AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc… L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

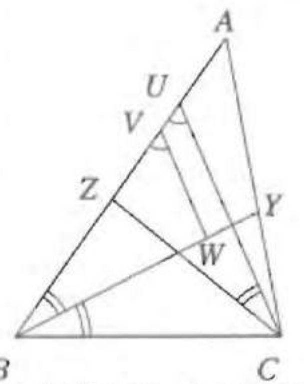
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquettes Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERREOL - 6, rue des annelets.
75019 PARIS

Nouveaux avis de recherche

Avis n° 37 de Hugues Biratelle (collège de Lieusaint)
Recherche d'une ou plusieurs démonstration du théorème de Steiner-Lehmus (un triangle ayant deux segments bissecteurs égaux est isocèle).

L.G. VIDIANI, qu'aucun ordinateur ne battra jamais dans la rapidité de recherche d'une référence, m'a envoyé une démonstration, élémentaire de simplicité, tirée de *Coxeter, introduction to geometry*, 1969, que je vais vous traduire ici.



Soient $[BY]$ et $[CZ]$ les deux segments bissecteurs intérieurs issus de B et C ; supposant que $B < C$, on va montrer que $BY > CZ$, ce qui montrera le théorème par contraposée.

Soit U sur $[AZ]$ tel que $\widehat{ZCU} = \widehat{B}/2$; puisque le triangle UBC a un angle plus petit en B qu'en C, $BU > CU$ (voir justement ci-dessous l'avis de recherche N° 33!). Soit V sur $[BU]$ tel que $BV = CU$, et W sur $[BY]$ tel que $\widehat{BVW} = \widehat{CUZ}$. Par le cas d'égalité des triangles "angle-côté-angle", les triangles BVW et CUZ sont égaux, donc $BW = CZ$. Mais comme W et Y sont de part et d'autre de (CU), $BY > BW = CZ$. CQFD.

Par comparaison, L.G. VIDIANI m'a envoyé l'*«elementare Lösung einer Aufgabe über das Dreieck»* de STEINER lui-même (1844), laquelle prend trois pages.

Avis n° 38 de L.G. Vidiani (Dijon).
Quelle est l'origine du symbole @ souvent utilisé en informatique (et actuellement popularisé par internet). Et quel est son nom ?

NDLR : D'après une voisine, qui est américaine et journaliste, et son dictionnaire, ce signe remplace le mot anglais "*at*" et tend d'ailleurs à être de plus en plus employé, même dans le courrier manuscrit. Par contre je n'ai aucun renseignement sur son origine, qui semble plus récente que le similaire & remplaçant "*and*", très prisé des anglophones, mais datant des débuts de l'imprimerie. Par parenthèse, j'ai appris à cette occasion que le signe & répondait en français au joli nom d'*«esperluette»* (ou, plus ordinairement *«et commercial»*) et en anglais à celui d'*«ampersand»*, pour *«and per se and»* (??). Quant au nom de @, c'est en anglais *«at-sign»*, et en français *«à commercial»*. L'expression *«arobas»*, vue dans certains livres d'informatique, est, pour ma voisine et pour moi, un mystère.

Avis n° 39 de Marc Roux (lycée de la Camargue, Nîmes)
Que sait-on de la structure algébrique comparable à un anneau, mais dont l'«addition» n'est pas commutative ? J'ai construit un tel objet sur un groupe non commutatif à 6 éléments, avec une multiplication qui ne se réduit pas à $x.y = 0$. Question subsidiaire : cette notion a-t-elle une quelconque «utilité» ?

Avis n° 40 de M. Massé (Chartres)
Quelle est l'origine du mot "cavalière" dans l'expression : "perspective cavalière" ?

Avis n° 41
Démonstration du théorème du sandwich au jambon : étant donnés trois solides quelconques de l'espace, il existe un et un seul plan qui coupe chacun des solides en deux volumes égaux.

NDLR : ce théorème, énoncé tel quel dans *le dictionnaire des mathématiques* (PUF) est imprécis : les solides en question doivent déjà avoir un volume, et probablement être bornés. De plus, pour l'unicité du plan sectionneur, il doit falloir rajouter des conditions: imaginons par exemple que les trois solides soient constitués chacun de deux boules reliées par une tige mince...

Signalons enfin que ce théorème généralise celui dit "des deux crêpes": «*on peut toujours sectionner d'un seul coup de couteau deux crêpes posées sur un plan, chacune en deux parties égales*» et qu'il se généralise donc probablement à n corps en dimension n. Restera à trouver un équivalent culinaire pour ce cas général...

Réponses aux avis précédents

Avis n° 19 (feuilleton sur septante, octante, nonante, commencé au n°396).

Georges Ares, Suisse fixé à Paris ayant publié un lexique franco-romand (*parler suisse, parler français*, Aire 94) pense que notre quatre-vingts, et par conséquent soixante-dix et quatre-vingt-dix sont « attribuables à une influence viking, venue de Normandie. Une influence celtique sur le parler parisien médiéval (quatre-vingts apparaît déjà chez Joinville au XIII[e] siècle (cf. Littré) est en effet hautement improbable à cette époque.

La numération vicésimale qui s'introduit en français, en porte-à-faux par rapport au système décimal latin qui régit les six premières dizaines, devrait donc déjà apparaître dans des documents normands antérieurs au XIII[e] siècle. Hypothèse à confirmer.»

Il remarque aussi que «compter par vingtaines semble une pratique courante dans le nord de l'Europe. L'anglais connaît par exemple un mot curieux et très ancien dans le sens de vingt ou vingtaine : score. Son premier sens est celui d'encoche.»

Avis n° 26 (cf. *Bulletin* n° 395, n° 396, n° 398)
Problème de Kimberling, point isopérimétrique du triangle.
Contribution de J. Moreau de St Martin (Paris), montrant que ce problème était loin d'être insoluble...

1) Si les triangles KBC, KCA, KAB ont même périmètre L, on a

$$KA + KB + KC - L = KA - BC = KB - CA = KC - AB \qquad (1)$$

et les deux dernières égalités montrent que K appartient à l'intersection de deux branches d'hyperbole
- de foyers A et B, d'équation $KA - KB = BC - CA$, et
- de foyers B et C, d'équation $KB - KC = CA - AB$.

2) Soit R la valeur commune des expressions (1).

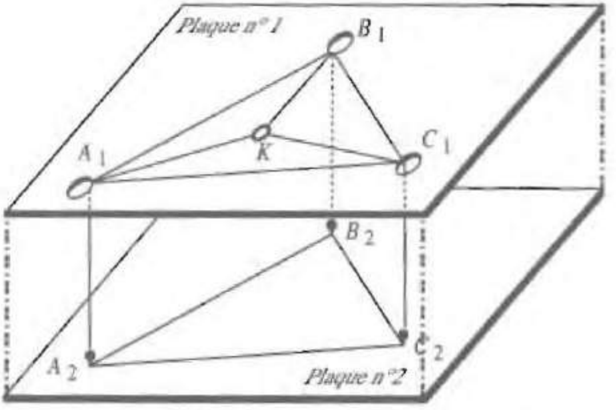
Si $R > 0$, le cercle de centre K et de rayon R est tangent extérieurement

- au cercle *(A)* de centre A et de rayon BC,
- au cercle *(B)* de centre B et de rayon CA,
- au cercle *(C)* de centre C et de rayon AB.

Si $R < 0$, le cercle de centre K et de rayon $-R$ est tangent intérieurement à ces trois mêmes cercles.

Le problème est donc un cas particulier du problème de construction d'un cercle tangent à trois cercles donnés.

3) Pour obtenir K sans mathématiques, demandez à un menuisier de vos amis de vous faire un bâti où pourront coulisser, dans le sens vertical, deux plaques horizontales sur lesquelles vous tracerez deux copies du triangle donné ABC, soit $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, se correspondant par une translation verticale.



Percez la première plaque en A_1,B_1 et C_1. Vissez des pitons sur la deuxième plaque en A_2, B_2 et C_2. A un petit anneau K posé sur la première plaque attachez trois ficelles. La première relie K à A_2 en passant par le trou A_1, et a pour longueur $BC + D$, D étant une longueur arbitraire. De même reliez K à B_2 en passant par B_1 avec la longueur $CA + D$, et K à C_2 en passant par C_1 avec la longueur $AB + D$.

Ces préparatifs faits, faites coulisser les plaques de façon que les ficelles se tendent. K va tout seul à la position cherchée.

Avis n° 28

Pourquoi les suites et moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques s'appellent-elles ainsi ?

Je lis dans le n° spécial de *La Recherche* sur les nombres de cet été, p. 738, que le savant Boèce (480-524), conseiller du roi ostrogoth Théodoric Ier, a «défini les médiétés selon trois types : arithmétique, géométrique, harmonique (ou musicale)». Est-ce donc lui le coupable ?

Il est à remarquer que dans cet article, la "*médiété harmonique*" est définie par $\frac{c}{a} = \frac{c-b}{b-a}$, ce qui donne bien $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ et qu'il y a aussi des médiétés géométriques quadruples (a, b, c, d), définies par $ad = bc$.

Avis n° 30 bis (*Bulletin* n° 399)

Voici une remarque anecdotique de J. Moreau de St Martin:

L'opposé de la constante C_1 définie dans cet avis de recherche par

$$C_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 = -0{,}072\,815\,845\,4\ldots$$

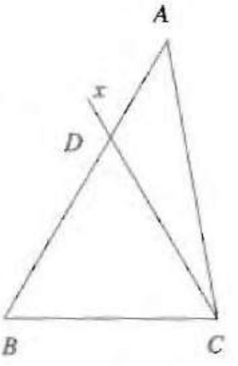
est aussi la limite pour x infini de $\sum_{n > x} \frac{1}{n} \ln\frac{x}{n} - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \gamma \ln x$.

Mais, bizarrement, l'ouvrage de W.J.Ellison et M.Mendès-France «*Les nombres premiers*» (Hermann), p. 14, attribue à cette dernière la valeur 2,723..., valeur reprise dans «*Les nombres remarquables*» de F. Le Lionnais (Hermann).

Avis N° 33

Montrer que dans un triangle non aplati ABC, $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$ si et seulement si $a < b < c$.

Une première solution a été publiée dans le n° 399, utilisant la relation $\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$. Les envois ultérieurs de Marie-Laure Chaillout, Véronique Launois et R. Bourdon sont peu ou prou similaires. Mais nous avons reçu une solution nettement plus élégante, utilisant la seule inégalité triangulaire, de A. Marcout (Ste Savine), qu'il dit avoir apprise en classe de 4ème en l'an de grâce 1932.



Théorème : si dans un triangle, $\widehat{B} < \widehat{C}$ alors $b < c$.
Construisons, dans le demi-plan contenant A, la demi-droite Cx telle que $\widehat{BCx} = \widehat{B}$. Si $\widehat{B} < \widehat{C}$, elle est à l'intérieur de l'angle $\widehat{BCA}$ et coupe donc le segment $[BA]$ en un point D.
Dans ACD, $AC < AD + DC = AD + DB = AB$.
La réciproque se fait par contraposée.
Raymond Keller (Bonneville), et Abdeslam Serroukh (Casablanca) font encore mieux puisqu'ils envoient la même solution tirée de leur livre de 5ème.

Je ferai remarquer à A. Marcout, qui regrette dans sa lettre que l'axiomatisation de la géométrie ait fait perdre de vue ces raisonnements élémentaires, que la relation $\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$ n'est pas spécialement un fleuron des mathématiques modernes. Mais merci d'avoir ramené à la surface ce qui s'était perdu dans l'oubli !

Avis n° 35 : exprimer sous d'autres formes la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k}$.

L'intitulé originel de cet avis ne disait pas «exprimer sous d'autres formes», mais «exprimer en fonction de n» ; J. Legrand fait remarquer dans sa réponse que $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k}$ est une fonction de n comme une autre...

Alain Besson (St Julien en Genevois) a transformé cette somme en une autre somme de coefficients binomiaux, qui présente l'avantage de ne faire intervenir que des termes d'une même ligne du triangle de Pascal.

Cette somme est le coefficient de X^n dans le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (1+X)^{2k} X^{n-k}$.

Or, d'après la formule $\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$,

$$P(X) = \frac{(1+X)^{2n+2} - X^{n+1}}{1 + X + X^2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2n+2} C_{2n+2}^{k} X^{k} - X^{n+1}\right)\left(1 - X + X^{3} - X^{4} + X^{6} - X^{7} + \ldots\right);$$

on en déduit, en prenant le coefficient de X^n que :

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= C_{2n+2}^{n} - C_{2n+2}^{n-1} + C_{2n+2}^{n-3} - C_{2n+2}^{n-4} + \ldots \\ &= \ldots C_{2n+2}^{n-3} + C_{2n+2}^{n} - C_{2n+2}^{n+3} - C_{2n+2}^{n+6} - \ldots \end{aligned}}$$

Cette dernière somme, avec uniquement des signes + est bien connue (somme des termes de 3 en 3 d'une ligne du triangle de Pascal). Mais avec aussi les signes $-\ldots$?