal" mettent en relief le caractère relatif et local des choix que l'on est amené à faire dans des situations où les données, les paramètres, les procédures utilisables, la nature des questions posées, les résultats attendus sont placés sous contraintes. C'est le cas, par exemple, où les résultats d'un calcul doivent satisfaire une condition d'appartenance à un domaine particulier d'un ensemble de nombres (ensemble d'entiers, ensemble majoré, minoré, etc.). C'est le cas aussi où une hypothèse suffisante d'un théorème ne s'appliquant pas dans les conditions d'un problème (dérivabilité par exemple), il faut chercher l'extrémum d'une certaine fonction. C'est encore le cas où la complexité d'un problème est telle qu'un changement de cadre approprié en permet la résolution.

Les objectifs didactiques qui sont associés, plus particulièrement, à cette problématique relèvent de niveaux de complexité taxonomique assez élevés, mais doivent être progressivement activés et sont supposés l'avoir été dès le 1er cycle. Citons les plus remarquables :

* faire dégager à l'occasion de la résolution de certains problèmes ce qui leur est spécifique et ce qui est réinvestissable (identification de certaines méthodes plus générales),
* faire prendre conscience de l'étendue des moyens non algorithmiques dont on peut disposer pour résoudre un problème,
* faire expliciter des critères pertinents et/ou optimaux selon lesquels on peut choisir un outil ou une méthode,
* rendre claire la contingence de certaines situations-problèmes, c'est-à-dire :
    - d'une part, la relativité de la solution au milieu conceptuel ou culturel dans lequel se présente la situation (par exemple, preuve "matérielle" de l'existe ce d'une certaine propriété, consistant à l'exhiber à travers un exemple),
    - d'autre part, l'aspect provisoire de la réponse eu égard aux arguments disponibles dans l'état actuel des connaissances (par exemple, pas de solution d'une équation du 2^{ème} degré si $\Delta < 0$).

Ainsi, **les démarches attendues des élèves** correspondent le plus souvent à :

* formaliser les contraintes,
* évaluer, ou tout au moins estimer, les fonctions de coût (positif ou négatif) des méthodes ou des outils envisageables : longueur, complexité, rigueur, élégance, caractère explicatif, etc.,
* indiquer les critères optimisant les coûts, les rendre objectifs, puis...
* comparer, évaluer et critiquer des solutions et des cadres résolvants.

Il est bien évident que **les activités** qui permettent de développer ces démarches nécessiteront des débats ouverts où la tolérance des points de vue différents sera payée sur le compte de la recherche obstinée mais circonstanciée de l'optimisation et de la nécessité de consensus, voire d'objectivité. Elles donneront un sens ou un nouveau sens à des telles que les inéquations, les systèmes (d'équations, d'inéquations), les paramètres ("discuter selon leurs valeurs"), la dérivation, les fonctions de plusieurs variables, la programmation linéaire, les inf. ou les sup., etc.

PROBLÉMATIQUE N°10

CONJECTURES ET PREUVES

Que trouve-t-on comme définition de ces mots dans le *Dictionnaire des mathématiques* de Bouvier-Georges-Le Lionnais (PUF)?

"***Conjecture*** : *hypothèse émise a priori sur l'exactitude ou non d'un énoncé dont on ignore la démonstration*"

"***Preuve*** : *synonyme de démonstration*"

La langue française et notre pratique nous fournissent un nombre important de mots se rapportant aux activités mathématiques où la rationalité et son expression sont en jeu. Peut-être est-ce lié au fait que nous appartenons à la patrie de Descartes et que, en conséquence, notre héritage génétique conduit nos programmes scolaires à ne jamais négliger de faire une grande place à la démonstration, excessive quelquefois, mais nécessaire à la satisfaction d'objectifs généraux. Peu de pays, en revanche, lui accordent autant de place dans leurs curricula. Cette abondance de références dans les programmes français et leurs commentaires se traduit ainsi, avec des nuances quelquefois subtiles, par des expressions variées que l'on retrouve dans les textes qui les présentent et dans des consignes de problèmes :

conjecturer, prouver, démontrer, montrer, expliquer, justifier, valider, argumenter, établir, ...

Nous ne tenterons pas ici d'en rechercher et d'en donner une définition précise, tâche difficile, et peut-être impossible, dévolue au groupe "MOTS" (cf. "Mots flous" *Bulletin* n°384 de juin-juillet 1992). Mais reconnaissons qu'ils sont employés très souvent avec des sens ambigus, à l'origine de certaines difficultés des élèves, ambiguïtés entretenues et renforcées depuis le 1er cycle, voire depuis le primaire. Disons cependant que, contrairement au dictionnaire cité plus haut, nous distinguerons "preuve" et "démonstration" (cf. Thèse de N. Balacheff). La "***démonstration mathématique***" **est une preuve particulière, respectant des règles et une rhétorique codifiées et communément admises, alors qu'il existe différentes formes de preuves** dont : la preuve "physique" (par exemple, réalisation d'une maquette qui fait "preuve"...), le "montrer" (l'**ostension**) où il suffit de mettre en évidence un fait ou un exemple. L'**argumentation**, de son côté, juxtapose des énoncés, éventuellement de façon redondante, sans explicitation des règles générales (axiomes, définitions, théorèmes) qui justifient ces énoncés. Cette forme de discours est très souvent employée dans la vie courante, mais aussi par les élèves qui n'ont pas compris la rhétorique de la preuve mathématique. Enfin, nous n'omettrons pas *la distinction dans les tâches entre "chercher la solution d'un problème, et donc résoudre", tâche à la faveur de laquelle apparaissent déjà les raisons mathématiques qui la légitimeront et "démontrer que la solution envisagée est mathématiquement correcte à travers une articulation légitime des énoncés "*.

Quels sont, à l'école, les **objectifs** et donc les **fonctions** premières de ces activités mathématiques ? On en distingue généralement de trois sortes (cf. travaux de G. Arsac et E. Barbin) :

* *sociales* où il s'agit de convaincre et d'obtenir un consensus assez large pour que la preuve ne se réduise pas à une argumentation ad hoc chargée seulement de réduire la méconnaissance ou le doute de l'interlocuteur ;
* *psycho-cognitives* où il s'agit cette fois, par une explication, irréfutable par soi-même, de réduire sa propre incertitude et d'obtenir un accord absolu avec sa rationalité ;
* *épistémologiques* où la preuve accroît la connaissance, élargit la théorie par de nouveaux énoncés établis sur des bases communément admises par les mathématiciens.

Ce sont ces fonctions qui vont donner du **sens** aux activités proposées (imposées?) aux élèves. Le maître est généralement le référent qui jugera la validité du produit, qui éventuellement, le soumettra à la critique des autres élèves, qui mettra en évidence les acquisitions cognitives individuelles et collectives, l'extension de la mémoire de la classe, l'opérationalité des nouvelles connaissances capitalisées, etc. Mais, il ne faut pas se bercer de l'illusion didactique consistant à croire que la nécessité de passer de la conjecture ou de la seule consigne "démontrer" à l'apport de preuve mathématique, ainsi que la rhétorique de celle-ci, se feront sans heurts ni sans obstacles: "convaincre" s'obtient par d'autres voies détournées (par exemple, l'argument d'autorité), "se convaincre" peut se réduire à une confiance ou une approbation molles et fallacieuses et, de plus, peut ne pas passer par une démarche canonique. Quant au progrès de la connaissance théorique, n'est-il pas vain pour certains élèves puisqu'il serait préexistant, déjà écrit dans l'histoire du savoir ? C'est donc par une grande variété d'activités que nos objectifs didactiques seront atteints, par un long processus progressivement mis en place et non par une injonction. La conjecture, dont la fonction est excitatrice et entraîne le désir de "savoir plus", par conséquent dont une vertu principale réside dans l'enjeu de sa vérité, n'est d'ailleurs réellement formulable qu'au-dessous d'un seuil de certitude ; un excès d'évidence la scotomise, tuant le désir précédent. L'entrée dans le processus de preuve ne prend lui aussi son sens que dans une certaine fourchette où l'incertitude n'est pas trop importante, vu le coût cognitif de son engagement, et où la certitude n'est pas absolue car le gain serait dans ce cas dérisoire.

On voit donc que les difficultés didactiques ne sont pas minces et qu'elles nécessitent des **enjeux** et donc des **tâches** bien adaptés à la fonction que l'on veut privilégier. Par exemple, le recours au "débat scientifique" (cf. travaux de M. Legrand) ou au conflit socio-cognitif en groupe, bien que très délicats à mener, présentent un réel intérêt dans un travail collectif où la situation présenterait un caractère suffisamment ouvert. De même, une recherche, pour élèves isolés ou en binôme, sur micro-ordinateur, présente l'avantage de changer la nature des relations avec un nouveau référent (une base de connaissances), d'autoriser un rythme plus personnel et de réduire l'effet des implicites et des tolérances auxquels le maître se trouve bien souvent contraint.

Généralement, en raison des programmes actuels, les **contenus** privilégiés sur lesquels porte une démonstration sont de nature géométrique (plane). Ce qui ne peut que compliquer la tâche didactique car, bien souvent, les propriétés à démontrer présentent un caractère d'évidence perceptive. Trop peu de situations d'analyse nécessitent le passage par la conjecture, puis par sa preuve, sans doute parce que la majorité d'entre elles sont calculatoires ou descriptives (étude de fonctions, par exemple). Cependant, la recherche d'une minoration ou d'une majoration optimales nécessitent des justifications appelant des théorèmes généraux au même titre qu'une démonstration géométrique. C'est aussi le cas de problèmes d'arithmétique dont on peut regretter la disparition des cursus scolaires.

On pense aussi bien souvent que la démonstration se ramène exclusivement à la déduction, réduite elle-même au modus ponens et au syllogisme. D'autres **formes** de preuve intellectuelle se rencontrent en mathématiques et ne doivent pas être négligées en faveur des formes précédentes, particulièrement en second cycle. Il s'agit, par exemple, de la démonstration dite par l'absurde, du "raisonnement par récurrence", de la preuve par contre-exemple, etc. Et comment situer le raisonnement inductif qui trouve une place majeure dans les sciences "non dures"? La formation mathématique ne peut l'ignorer, ne serait-ce que pour en montrer la "logique", les limites, les dangers mais aussi la puissance créative.

En résumé, disons que les *vertus* formatives au niveau socio-cognitif de la preuve mathématique s'expriment en termes de consensualité, d'universalité, de généralité, de prédictibilité, de rigueur,...Qu'en revanche, l'abus consistant à y limiter l'activité mathématique conduit à nier ou, tout au moins, à scléroser les aspects positifs du recours à l'évidence, au bon sens, à scléroser l'intuition, à systématiser un comportement de doute, ... autant d'attitudes préjudiciables à une image vivante et ouverte de la pensée mathématique.

APMEP - Groupe Problématiques