Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif,dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive,recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ n° 249 (Gabriel FRAISSE, 11 - Ferrals les Corbières)

Quelle est la probabilité que, lors d'un tirage du loto national (combinaison aléatoire de 6 numéros parmi 49), il y ait au moins deux numéros consécutifs parmi les 6 bons numéros ?

ÉNONCÉ n° 250 (d'après les Olympiades Internationales 1993, Istanbul).

Montrer qu'il existe une infinité non dénombrable de fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant les trois conditions :

$$f(1)=2$$

$$f(f(n))=f(n)+n \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

$$\text{et} \quad f(n+1)>f(n) \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

mais que parmi elles, il existe une paire et une seule $\{g\ ,\ h\}$ telle que pour toute autre fonction f vérifiant ces trois mêmes relations,

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad f(n)=g(n) \ \text{ ou } \ f(n)=h(n)$$

ÉNONCÉ N° 251 (G. CAMGUILHEM, Aubervilliers)

Soient A', B' et C' les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et soient B'' et C'' les points définis par $\overrightarrow{A'B''} = k\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'C''} = k\overrightarrow{A'B'}$ (pour k réel quelconque). Les droites (BB'') et (CC'') se coupent en I.

Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit IR?

SOLUTIONS DES ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 231 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Pour quels entiers p l'équation d'inconnue n : $\sum_{k=1}^{n}\left[k^{1/3}\right] = pn$ admet-elle des solutions entières ? [X] désignant la partie entière de X.

SOLUTIONS d'après Marguerite PONCHAUX (Lille)

L'idée originale de Marguerite PONCHAUX consiste, plutôt que d'étudier directement $S(n) = \sum_{k=1}^{n}\left[k^{1/3}\right]$, à s'intéresser d'abord à $f(n) = [n^{1/3}]\,n - S(n)$, car cette fonction f est en escalier : constante sur tout intervalle $[h^3, (h+1)^3[$, elle croît de $h^3 - 1 = nh - (n-1)(h-1) - h$ en $n = h^3$.

Comme $\sum_{j \leq h}^{n} j^3 = \left(\frac{j(j+1)}{2}\right)^2$, $\forall n \in [h^3, (h+1)^3[$ $f(n) = \frac{h^2(h+1)^2}{4} - h$

donc
$$\boxed{S(n) = hn - \frac{h^2(h+1)^2}{4} + h} \qquad (1)$$

Cette méthode s'apparente à l'intégration par parties ou encore à ce qu'on appelle, en théorie des nombres, le lemme d'ABEL.

Comme $n \geq h^3$ $\qquad \frac{f(n)}{n} =< \frac{h+3}{4}$

et comme $n < (h+1)^3$ $\qquad \frac{f(n)}{n} =< \frac{h-1}{4}$ $\qquad$ si $h \geq 2$,

le cas $h = 1$, donc $1 \leq n \leq 7$, fournissant 7 solutions triviales de $S(n) = n$ (donc $p = 1$).

Si $h \geq 2$, $\frac{3h-3}{4}n < S(n) < \frac{3h+1}{4}n$ de sorte que p ne peut valoir que : $\frac{3h-2}{4}$, $\frac{3h-1}{4}$ ou $\frac{3h}{4}$.

1 - Si $p = 3h/4$, l'équation (1) se ramène à : $n = h(h+1)^2 - 4$.
Pour tout p multiple de 3, l'équation admet une et une seule solution :

$$n = \left(\frac{4}{3}p\right)\left(\frac{4}{3}p+1\right)^2 - 4$$

2 - Si $p = (3h-1)/4$, $\quad n = h^2(h+1) - \frac{4h}{h+1}$

Or, h étant premier avec $h+1$, $\frac{4h}{h+1}$ n'est entier que si $h+1$ divise 4 ; compte tenu que p doit être entier, la seule possibilité est $h = 3$, $p = 2$, pour laquelle il existe une solution unique : $n = 33$.

3 - Si $p = (3h-2)/4$ $\quad n = h^3 + \frac{h^2 - 4h}{h+2}$

$$n = h^3 + h - 6 + \frac{12}{h+2}$$

qui n'est entier que si $h+2$ divise 12 ;
$h = 10$ convient : $p = 7$ et $n = 1\,005$,
$h = 2$ ne convient pas, car le $n = 7$ qui en résulte n'est pas dans l'intervalle $[h^3, (h+1)^3[$.

Les autres h donneraient à p une valeur non entière, si bien qu'en définitive, l'équation admet :

7 solutions entières	pour $p = 1$	($n = 1$ à 7),
1 solution entière	pour $p = 2$	($n = 33$),
1 solution entière	pour $p = 7$	($n = 1\,005$)

1 solution entière pour chaque p multiple de 3 : $n = \left(\frac{4}{3}p\right)\left(\frac{4}{3}p+1\right)^2 - 4$.

Autres solutions :
Alain BESSON (74 - St Julien en Genevois), Gérald GOUBY (46 - Bagnac), René MANZONI (Le Havre), Maurice PERROT (Paris), Geneviève SAMBARD (St Quentin) ... et quatre solutions incomplètes ou fausses.

ÉNONCÉ N° 232 (Gérard LAVAU, Rouen).

Donner un exemple de fonction strictement croissante dérivable dont la dérivée s'annule en un nombre non dénombrable de points.

SOLUTIONS

Plusieurs solutions ressemblantes me sont parvenues : de Stéphane LEGROS (Rouen, transmise par l'auteur), Jacques AMON (Limoges), Gérard GOUBY (46 - Bagnac), Bernard PETIT (Brest), Marguerite PONCHAUX (Lille) et deux solutions fausses.

La question essentielle à se poser est : en quels points s'annule la dérivée ? Il ne peut pas s'agir de points isolés, car l'ensemble de ces points doit être non dénombrable. Mais cet ensemble doit aussi être d'intérieur vide, sans quoi la fonction ne serait pas strictement croissante.

Le premier ensemble non dénombrable d'intérieur vide auquel on pense, c'est l'ensemble de Cantor (utilisé par Stéphane Legros, Bernard Petit et Marguerite Ponchaux). Bernard Petit rappelle la construction que voici en posant :

$$S([a, b]) = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right]$$

et
$$S\left(\bigcup_{1}^{N} [a_j, b_j]\right) = \bigcup_{1}^{N} S([a_j, b_j])$$

(si les $[a_j , b_j]$ sont deux à deux disjoints), puis $k_0 = [0 , 1]$ et $k_n = S(k_{n-1})_{+\infty}$ $(\forall n \geq 1)$, l'ensemble de Cantor $C = \bigcap_{0}^{+\infty} k_n$.

C'est une intersection de fermés, donc un fermé.

Comme, pour tout E, la mesure de $S(E)$ vaut les 2/3 de la mesure de E, la mesure de k_n vaut $(2/3)^n$, donc C est de mesure nulle donc d'intérieur vide.

Par ailleurs, C est non dénombrable : en effet, C est l'ensemble des $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{z^i}$ avec $\forall i, a_i \in \{0 , 2\}$, il est donc facile de construire une surjection de $C \mapsto [0 , 1]$ qui à $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{z^i} \in C$ associe $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$.

Jacques Amon utilise un autre ensemble : celui dont le complémentaire est : $\bigcup_{S=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{S-1}} \left] \frac{2k-1}{2^S} - \frac{1}{2^{2S}}, \frac{2k-1}{2^S} \right[$., la mesure de ce complémentaire étant < 1/2, l'ensemble lui-même, de mesure non nulle, est non dénombrable. Mais il est d'intérieur vide, car les $\frac{2k-1}{2^S}$ sont denses dans [0 , 1].

Gérard Gouby nous laisse le choix de l'ensemble, rappelant qu'il en existe de mesure arbitrairement grande. Bernard Petit précise à ce sujet que $\forall \varepsilon > 0$, on peut tropuver un ensemble non dénombrable $\subset$ [0 , 1], d'intérieur vide et de mesure > 1 – ε. En revanche, on ne peut pas trouver de fonction *partout dérivable* strictement croissante telle que $f'(x) = 0$ *presque partout* (il cite : HEWITT E. and STROMBERG K., *Real and abstract Analysis* (Springer), p. 299, (Ex. 18,41*d*)).

Car, une fois l'ensemble choisi, la fonction est facile à construire : il suffit de construire une fonction continue nulle sur cet ensemble et strictement positive sur son complémentaire, et de l'intégrer. L'ensemble des zéros étant fermé, son complémentaire est ouvert, donc réunion d'intervalles ouverts, et il suffit de définir la fonction sur chacun de ces intervalles ouverts, en veillant à ce qu'elle tende vers zéro aux bornes dudit ouvert.

Stéphane Legros utilise la distance du point à l'ensemble de CANTOR. C'est la même fonction qu'utilise Bernard Petit et presque la même qu'utilise Jacques Amon, mais en explicitant la construction. Gérald Gouby utilise une fonction polynomiale et Marguerite Ponchaux fait appel aux sinus.

On pouvait aussi utiliser des $\exp\left(\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right)$ permettant de construire des fonctions indéfiniment dérivables. Gérald Gouby et Marguerite Ponchaux construisent directement la fonction cherchée et non sa dérivée.

Signalons également que l'énoncé ne précisait pas si la fonction devait être définie sur $\mathbb{R}$ ou sur [0 , 1], mais cela ne change rien au problème : même un ensemble de zéros inclus dans [0 , 1] permet de construire une fonction solution définie sur $\mathbb{R}$.

ÉNONCÉ N°233 (Eugène EHRHART, Strasbourg)

1) Le cercle inscrit au triangle *ABC* touche les côtés *a*, *b*, *c* en *A'*, *B'*, *C'*.

Soient $(A'A'')$, $(B'B'')$, $(C'C'')$ les hauteurs du triangle $A'B'C'$. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est homothétique de ABC.

2) Soient (AA'), (BB'), (CC') les hauteurs de ABC. Le cercle inscrit à $A'B'C'$ touche ses côtés aux points $A''B''C''$. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est homothétique de ABC.

SOLUTIONS

Jean-Louis AYME (St Denis - Réunion), René BENOIST (91 - Palaiseau), Jacques BOUTELOUP (Rouen), Emmanuel BREUILLARD (élève de Poitiers, lauréat du Concours Général 1995), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Pierre DELHAY (59 - Aubry du Hainaut), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Michel GARITTIS (59 - Houplines), Christian GAUTIER (Versailles), Gérald GOUBY (46 - Bagnac), Jean-Yves HELY (Rennes), l'IREM de Bordeaux, Marie-Christine LOMBARD (Toulon), René MANZONI (Le Havre), A. MARCOURT (10 - Ste Savine), Charles NOTARI (31 - Montaut), Serge PAICHARD (53 - Laval), Maurice PERROT (Paris), Marguerite PONCHAUX (Lille), R. RAYNAUD (Digne), Jean-Paul ROUX (42 - Unieux), G. SAMBARD (St Quentin), R. STORCH (Mâcon)

24 réponses me sont parvenues, dont je vais m'efforcer de présenter la synthèse.

La technique majoritairement utilisée consiste à prouver, par des égalités d'angles inscrits, que les côtés de $A''B''C''$ sont parallèles à ceux de ABC. Par exemple, pour la première question, comme B'' et C'' sont sur le cercle de diamètre $[B'C']$, $(B''C''\ \ C''B') = (B''C',\ C'B')$, mais dans le cercle circonscrit à $A'B'C'$et inscrit dans ABC, donc tangent à $(A'C)$, $(C'B',\ C'A') = (A'B',\ A'C)$ (figure 1) d'où $(A'C) /\!/ (B''C'')$.

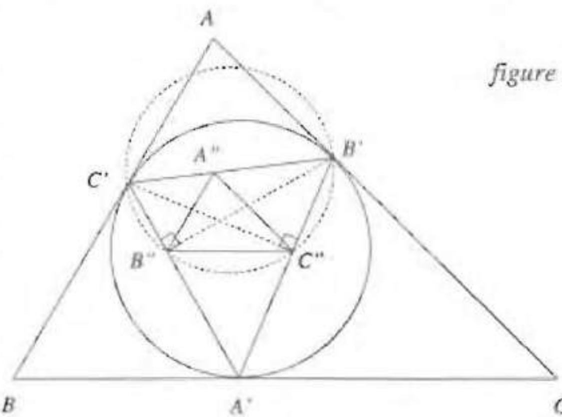

figure 1

Jean-Louis AYME signale que c'est un cas particulier de la figure de REIM : si deux c cercles (C) et (C') se coupent en M et N, une droite passant par M recoupe (C) et (C') en P et P' respectivement, une droite passant par N les recoupe en Q et Q' respectivement, alors (PQ) est parallèle à $(P'Q')$ (démonstration analogue).

A. Marcourt fait appel à la notion de paires de droites antiparallèles. Les paires de droites $(B'C', B''C'')$ et $(B'C'', C'B'')$ sont antiparallèles, ce qui signifie que leurs bissectrices ont mêmes directions, et ce qui résulte du fait que B', C', B'' et C'' sont cocycliques. On peut en dire autant des paires $(BC, B'C')$ et $(A'B', A'C')$, d'où le parallélisme $(B''C'') \,//\, (B'C')$, car $(B'C'', C'B'') = (A'B', A'C')$.

Pierre DELHAY, Edgar DELPLANCHE, Christian GAUTIER, Marie-Christine LOMBARD et R. STORCH font intervenir le centre O du cercle inscrit dans ABC, donc circonscrit à $A'B'C'$. Il est clair que $[OA']$ est orthogonal à $[BC]$, mais il est aussi orthogonal au côté $[B''C'']$ du triangle orthique de $A'B'C'$, car B'' et C'' étant sur le cercle de diamètre $(B'C')$,

$$(B''C'', B''B') = (C'C'', C'B') = \frac{\pi}{2} - \widehat{B'}$$

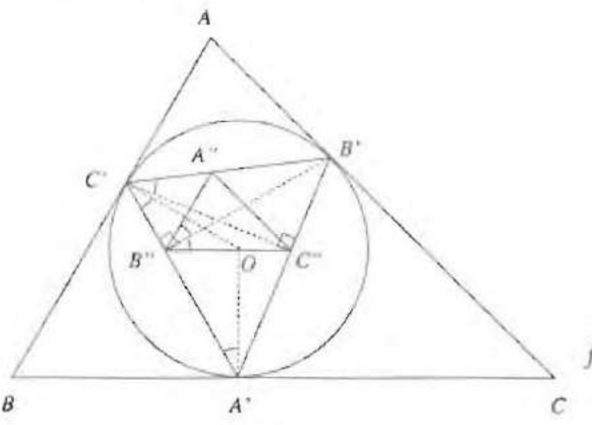

figure 2

Or, dans le triangle isocèle $OA'C'$, $(A'O, A'B'')$ vaut lui aussi $\dfrac{\pi}{2} - \widehat{B'}$; $(A'B'')$ étant perpendiculaire à $(B''B')$, $(A'O)$ est perpendiculaire à $(B''C'')$.

On peut aussi prouver, de manière analogue, que $(B''B', B''A'') = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{B'}$ dont que $(B'B'')$ hauteur du triangle $A'B'C'$ est bissectrice de son triangle orthique $A''B''C''$: c'est une propriété importante du triangle orthique que tout le monde a utilisée, au moins pour la seconde question. Emmanuel BREUILLARD, Marie-Laure CHAILLOUT, Geneviève SAMBARD s'en servent dès la première question, prouvant que les triangles ABC et $A''B''C''$ ont leurs bissectrices parallèles, donc sont homothétiques. Il est clair que $(A'A'')$, bissectrice de $\widehat{B''A''C''}$, est par définition perpendiculaire à $(B'C')$ et que la bissectrice de $\widehat{B'AC'}$ est elle aussi perpendiculaire à $(B'C')$, le triangle $B'AC'$ étant isocèle.

Mais le parallélisme des côtés ou des bissectrices suffit-il à prouver que les triangles sont homothétiques ? Il importe, entre autres choses, de s'assurer que les triangles ne sont pas en translation. Ceux qui y ont pensé l'on déduit, soit du fait que A'', B'' et C'' sont strictement intérieurs au triangle ABC (le triangle $A'B'C'$ est nécessairement acutangle), soit du calcul du rapport d'homothétie, qui est inférieur ou égal à 1/4. En effet, si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC et r le rayon du cercle inscrit dans ABC, donc circonscrit à $A'B'C'$, $r \leq R/2$. Or, le cercle circonscrit à $A''B''C''$ n'est autre que le cercle d'Euler de $A'B'C'$, qui passe également par les milieux des côtés de $A'B'C'$ et a donc pour rayon $\frac{r}{2} \leq \frac{R}{4}$. Le rapport d'homothétie est donc $\frac{r}{2R} \leq \frac{1}{4}$.

Certains ont signalé en outre que l'homothétie était de rapport positif (B'' et C'' étant intérieurs au triangle ABC, A et A' sont de part et d'autre de $(B''C'')//(BC)$; A' et A'' sont eux aussi de part et d'autre de $(B''C'')$), ou qu'elle transformait le centre O du cercle inscrit dans ABC (circonscrit à $A'B'C'$) en H, centre du cercle inscrit dans $A''B''C''$, donc orthocentre de $A'B'C'$. Le centre d'homothétie est donc sur la droite d'Euler de $A'B'C'$.

En guise de transition avec la seconde question, signalons la jolie démonstration de Jacques DAUTREVAUX, Michel GARITTIS et R. RAYNAUD. Appelons I, I_A, I_B et I_C les centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle ABC. Les bissectrices d'un angle étant perpendiculaires, (AI) est perpendiculaire à (I_AI_B), et ABC est le triangle orthique de $I_AI_BI_C$. Mais (AI) est aussi perpendiculaire à $(B'C')$, car le triangle $AB'C'$, dont (AI) est bissectrice intérieure, est isocèle. Donc $I_AI_BI_C$ et $A'B'C'$ ont leurs côtés parallèles et sont homothétiques : cette homothétie transforme ABC, triangle orthique de $I_AI_BI_C$, en $A''B''C''$, triangle orthique de $A'B'C'$.

On voit apparaître la parenté entre les questions un et deux, l'IREM de Bordeaux a d'ailleurs traité la seconde avant la première. Seulement voilà, et beaucoup de lecteurs l'ont remarqué, la seconde propriété n'est pas vraie dans tous les cas. En effet, si, dans cette seconde question, l'on appelle $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$ et $\widehat{C'}$ les angles du triangle $A'B'C'$, on en déduit les angles des triangles isocèles $A'B''C''$, $B'A''C''$ et $C'A''B''$, donc les angles du triangle $A''B''C''$; $\widehat{A''} = \frac{\pi - A'}{2}$, $\widehat{B''} = \frac{\pi - B'}{2}$, $\widehat{C''} = \frac{\pi - C'}{2}$ et ces angles sont tous trois aigus, alors que le triangle de départ ABC n'est pas obligatoirement acutangle. Comment peuvent-ils être semblables ?

Plus précisement, pour tout triangle acutangle ABC, les angles de son triangle orthique $A'B'C'$ valent : $\widehat{A'} = \pi - 2\widehat{A}$, $\widehat{B'} = \pi - 2\widehat{B}$ et $\widehat{C'} = \pi - 2\widehat{C}$; si on rapproche cela des relations précédentes : $\widehat{A''} = \frac{\pi - \widehat{A'}}{2}$, ... on comprend la similitude des triangle ABC et $A''B''C''$. Mais que se passe-t-il si $\widehat{A} > \frac{\pi}{2}$? En fait, si H est l'orthocentre de ABC, les quatre triangles ABC, ABH, AHC, HBC ont le même triangle orthique $A'B'C'$, donc le même triangle $A''B''C''$, lequel n'est homothétique que d'un seul des quatre, celui (il y en a un et un seul) qui est acutangle.(figure 3)

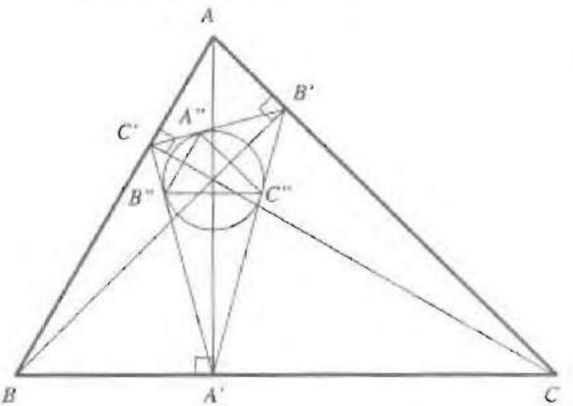

figure 3

Reprenons la démonstration la plus fréquemment utilisée : (AA'), hauteur du triangle ABC, est perpendiculaire à (BC). Mais elle est perpendiculaire à $(B''C'')$ à condition d'être la bissectrice *intérieure* de $\widehat{B''A'C''}$ dans le triangle isocèle $B''A'C''$: ce n'est pas le cas si $\widehat{B} > \frac{\pi}{2}$ ou $\widehat{C} > \frac{\pi}{2}$. Dans ces deux cas, *(B"C")* est non pas parallèle à *(BC)* mais perpendiculaire.

Autre démonstration : les tangentes en *A*, *B*, *C* au cercle circonscrit au triangle *ABC* se coupent selon un triangle $A_0B_0C_0$. Si le cercle circonscrit à *ABC* est inscrit dans $A_0B_0C_0$, alors la première question permet de résoudre la seconde. Mais ce n'est vrai que si *ABC* est acutangle, sinon son cercle circonscrit est *exinscrit* au triangle $A_0B_0C_0$.

D'où l'idée exploitée notamment par Jacques DAUTREVAUX, de reprendre la première question en remplaçant cercle inscrit par cercle exinscrit : on a encore homothétie, mais de rapport négatif $-\frac{r_A}{2R}$ (qui, comme le fait remarquer Jacques BOUTELOUP, peut être égal à (–1). Pour la seconde question, le triangle *ABC* n'est pas homothétique au triangle joignant les points de contact du cercle *inscrit* dans *A'B'C'* lorsque, par exemple, $\widehat{C} > \frac{\pi}{2}$. Mais il est homothétique, de rapport négatif, au triangle joignant les points de contact du cercle *exinscrit* à *A'B'C'* dans l'angle $\widehat{C'}$.(figure 4)

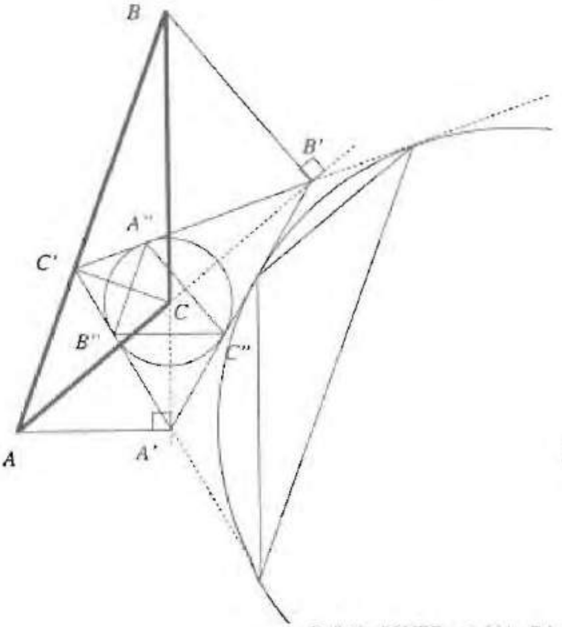

figure 4