Quel(s) rôle(s) attribuer aux instruments informatiques dans l'enseignement des mathématiques?

Eric Bruillard
IUFM de Créteil

Le leitmotiv actuel, concernant la place de l'informatique dans l'enseignement obligatoire, est celui de l'intégration. Plus exactement, le discours dominant, tel qu'il apparaît dans les notes officielles, assigne comme objectif aux enseignants l'intégration de l'outil informatique dans leur(s) discipline(s) (voir par exemple MEN 1994).

Cette convergence récente vers cette notion d'outil amène plusieurs remarques. Tout d'abord, elle correspond au rejet de deux types d'utilisation classique des ordinateurs dans l'éducation : la programmation et l'EAO (Enseignement Assisté par Ordinateur). Nous ne commenterons pas dans ce texte le bien fondé de ce choix, mais il faut bien convenir qu'il est, en tout état de cause, réducteur. Ensuite, l'emploi du mot *outil*, abusivement au singulier, semble suggérer une sorte d'objet universel et standard susceptible de s'appliquer d'une manière relativement uniforme à des contextes très divers. Ceci est contradictoire avec l'objectif d'intégration disciplinaire qui implique une spécificité fortement liée à la discipline elle-même, spécificité qui s'affirme dans une myriade d'outils distincts.

Cette convergence vers le *tout outil*, correspondant à une vision uniquement utilitaire de l'informatique, tend à réduire les instruments à ce qui est jugé directement utilisable dans le contexte scolaire actuel. D'un côté, cela suppose qu'il n'y a pas de nécessité de formation à ces instruments, censés être suffisamment simples d'emploi. De l'autre, cela impose d'ignorer ou de rejeter ce qui n'est pas directement en phase avec les programmes actuels, ce qui peut poser des problèmes délicats d'appropriation de ces instruments par les élèves, entre autres de par l'absence d'élucidation du rapport entre le fonctionnement de ces instruments et les concepts disciplinaires correspondants.

L'intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques implique de se poser la question de la place que l'on peut leur attribuer et du rôle qui peut leur être dévolu.

Quelle démarche d'intégration ?

D'une manière assez schématique, on peut opposer deux approches d'intégration d'instruments technologiques dans l'enseignement.

1- une approche descendante, dirigée par les innovations techniques. Une offre globale est proposée, sorte de flux de produits matériels et logiciels auréolé d'un discours de type prophétique, le terrain étant en charge de son appropriation et de découvrir des applications pédagogiques viables.

2- une approche ascendante, partant des enseignants eux-mêmes recherchant des aides techniques susceptibles de les assister dans la résolution de leurs problèmes professionnels, induisant une évolution lente et plus ou moins concertée.

La première approche tend souvent à remettre en cause l'organisation scolaire et les programmes actuels, jugés peu adaptés aux grandes promesses de changement véhiculés par ces nouvelles techniques. Elle est souvent ressentie comme une intrusion. La deuxième, quant à elle, reste en phase avec l'organisation actuelle et se restreint à des innovations en grande partie compatibles avec le système scolaire tel qu'il existe. Le pilotage par le haut est ici plus diffus. Le discours dominant revient à considérer la deuxième approche comme étant la seule valable. Toutefois, il faut remarquer qu'elle permet difficilement la généralisation puisque chaque enseignant demeure seul juge des instruments qu'il tolère ou qu'il intègre[1]. On tombe dans

[1] On peut noter que des instruments plus anciens comme le compas, l'équerre ou la règle sont parfaitement intégrés. Ils sont systématiquement permis, même exigés, et peuvent parfois être interdits pour des activités particulières. Il faut toutefois signaler les inégalités dues à la non homogénéité des instruments informatiques : les calculatrices, suivant leur prix, ont des performances très différentes alors que les compas, quel que soit leur prix, sont supposés rendre les mêmes services aux élèves.

l'opposition entre un phénomène de nature plutôt continue (l'extension de la communauté des utilisateurs) et un phénomène de nature fondamentalement discrète (l'inscription dans des programmes ou des examens). Une démarche purement ascendante ne peut donc, à elle seule, régler le problème de l'intégration des instruments.

Enfin, il faut remarquer que l'existence des outils de calcul et de traçage (calculatrices numériques, graphiques, formelles, ...) est un fait social majeur. En effet, d'une part ces nouveaux instruments, tels les instruments de calcul numérique, les calculatrices graphiques et les traceurs de courbes, les logiciels de calcul formel, les outils de construction géométrique, etc. sont susceptibles de résoudre en totalité ou en partie bon nombre d'exercices et de problèmes que l'on pose aux élèves ; d'autre part, en dehors de la structure scolaire, les élèves, ou tout au moins certains d'entre eux, pourront en disposer et les utiliseront. Le problème qui se pose n'est donc pas celui de l'introduction d'une technologie éducative, mais de la prise en compte d'un phénomène éminemment social par le système scolaire qui n'est pas véritablement en mesure de le contrôler.

Ainsi, cette intégration des outils dans l'enseignement des mathématiques se pose dans le cadre plus global de la finalité de cet enseignement et de son rôle social. S'agit-il avant tout de formation intellectuelle ou de formation à visée plus directement utilitaire ? La réponse à une telle question est loin d'être simple, elle peut différer suivant les niveaux et/ou les sections.

Toutefois, elle ne peut être occultée si l'on veut convenablement préciser la place qui peut être dévolue aux instruments informatiques dans l'enseignement des mathématiques.

Ainsi apparaît la nécessité d'une approche mitoyenne, de nature globale, fondée sur une vision sociale et non seulement individuelle, ainsi que le besoin de donner un véritable statut aux instruments (Bruillard 1994).

Instruments et résolution de problèmes

L'apprentissage des mathématiques est principalement basé sur la résolution de problèmes. En décrivant très grossièrement, d'une manière quasi métaphorique, les phases successives de résolution d'un problème mathématique, nous allons tenter d'illustrer divers modes possibles d'intégration des instruments.

La démarche standard part de l'énoncé d'un problème. Il s'agit tout d'abord de trouver une représentation adéquate de ce problème par l'intermédiaire d'un formalisme particulier. Cette représentation fournit un état initial qu'il s'agit de transformer à l'aide d'opérateurs, au sens large, jusqu'à l'obtention d'un état final dont l'interprétation fournit la solution cherchée.

Pour mener à bien ce processus, diverses connaissances sont nécessaires : des connaissances sur les modes de représentations, sur les objets mathématiques et les transformations qui leur sont associées, sur le contrôle de l'application des transformations. Résoudre des problèmes favorise l'acquisition de connaissances et la reconnaissance des contextes dans lesquelles elles sont opératoires. Remarquons enfin que dans de nombreux problèmes, la représentation est fournie dans l'énoncé, la résolution se réduit à l'application de techniques vues dans le cours. De plus, très souvent, le contrôle s'effectue par la vérification des tâches, voire leur réexécution [2].

Cette description un peu générale va nous servir de cadre pour préciser l'influence des instruments dans ce processus de résolution. On suppose dans ce qui suit un accès réel aussi bien matériel qu'intellectuel aux instruments.

Tout d'abord, dans ce que l'on peut qualifier d'intégration minimale d'instruments, on retrouve les mêmes types de problèmes et les mêmes représentations (figure 1). Les transformations sont les mêmes à l'exception de certaines pour lesquelles l'utilisation d'un instrument se substitue aux tâches habituelles. L'exemple le plus simple est celui de la conduite de calculs numériques avec une calculatrice. Les tâches sont équivalentes. Les connaissances nécessaires sur l'instrument se limitent au strict nécessaire pour permettre la réalisation des tâches élémentaires, elles ne sont pas liées aux problèmes ou à leurs modes de représentation. Le contrôle consiste souvent à refaire à la main. Les instruments apparaissent comme des prothèses ou des facilitateurs ne changeant fondamentalement rien aux processus en jeu. Ils interviennent dans des parties jugées peu importantes et donnent l'occasion de se concentrer sur les autres parties jugées plus centrales. Sur des points calculatoires, la classe de problèmes s'étend légèrement : les calculs longs et fastidieux peuvent être dévolus aux machines. Des nombres

	Problème	Représentation	Etat initial Suite de tâches Etat final	Connaissances Concept Savoir-faire Contrôle
Standard S	P →	$\Omega_j \to EI_j$	$\Sigma_i T_{ij} \to EF_j$	K
Intégration minimale S + I	P → idem ou étendu	$\Omega_j \to EI_j$	$\Sigma_i T'_{ij} \to EF_j$ avec $T_{ij} = T'_{ij}$ presque partout *(substitution)*	K + $K(I.\ T_{ij})$

2 Ces deux points sont signalés uniquement pour rappeler que les résolutions sont souv ent tronquées et que l'apport d'instruments le met en exergue.

plus grands ou des fonctions plus complexes peuvent par exemple être introduits.

Concernant la maîtrise des instruments eux-mêmes, si les usagers ne disposent pas de connaissances complémentaires, elle se limite à un spectre très étroit correspondant aux tâches habituelles effectuées avec les instruments dans les processus de résolution. Quelques savoir faire correctement exécutés suffisent à assurer la performance souhaitée. Les contextes de mise en oeuvre sont très cadrés et ne donnent qu'une vue très partielle des performances et des limites des instruments utilisés. A ce propos, on critique le recours systématique des élèves aux aspects les plus calculatoires. Ceux-ci s'avèrent en effet plus rassurants parce que fonctionnant quasiment à tous les coups. Ce recours aux tâches les plus mécaniques ne peut être que renforcé par l'existence d'instruments de calcul.

Les instruments peuvent être intégrés d'une manière beaucoup plus profonde. Partant d'une classe de problèmes similaires, d'autres représentations peuvent être abordées, conduisant à une nouvelle organisation des tâches. Dans ce cadre, la représentation choisie tient compte de l'existence des instruments. Par exemple, avoir à disposition des instruments de construction géométrique autorisant les déformations respectant les contraintes de construction (tel Cabri Géomètre), favorise sans conteste la formulation de conjectures. Des problèmes de géométrie peuvent être énoncés de manière plus globale et non plus seulement sous la forme traditionnelle d'une succession de questions conduisant au résultat (On évite le "Démontrez que telle propriété est vraie"). De plus, certains invariants peuvent fournir des indices utiles à la démonstration. Dans des exercices d'analyse ou d'arithmétique, la disposition d'instruments de calcul (numérique et/ou formel) permet d'étudier un maximum d'exemples, de cas particuliers, plutôt que de partir des formules générales données à l'avance. L'étude de problèmes longs ne semble plus hors de portée.

La classe des problèmes étudiés est susceptible d'être considérablement étendue. L'étude de phénomènes de cryptographie (théorie des nombres, arithmétique), tout comme certains aspects de la modélisation ou du traitement des données peuvent être entrepris. L'exploration de ces nouveaux domaines est compatible avec l'idée de mathématiques plus exploratoires, qui semblent recueillir de nombreux suffrages (voir par exemple, Cornu 1992). De nouveaux savoirs acquièrent par ailleurs une importance capitale (Cuppens 1994).

La connaissance des outils ne se limite plus à l'application de quelques procédures particulières.Elle intègre des critères d'applicabilité à des situations et s'associe aux concepts mathématiques qui sont manipulés. Les outils n'apparaissent plus comme des substituts, mais comme faisant partie intégrante de la résolution. De nouvelles connaissances sont à la fois nécessaires et acquises par la résolution de problèmes. Une appropriation véritable des instruments s'avère indispensable. La programmation, qui avait été laissée de côté, peut réapparaître. Elle ajoute de la flexibilité et de la puissance aux instruments disponibles, sous réserves de compétence suffisante des utilisateurs.

	Problème	Représentation	Etat initial Suite de tâches Etat final	Connaissances, Concept Savoir-faire Contrôle
S + I	$P' \to$ extension de P	$\Omega'_j \to EI'_j \to$ autre représentation	$\Sigma_k T'_{kj} \to EF'_k$ nouvelle organisation	$K' + K(I, P)$ nouvelles connaissances
S + I	$P'' \to$ autre type	$\Omega''_j \to EI''_j \to$	$\Sigma_k T''_{kj} \to EF''_k$	$K'' + K(I, P')$

figure 2

Pour résumer, l'utilisation des instruments dans une intégration minimale se limite aux tâches élémentaires alors que dans un usage plus général, l'ensemble du processus peut être modifié [3].

Instruments : appropriation et détournement

Nous venons de voir que l'intégration d'instruments suppose une phase d'appropriation. Partir d'un problème et choisir l'outil adapté est certainement la démarche optimale. Encore faut-il être capable d'effectuer ce choix, ce qui est loin d'être si simple. En effet, une caractéristique commune des instruments informatiques est qu'ils sont relativement adaptatifs et s'intègrent plus ou moins bien à des situations très diverses. Une dissymétrie importante existe entre les élèves et les enseignants. Si ces derniers ont une maîtrise certaine des concepts mathématiques sur laquelle ils peuvent s'appuyer dans leur travail avec les instruments, ce n'est pas le cas des pre-

3 Réfléchir sur les notations mathématiques n'est sans doute pas inutile. On tend souvent à confondre le support et le mode de traitement. L'imprimerie a permis la stabilisation de notations, qui ont un rôle essentiel en mathématiques. Disposer d'une craie ou d'un stylo permet de mettre en œuvre ces notations. Les outils de traitement actuels contraignent parfois les notations que l'on peut utiliser mais peuvent permettre d'en mettre en œuvre de nouvelles. Les notations ne sont pas indépendantes des instruments avec lesquels on les traite.

miers. Bien qu'une aisance technique manifeste puisse parfois tromper, force est de constater que les élèves ne sont pas bien assurés de leurs connaissances.

On peut opposer deux démarches :

- la démarche standard d'usage des outils part des problèmes, les décompose éventuellement en sous-problèmes pour lesquels on trouve un outil spécifique et bien adapté.
- la démarche d'intégration générale d'outils consiste à partir de l'outil et déterminer la classe de problèmes que l'on peut traiter avec, quitte à rendre cet usage très complexe et sortir de frontières qui semblent naturelles.

Si la première démarche est sans doute la plus cohérente, la seconde est certainement nécessaire dans une phase d'appropriation d'un outil particulier. Les *catachrèses*[4] s'avèrent en effet importantes dans la maîtrise d'instruments complexes. Cela apparaît dans les compte rendus[5] des formateurs sur les situations qu'ils mettent en place avec les élèves. On observe ainsi, par exemple, l'emploi d'un logiciel de traitement formel pour l'obtention de résultats numériques alors qu'il existe des outils consacrés au numérique (tableur) plus adaptés. A l'inverse, on observe des usages d'instruments successifs alors que le même outil pouvait être conservé tout au long d'une activité. Le détournement est utile pour l'utilisateur final pour s'approprier un outil et les formateurs ne se privent pas du plaisir d'explorer les frontières des instruments en se lançant des défis, en étudiant leur applicabilité dans des contextes a priori éloignés des situations d'usage de référence. Par cette activité, les utilisateurs contribuent à la conception des usages des instruments (RABARDEL 1995).

N'oublions cependant pas que ces détournements, importants pour asseoir une bonne appropriation, ne sont pas opérés par tous les utilisateurs. S'ils sont faits par les formateurs, ils le sont rarement par les élèves et par la plupart des enseignants, très souvent faute de temps à y consacrer. Les usages un peu déviés se justifient pour la maîtrise par des formateurs, pas pour les élèves. La notion de scénario qui apparaît comme indispensable pour la viabilité scolaire tend à limiter et contrôler l'emploi des instruments, sans toujours s'assurer que les élèves ont pu développer une aisance suffisan-

4 Métaphore qui consiste à employer un mot au-delà de son sens strict ou littéral comme les pieds d'une table ou les bras d'un fauteuil. Cela désigne aussi l'utilisation d'un outil à la place d'un autre ou l'utilisation d'outils pour des usages pour lesquels ils ne sont pas conçus, comme planter un clou avec un tournevis.

5 Nous ne donnerons pas de référence particulière sur ce point.

te, surtout au niveau conceptuel alors que certains savoir-faire peuvent paraître correctement intégrés. Le problème se pose de créer une sorte de communauté d'utilisateurs, intermédiaire entre une communauté de spécialistes et le quasi grand public.

Si on n'aide pas les élèves à se forger une connaissance suffisamment solide des possibilités et limites des instruments, en relation avec les concepts mathématiques associés, on risque d'aller vers des déconvenues. La dissymétrie entre les élèves et les enseignants est importante à prendre en compte, et spécialement dans l'acquisition des connaissances avec les instruments.

Les résultats fournis par un outil ne sont jamais si simples à interpréter. Cette interprétation doit-elle se baser sur les connaissances mathématiques générales (en fait celles de l'enseignant), sur celles de l'élève et/ou sur une connaissance du mode de fonctionnement de l'outil lui-même. L'usage des instruments devrait aboutir à de nouvelles connaissances, de nouvelles conceptualisations (processus de genèse instrumentale, RABARDEL 1995). Elles ne seront pas toujours cohérentes, et d'autant moins que l'on ne prendra aucune précaution. (voir par exemple KUNTZ 1993, TROUCHE 1994,...). On s'aperçoit que la diffusion d'instruments comme les calculatrices graphiques pose non seulement le problème du statut de ces objets mais aussi la question complexe du statut des images (TROUCHE 1994). Ces instruments invitent à nous poser des problèmes mathématiques assez profonds.

Conclusion

La diffusion d'instruments dans le système scolaire est un processus complexe. Dans ce texte, nous avons volontairement laissé de côté de nombreux facteurs intervenant dans ce processus ainsi que les divers obstacles liés aux structures (organisation, évaluation), aux opinions des enseignants ainsi que leur connaissance et leur degré de maîtrise de ces instruments.

La question qui se pose est bien de savoir si les instruments font partie des mathématiques et de quelle manière. Deux écueils à éviter nous guettent :
1 - le risque de réduire une partie des mathématiques à des manipulations techniques peu formatrices
ou
2 - la tentation d'exclure les instruments des activités mathématiques dans l'enseignement.

Si on pense que les instruments ont une place, il est alors nécessaire de les introduire dans la formation des enseignants. L'urgence sur ce point semble être la formation initiale. En effet, s'il est difficile de prévoir l'évolution de l'enseignement des mathématiques, l'existence et la diffusion progressive des instruments touchant les mathématiques est irréversible. La connaissance minimale de ces outils doit être vue comme étant partie intégrante des connaissances que l'enseignant doit avoir à sa disposition, qu'il les mettent en oeuvre directement ou non dans sa classe. Sans compter qu'un travail avec les instruments peut favoriser une réflexion en profondeur sur les mathématiques elles-mêmes et ses modes d'apprentissage.

Bibliographie

BALACHEFF N. & VIVET M. (eds.) (1994), *Didactique et Intelligence Artificielle*, Recherches en didactique des mathématiques, vol 14/1.2, La Pensée Sauvage, 310 p.

BRUILLARD E. (1994). *Quelques obstacles à l'usage des calculettes à l'école : une analyse*, Grand N, n°53, pp.67-78.

CORNU B (ed.) (1992). *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, POE, 329 p.

CUPPENS R. (1994), *Les moyens de calcul modernes vont-ils révolutionner l'enseignement des mathématiques*, Bulletin APMEP, n°394, pp.279-293.

KUNTZ G. (1993). *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, Repères IREM, n°11, pp.5-31.

MEN (1994). *Enseignement des Mathématiques et logiciels de Calcul Formel, DERIVE un outil à intégrer*, Ministère de l'éducation nationale, Bureau des Innovations Pédagogiques et des Technologies Nouvelles , Paris, 1993, 199 p.

NWANA H. S. (ed.) (1993). *Mathematical Intelligent Learning Environments*, Intellect Books, 272 p.

RABARDEL P. (1995 à paraître). *Agir avec des instruments : de l'outil aux systèmes techniques, une approche cognitive*, Armand Colin, Paris, 224 p.

ROBERT A. (1993). *Eléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices programmables en première S et en Terminales C et E*, Repères IREM, n°11, pp.77-96, .

TROUCHE L. (1994). *Calculatrices graphiques : la grande illusion*, Repères IREM, n°14, pp.39-55,