L'Olympiade Internationale de Mathématique 1995

François Lo Jacomo
Paris

Chine, Roumanie, Russie, Viêt-nam, Hongrie, Bulgarie, Corée du Sud, Iran, Japon, Royaume Uni, États-Unis d'Amérique, Taiwan, Israël, Inde, Allemagne, Pologne, Yougoslavie (Serbie-Monténegro), République tchèque, Canada, Hong Kong, Slovaquie, Australie, Ukraine, Maroc, Turquie, Singapour, Bélarus, Italie, Argentine : tous ces pays ont été meilleurs que la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques qui se sont déroulées les 19 et 20 juillet 1995 à Toronto (Canada). « *C'est un triste bilan qui inaugure mal les nouveaux programmes de Terminale S et de l'enseignement de spécialité de mathématiques ; il faut dire que ceux-ci, très peu ambitieux et très orientés vers des "activités mathématiques" à base de calculs, n'offrent que peu de secteurs sur lesquels on pourrait appuyer un solide enseignement du raisonnement mathématique* », estime Claude Deschamps, Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand, chef de la délégation française et Président du Conseil consultatif de l'OIM.

Les Olympiades internationales de mathématiques (OIM) ont été créées en 1959 en Roumanie, et la France y participe depuis 1969.

Elles ont pour but de :

a) stimuler et encourager le développement des élèves forts en mathématiques de tous les pays,

b) favoriser l'établissement de relations amicales entre élèves et professeurs à l'échelle internationale,

c) créer des possibilités favorisant l'échange de renseignements sur les procédures et plans de cours établis dans les écoles à travers le monde.

Le nombre de pays invités à y participer n'a cessé de croître : 16 à Moscou en 1973, 32 à Paris en 1983, 54 à Pékin en 1990 et 73 cette année. Les prochaines Olympiades se dérouleront à New Delhi (Inde) les 10 et 11 juillet 1996.

Les candidats doivent être âgés de moins de vingt ans et n'avoir pas commencé d'études universitaires. En France, ce sont les six lauréats du Concours général : depuis 1988, le Concours général ne propose plus de long problème mais des exercices dont certains sont dans le même esprit que les exercices d'Olympiade. Il doit néanmoins prendre en compte la formation et la diversité des candidats : sur 2 000 candidats, seuls quelques dizaines atteignent la note de 20/100 et, cette année, la meilleure note était 60/100. A l'Olympiade 1995, la moyenne des 412 candidats était 19/42. Les 30 meilleurs (de 15 pays, parmi lesquels 14 candidats, des huit pays les mieux classés, ont obtenu le score maximum 42/42), ont reçu un premier prix ; les 71 suivants, un deuxième prix, les 100 suivants un troisième prix. Sur 64 pays présentant une délégation complète de 6 candidats, 55 ont ramené au moins un prix dont 39 au moins un premier ou deuxième prix. La France ramène un premier prix (Emmanuel BREUILLARD, du lycée Camille Guérin à Poitiers, premier prix du concours général et deux troisièmes prix (Thiên-Lôc NGUYEN et Julien SAMAHA, tous deux du Lycée Louis-le-Grand à Paris), mais trois lauréats français du Concours Général se classent dans la seconde moitié de l'Olympiade (230$^{\text{ème}}$, 245$^{\text{ème}}$ et 306$^{\text{ème}}$), ce qui est tout de même surprenant. La France, qui s'était classée 13$^{\text{ème}}$/55 en 1989 en Allemagne, 5$^{\text{ème}}$/45 en 1990 à Pékin (année ou Vincent Lafforgue a obtenu le score maximum), 13$^{\text{ème}}$/55 en 1991 en Suède, 10$^{\text{ème}}$/55 en 1992 à Moscou, 17$^{\text{ème}}$/73 en 1993 à Istanbul, 18$^{\text{ème}}$/62 en 1994 à Hong Kong, se retrouve donc 30$^{\text{ème}}$/73 cette année !...

C'est en février que chaque pays participant doit proposer au pays organisateur un maximum de 6 exercices originaux accompagnés de leurs solutions détaillées (en France, une dizaine d'anciens lauréats aident Claude DESCHAMPS et Johan YEBBOU dans le choix de trois ou quatre énoncés). Une semaine avant les épreuves, le Conseil consultatif, actuellement présidé par Claude DESCHAMPS - et qui comprend 8 membres dont trois représentent le dernier, l'actuel et le prochain pays organisateurs, les autres étant élus par moitié tous les deux ans - se réunit pour préparer les décisions du Jury, notamment le choix des prochains pays organisateurs (1997 : Argentine, 1998 : Taiwan). Puis, le Jury, à savoir un chef d'équipe par pays, se réunit à huis clos ; il reçoit, en anglais, une trentaine de sujets présélectionnés par le pays organisateur. Durant quarante huit heures, il doit trouver des solutions pour ensuite les comparer avec les corrigés "officiels" fournis par le pays organisateur. C'est alors que le jury choisit les six énoncés définitifs (trois pour le premier jour, trois pour le second), les traduit d'abord en français, espagnol, allemand, russe et chinois, puis dans toutes les langues utiles (une quarantaine).

Les candidats arrivent deux à quatre jours avant les épreuves, accompagnés de leurs chefs suppléants (en France : Johan YEBBOU, Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Charlemagne à Paris. Ils composent deux fois quatre heures et demie, chacun dans sa langue, avant de revoir leurs chefs d'équipes. Les corrections durent trois ou quatre jours, suivies de la cérémonie de clôture. Les frais de séjour sont entièrement à la charge du pays organisateur, les frais de voyage à la charge des pays participants.

Chaque chef d'équipe corrige, sans les noter, les copies de ses candidats. Le pays organisateur nomme des coordonnateurs pour chacun des problèmes, chargés d'attribuer les notes en accord avec les chefs d'équipe. Toute démonstration mathématiquement correcte, quelle que soit son élégance, vaut 7 points, et la discussion ne porte que sur les 30% de solutions partielles (les rares différends sont tranchés par l'ensemble du jury), mais des prix spéciaux peuvent être attribués pour les solutions particulièrement méritoires, et une mention honorable est remise à tout candidat qui ne reçoit pas de prix mais qui a obtenu tous les points pour au moins une question.

Il n'existe pas de programme : chaque exercice se résout avec fort peu de connaissances beaucoup d'astuce et surtout beaucoup d'imagination. Certaines connaissances, l'arithmétique, la géométrie du cercle, la combinatoire.., sont néanmoins supposées évidentes : en France, une préparation spécifique de trois semaines vise notamment à combler les lacunes des candidats sur ces points, mais aussi sur des notions plus fondamentales comme le raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde ; elle vise aussi à acquérir la maîtrise de méthodes classiques comme la descente infinie, le principe des tiroirs, la recherche des situations extrémales…

Nous publions ci-dessous les six énoncés proposés cette année. Nous publierons dans le prochain numéro les solutions de ces énoncés, accompagnées de commentaires heuristiques. Signalons également que l'ouvrage de Denis GERLL & Georges GIRARD, *les Olympiades Internationales de mathématiques* (classique Hachette, 1976), a été réédité en 1994 aux Editions Jacques Gabay. Il donne les énoncés de 1959 à 1975, les solutions de 1967 à 1975 et une sélection de problèmes divers. Plus récemment, R. FERRÉOL et F. CASIRO ont publié, aux Editions du Choix, *Olympiades & Concours Général (énoncés et corrigés) de 1983 à 1987*. Puis, R. FERRÉOL, R. CUCULIERE et F. CASIRO ont publié, aux mêmes éditions, une suite, *Olympiades Internationales de mathématiques Concours général, 1988, 1989, 1990* (disponible en photocopie). Un nouvel ouvrage paraîtra dans les semaines qui viennent chez le même éditeur : Robert Ferréol, *Concours Général, énoncés et corrigés détaillés 1988 à 1994*.

First day
July 19, 1995

CANADA 1995

Premier jour
19 juillet, 1995

Temps accordé : 4 heures et demie.
Chaque problème vaut 7 points.

1. A, B, C et D sont, dans cet ordre, quatre points distincts d'une même droite. Les cercles de diamètres AC et BD se coupent aux points X et Y. La droite XY rencontre la droite BC au point Z. Soit P un point de la droite XY, distinct de Z. La droite CP rencontre le cercle de diamètre AC aux points C et M et la droite BP rencontre le cercle de diamètre BD aux points B et N. Montrer que les droites AM, DN et XY sont concourantes.

2. Soient a, b et c des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

3. Trouver tous les entiers n, strictement supérieurs à 3, pour lesquels il existe n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du plan et des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vérifiant les deux conditions :
(i) trois quelconques des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne sont pas alignés ;
(ii) pour tout triplet i, j, k $(1 \leq i < j < k \leq n)$ l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ a pour valeur $r_i + r_j + r_k$.

First day
July 19, 1995

CANADA 1995

Deuxième jour
20 juillet, 1995

4. Trouver la plus grande valeur de x_0 pour laquelle il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions :
(i) $x_0 = x_{1995}$
(ii) pour tout i, $1 \leq i \leq 1995$:

$$x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$$

5. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que :

$AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, et $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60°$

Soient G et H deux points intérieurs à l'hexagone tels que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120°$. Montrer que : $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6. Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles A de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2p\}$ tels que :

(i) A contient exactement p éléments ;

(ii) la somme de tous les éléments de A est divisible par p.