Souci d'exactitude

Yves Baelde
Collège P. de Ronsard (Paris)

$\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ ou tan 15°

pourquoi ne pas le remplacer par sa valeur ?

S'il était toujours possible d'écrire un nombre sous forme d'une fraction, nous pourrions inventer, dans certains cas, une infinité de triangles semblables de plus en plus petits, dont deux côtés auraient toujours des longueurs entières. Ce serait absurde.

Il y a trente ans, l'intérêt des calculs formels n'était pas confronté à cet obstacle : la perfection mythique des calculs sur ordinateur, ou sur calculatrice. Pourtant, les fonctions "cos" et $\boxed{\sqrt{}}$ sont au programme de l'enseignement dès la classe de 4ème.

Devant les annales du Brevet des Collèges, mettez-vous à la place du candidat. Vous devrez transformer des écritures avec des racines carrées. Distinguer les fonctions mathématiques des fonctions de la calculatrice, devant les symboles «cos» ou $\boxed{\sqrt{}}$. Et choisir entre les deux signes = et ≈. Ces jeux d'écriture auront du sens aux yeux des collégiens s'ils ont déjà rencontré quelques grandeurs impossibles à exprimer sous forme d'une fraction. Tout comme devraient être exhibés quelques quotients de nombres entiers impossibles à écrire sous forme décimale, pour justifier l'apprentissage des calculs avec des fractions. Les démonstrations sont-elles trop compliquées pour les élèves ? Il faudra néanmoins, au fil du temps, convaincre chacun des erreurs des machines électroniques dans la plupart des calculs.

Premières critiques de calculs sur machines

Pour un élève persuadé de l'exactitude des calculs électroniques, une démonstration de l'égalité $4\cos 36°=1+\sqrt{5}$, par exemple, pourra sembler longue et vaine. Car il voit sa machine afficher le mêms nombre décimal pour $1+\sqrt{5}$ et pour $4\cos 36°$. Par contre, il sera plus attentif à la démonstration de l'égalité si sa calculatrice a déjà été mise en défaut plus d'une fois.

Par exemple, $\sqrt{9800}$ vaut-il $8,994\,949\,3$? Sept fois sept quarante-neuf, je pose donc un chiffre neuf après la virgule. Et neuf n'est pas zéro. La calculatrice commet donc une «petite» erreur.

Imaginons maintenant qu'une calculatrice affiche $0,809\,016\,994\,4$ pour $\cos 36°$, et $0,309\,016\,994\,4$ pour $\cos 72°$. Le dernier chiffre affiché est 4 dans les deux cas. Le produit des deux nombres décimaux s'écrit donc avec un chiffre 6 au $20^{\text{ème}}$ rang après la virgule, puisque $4\times 4 = 16$. Or, la calculatrice affiche $0,25$ pour le produit des deux cosinus. Et le vingtième chiffre après la virgule est zéro, dans une écriture décimale de $0,25$. Alors, même sans preuve à l'appuide l'égalité $\cos 72° \cos 36° = 0,25$, une chose est quand même certaine : au moins l'un des trois affichages de la machine est inexact.

Mais l'égalité (exacte) peut être facilement prouvée. La démonstration n'est pas d'un niveau supérieur au programme du collège.

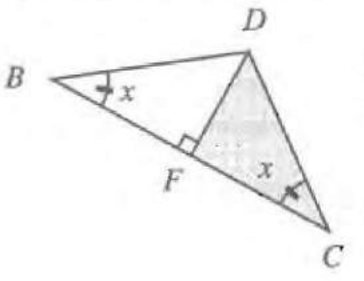


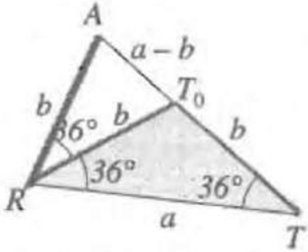
figure s Dans un triangle ART,

si $\widehat{ART} = \widehat{TAR} = 72°$,

alors $\dfrac{AT}{AR} = \dfrac{TR}{AR} = \dfrac{1}{2\cos 72°}$.

Si (RT_0) est la bissectrice de $\widehat{ART}$,

alors $\widehat{AT_0R} = 72°$,et $T_0T = T_0R = AR$. Dans le triangle ART_0,



on a donc $\dfrac{AR}{AT_0} = \dfrac{1}{2\cos 72°}$.

Ce rapport de longueurs : $\dfrac{AR}{AT_0}$, de la plus grande à la plus petite, vaut donc le rapport du total des longueurs à la plus grande, soit $\dfrac{AT}{AR}$. Le nombre exhibé répond à la définition du nombre d'or donnée par le dictionnaire Petit Robert (voir Nombre) : un rapport entre la plus grande des deux parties et la plus petite, égal au rapport entrele tout et la plus grande. Désignons ce nombre célèbre par la lettre φ.

Dans le triangle isocèle T_0RT, $\varphi = \dfrac{TR}{T_0R} = 2\cos 36°$

En posant $TR = a$ et $AR = b$, on obtient donc :

$$\varphi = \frac{a}{b} = 2\cos 36° = \frac{1}{2\cos 72°} = \frac{b}{a-b}.$$

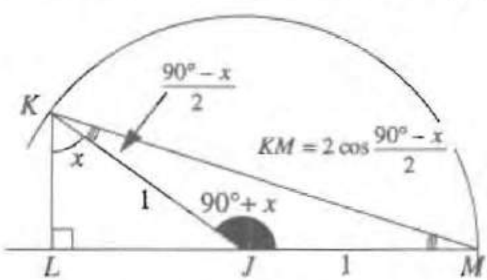
On en déduit ce qui était annoncé : $\cos 72° \cos 36° = 0,25$.

De plus, $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{a}{b} - 1 = \varphi - 1$. Donc, $\varphi - \varphi^{-1} = 1$.

Et alors $\cos 36° - \cos 72° = 0,5$. Mais cette égalité-là ne permet pas de marquer la différence entre le calcul informatique et le calcul mathématique : l'erreur de la machine n'est pas dépistée.

D'autres produits de cosinus peuvent être transformés, grâce à l'étude d'une figure assez simple.

Si $\alpha + \beta = 90°$, alors $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)$. La relation devient



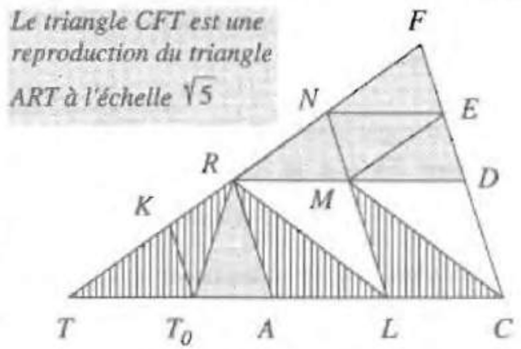
$$KL = 2\cos\frac{90° - x}{2} = \cos\frac{90° + x}{2} = \cos x$$

$$x + \frac{90° - x}{2} = \frac{90° + x}{2}$$

$2(\cos 45°)^2 = 1$, quand $\alpha = \beta = 45°$. Etudions plutôt le cas où $0 < \beta < \alpha < 90°$.

En classe de 4ème, la figure peut être demandée pour $x = 60°$.L'égalité suivante est alors prouvée : $\cos 15° \cos 75° = 0,25$. Mais deux nombres décimaux remplissent l'écran d'une calculatrice pour $\cos 15°$ et pour $\cos 75°$, et leur produit ne peut pas valoir $0,25$.

Dans une figure un peu plus compliquée, on prouve géométriquement cette relation : $(4 \cos 36° - 1)^2 = 5$. Certaines calculatrices afficheront après la virgule dix chiffres pour $\cos 36°$, et neuf chiffres après la virgule pour $4 \cos 36°$, avec un chiffre 8 en dernier. Et si le neuvième et dernier chiffre affiché est 7 pour $1 + \sqrt{5}$, nous pourrons nous demander quel est le nombre décimal le plus proche de $4 \cos 36°$, ou de $1 + \sqrt{5}$, à l'ordre 9.



Nous reprenons le triangle ART, avec ses deux angles de 72°, et (RT_0) la bissectrice de $\widehat{ART}$ .De plus,(T_0K) est parallèle à (AR). La translation de vecteur $\overrightarrow{TR}$ transforme le triangle T_0KT en MNR. Celle de vecteur $\overrightarrow{TT_0}$ transforme A en L, L en C, et le triangle MNR en DEM. Et la translation de vecteur $\overrightarrow{TK}$ transforme le point N en F.

Les propriétés suivantes sont alors démontrées :
$KT = TT_0 = T_0R = AR$; DFR est une reproduction à l'échelle 2 du triangle T_0KT, ou de ART_0; le quadrilatère $ACDR$ est un parallélogramme, dont l'aire vaut quatre fois celle du triangle T_0RT ; TCF est une reproduction du triangle TAR, à l'échelle $\frac{CF}{AR}$;et l'aire du triangle TCF vaut cinq fois celle du triangle TAR.

TCF est donc une reproduction du triangle TAR à l'échelle .Alors,

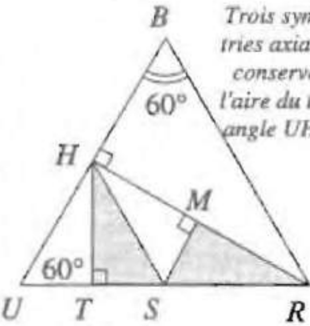
$$\sqrt{5} = \frac{CF}{AR} = \frac{CD + 2DE}{CD} = 1 + 2\frac{DE}{CD}.$$

Or, $\dfrac{DE}{CD} = \dfrac{AT_0}{AR} = 2\cos 72° = \varphi^{-1} = \varphi - 1.$

Donc, $\sqrt{5} = 1 + 2(\varphi - 1) = 2\varphi - 1.$

Le nombre d'or peut donc s'écrire : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que $4\cos 36° = 1 + \sqrt{5}$.

La théorie du discriminant permet une résolution plus rapide de l'équation $x = 1 + x^{-1}$. Mais, sans géométrie, la question de l'existence d'une solution serait complètement escamotée.



Trois symétries axiales conservent l'aire du triangle UHT.

$\sqrt{3}$ se manifeste dans cette figure, où l'aire du triangle UHT est triplée, tandis que ses proportions sont conservées. Le triangle BRH est reproduit à l'échelle cos 30°, et $(\cos 30°)^2$ vaut le rapport des aires de HRT et BRH. Malgré un arrondi en chemin, une calculette trouve comme nous 0,75, quelle merveille !

Voici d'autres relations algébriques entre des irrationnels, dans une figure où $\widehat{ABC} = 45°$ et où $\widehat{BCA} = 105°$. La figure sera complétée au moment de prouver la nature des nombres, quand des triangles se répèteront à l'infini.

Mais la géométrie est irremplaçable au départ, quand elle révèle l'existence d'un nombre $\dfrac{a}{b}$ qui vaut aussi $\dfrac{a-b}{3b-2a}$.

$BE = 2JC = AC = b$

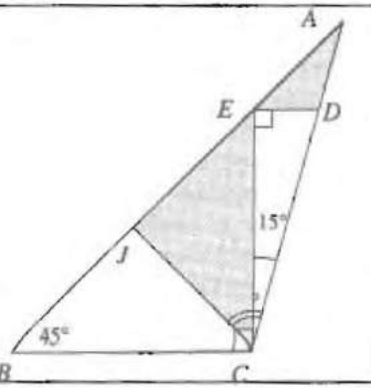
$a = AB = AJ + JB = b\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

$AE = AJ - JE = b\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$

$CD = 2AE = 2(a-b)$; $AD = 3b - 2a$

$\dfrac{BE}{CD} = \sqrt{2}\cos 15° = \dfrac{a}{b}$



La même homothétie de centre A transforme B en E, et C en D.

Son rapport vaut : $\frac{ED}{BC}$ ou $\frac{AD}{AC}$. Or, $\frac{ED}{BC} = \frac{ED}{EC} = \tan 15°$.

Et $\frac{AD}{AC} = \frac{3b - 2a}{b} = 3 - 2\frac{a}{b} = 3 - \left(1 + \sqrt{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

Donc, $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$. Et la relation $\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) = 4 \cos 15°$ est une conséquence des égalités suivantes :

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{b} = \frac{BE}{CD} = \frac{BE}{CE} \times \frac{CE}{DE} = \sqrt{2} \cos 15°.$$

En multipliant «à la main» les deux nombres décimaux fournis par la calculatrice pour $\sqrt{2}$ et pour $1 + \sqrt{3}$, on obtient deux fois plus de chiffres après la virgule que dans le produit calculé par la machine. Il est clair que le calcul informatique est un calcul arrondi. Ce genre de constatation ne passionne pas l'enseignant de mathématiques. Le seul ensemble des nombres entiers est déjà impossible à représenter par une machine, qui ne peut enregistrer qu'un nombre fini d'informations, et qui doit travailler en un temps limité. Mais les élèves n'assimilent pas tous en même temps la différence entre les deux calculs, informatique et mathématique. Et c'est devant les limites d'une calculatrice que se pose, pour certains élèves, le premier problème avec l'infini.

Un jeu de gnomons

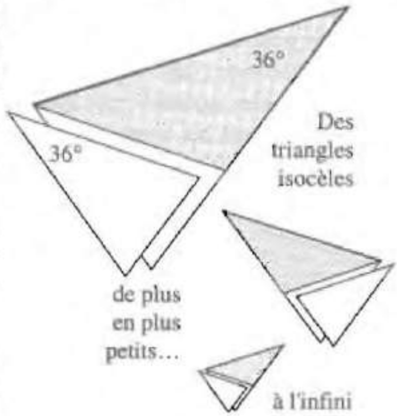
Pour prouver que deux côtés d'un triangle ont des longueurs incommensurables, nous supposons d'abord le contraire de la conclusion voulue. Dans cette hypothèse où le rapport des deux longueurs vaut une certaine fraction, nous inventons une succession absurde de triangles semblables. Une infinité de triangles de plus en plus petits ont deux côtés avec des longueurs entières. Mémoriser les moyens d'inventer de telles suites absurdes nous paraît plus facile avec les gnomons. Mais rien n'oblige à utiliser le mot, ni à parler d'un procédé mnémonique.

Le concept de gnomon nous vient de l'antiquité gréco-romaine. On le trouve maintenant dans des ouvrages de vulgarisation ou d'histoire des sciences. Par exemple, à la page 41 du *Que Sais-je* intitulé " Le nombre d'or ", le mot gnomon n'apparaît pas, mais l'idée s'y trouve. Et dans le tome 1 de l'Histoire Générale des Sciences (PUF), intitulé La Science Antique et Médiévale, le mot figure dans deux acceptions différentes.

L'emploi d'un mot désuet et quelques éléments d'histoire des mathématiques ne suffiront pas à donner du charme à un cycle de leçons.

Mais voici une belle idée.

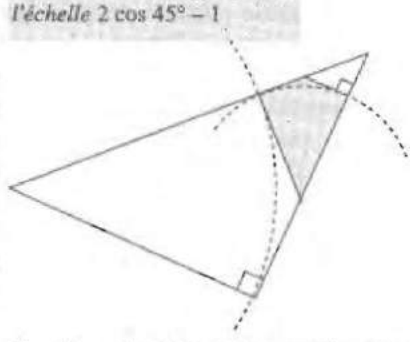
Dans une succession infinie de figures planes de plus en plus grandes, nous appelons **gnomon** d'une figure donnée ce qu'on lui " ajoute " pour obtenir la figure suivante. Dans les exemples qui nous intéressent, les figures successives sont des triangles semblables, avec un rapport de similitude constant d'un triangle au suivant. Et le gnomon d'un triangle est un polygone qui lui est juxtaposé, pour constituer avec lui un pavage du triangle suivant.



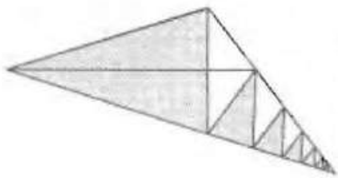
Au lieu d'ajouter un polygone au triangle, on peut lui en " enlever " un, pour rapetisser le triangle dans le rapport de similitude inverse. Dans cette autre succession infinie, où les triangles sont de plus en plus petits, nous appelons aussi **gnomon** du triangle le polygone qui lui est " enlevé " pour obtenir le triangle suivant.

Nous examinons des figures où le triangle initial est pavé de plusieurs gnomons successifs, plus un petit triangle semblable au premier. Et l'aire de ce dernier triangle devient arbitrairement petite quand les gnomons sont en nombre suffisant. Donc, le pavage permet aussi d'illustrer le calcul de la somme infinie des aires des gnomons. Dans la figure, on voit encore s'ajouter à l'infini des longueurs. Mais la première utilité du procédé est de trouver deux longueurs incommensurables. Ce but est atteint sans parler de similitude, et sans se préoccuper des valeurs des échelles de reproduction d'un triangle à l'autre.

Deux gnomons consécutifs, dans une succession de triangles rectangles isocèles, rapetissés à chaque fois à l'échelle $2 \cos 45° - 1$



Devant une classe de Terminale, parler d'un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$, c'est parler d'un moyen d'améliorer la connaissance quantitative du nombre $\sqrt{2}$, c'est ouvrir la porte sur le calcul infinitésimal. Or, nous utilisons déjà un algorithme pour prouver l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction. Les moyens de connaître $\sqrt{2}$ qualitativement et quantitativement peuvent donc se ressembler, et tant mieux. Un auditoire de Terminale pourrait ainsi reconnaître une musique entendue naguère au collège ou en Seconde : une répétition à l'infini. L'algorithme absurde des triangles rectangles isocèles était donné dans le *Bulletin* de l'APMEP n° 391, à la page 551. Mais les triangles de plus en plus petits étaient disposés autrement. L'idée de gnomon n'y était pas.



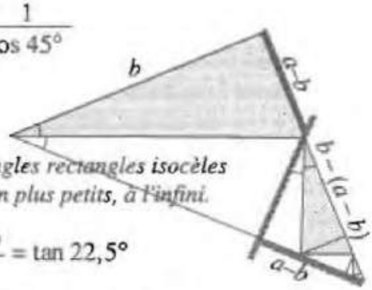
Dans cette démonstration-là, nous n'avions pas écrit $\sqrt{2}$ pour désigner le rapport des longueurs de l'hypoténuse à un autre côté du triangle rectangle isocèle. Nous avions ignoré le théorème de Pythagore et la notion d'aire. Et dans les preuves qui suivent, nous nous passerons encore de la fonction $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Le principe est le même dans n'importe quel triangle. Si on prend comme unité de longueur celle d'un côté d'un certain triangle, et si la longueur d'un autre côté vaut une certaine fraction $\frac{a}{b}$, alors, dans la reproduction de ce triangle à l'échelle b, les deux côtés correspondants auront des longueurs entières. Pour obtenir ces deux longueurs entières, des élèves auront l'idée de garder le même triangle, et de changer d'unité de longueur. C'est dire qu'il existe une partie *aliquote* des deux longueurs considérées.

Pour prouver par l'absurde que les deux longueurs sont incommensurables, nous les supposons d'abord entières. Et à partir de là, nous inventons une suite infinie de longueurs entières, qui est strictement décroissante.

Par exemple, avec des angles de 45° et 105° dans un triangle, les côtés du triangle opposés à ces deux angles ont des longueurs incommensurables. Pour le démontrer, nous supposons que ces deux côtés-là ont des longueurs

$$\frac{a}{b} = 2\cos 45° = \frac{1}{\cos 45°}$$



Des triangles rectangles isocèles de plus en plus petits, à l'infini.

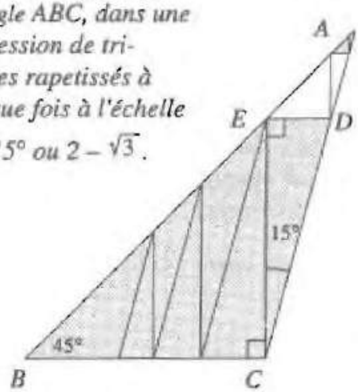
$$\frac{a-b}{b} = \tan 22{,}5°$$

entières. Et nous inventons une succession infinie de triangles de plus en plus petits, qui ont encore des angles de 45° et 105°, et dont les côtés opposés à ces angles ont des longueurs entières.

La figure a déjà été donnée, où $\widehat{ABC} = 45°$ et $\widehat{BCA} = 105°$.

Nous avions posé $AB = a$ et $AC = b$. Les longueurs correspondantes du triangle semblable AED sont : $AE = a - b$ et $AD = 3b - 2a$. Et aucune de ces deux longueurs ne peut ête ni négative, ni nulle.

BCDE est le gnomon du triangle ABC, dans une succession de triangles rapetissés à chaque fois à l'échelle tan 15° ou $2 - \sqrt{3}$.



Par conséquent, si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, alors $a - b \in \mathbb{N}$, et $3b - 2a \in \mathbb{N}$.

Le triangle AED a toutes les propriétés du triangle initial ABC. Sans autre considé-ration géométrique, nous pouvons donc itérer le procédé.

Posons $a_0 = a - b = AE$. Puisque $b \neq 0$, alors $0 < a_0 < a$. Une suite infinie de nombres entiers naturels, notée $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ peut être définie par récurrence. Et on prouve par récurrence qu'elle est strictement décroissante. Il est donc absurde d'écrire sous forme d'une fraction le rapport des longueurs AB et AC. Une autre suite absurde basée sur l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{b}{2(a-b)}$.

Si $\sqrt{3}$ était un nombre rationnel, alors $\frac{a}{b}$ en serait un aussi, puisque $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Donc, $\sqrt{3}$ est irrationnel. Les nombres cos 30° et tan 15° le sont aussi, puisque $\sqrt{3} = 2 \cos 30° = 2 - \tan 15°$. Supposons encore que cos 15° soit rationnel. On pourrait alors écrire (4cos 15°) 2 sous forme d'une fraction, soit $2(1 + \sqrt{3})^2$, ou encore $2(4 + 2\sqrt{3})$. Ce serait absurde. Or, $\cos 15° = 0,25(\cos 75°)^{-1}$. Les deux derniers cosinus sont donc irrationnels.

Preuves groupées pour $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$

$\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$ sont irrationnels, vous pouvez le prouver en raisonnant sur l'équation $n(x-1) = x^{-1}$, quand n vaut 4, ou 2, ou 1.

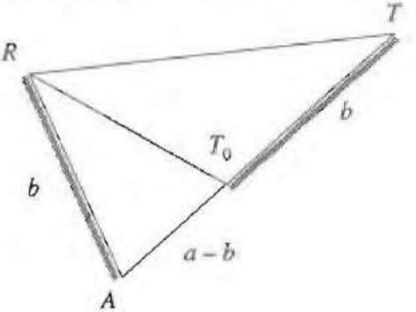
Notons $\frac{a}{b}$ un quotient de deux entiers naturels, qui serait une solution de $\frac{1}{x} = 4(x-1)$. Alors $\frac{b}{a} = \frac{4(a-b)}{b} > 0$, et donc $a > b$.

La fraction $\frac{a}{b}$ qui vérifie notre équation vaut donc un autre quotient d'entiers naturels : $\frac{b}{4(a-b)}$. Et nous avons diminué le numérateur de la fraction. En itérant le procédé, nous générons une suite infinie d'entiers naturels, qui est strictement décroissante. C'est absurde. Alors, à condition de croire en son existence, la solution positive de notre équation est un nombre irrationnel. Reste à démontrer que ce nombre vaut : $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, et à trouver absurde toute fraction égale à $\sqrt{2}$.

Avec l'équation $n(x-1) = x^{-1}$, où n est un entier naturel non nul, on aboutit à cette conclusion : $\sqrt{n(n+4)}$ est un nombre irrationnel.

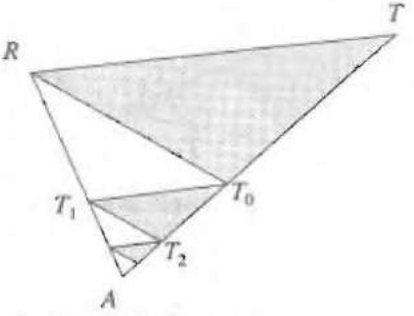
Les raisons d'un nombre fétiche

Avec un gnomon très simple, on trouve que cos 36° et cos 72° sont irrationnels. Il est impossible que $\frac{AT}{AR}$ vale le nombre d'or φ et que les longueurs AR et AT soient entières. Prouvons-le par l'absurde. Posons $AT = a$ et $AR = b$. Supposons que $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. Et construisons sur $[AT]$ le point T_0 tel que $T_0T = AR$.



Nous pouvons écrire :

$\frac{AT_0}{AR} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 = \varphi - 1.$ Et les deux longueurs AR et AT_0 sont entières, puisque $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ et $AT_0 = a - b$. Le triplet de points $(A\ ;T_0\ ;R)$ a donc toutes les propriétés du triplet initial $(A\ ;R\ ;T)$. En itérant le procédé, nous inventons une suite infinie de longueurs entières $(AT_i)_{i \in \mathbb{N}}$, strictement décroissante. C'est absurde. Donc, le nombre d'or φ est irrationnel. L'algorithme est mieux visualisé quand les points A, R et T ne sont pas alignés.



Notons enfin l'équivalence logique de ces quatre phrases :

→ cos 72° est irrationnel ;

→ le nombre d'or j est irrationnel ;

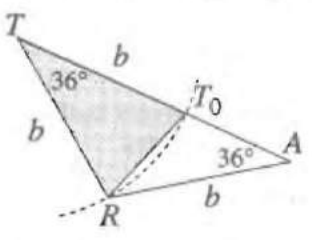
→ cos 36° est irrationnel ;

→ $\sqrt{5}$ est irrationnel.

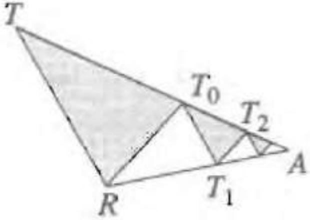
$$\varphi = (2\cos 72°)^{-1} = 2\cos 36° = 0,5\,(1+\sqrt{5})$$

Si l'un des nombres cos 72°, φ, cos 36° ou $\sqrt{5}$ pouvait s'écrire sous forme d'une fraction, alors nous pourrions en déduire l'écriture sous forme d'une fraction de n'importe lequel des trois autres nombres. Les quatre phrases précédentes sont donc équivalentes.

Deux cas particuliers de figure nous intéressent. Le triangle ART est isocèle en T si $\widehat{TAR} = 72°$. Et il est isocèle en R quand $\widehat{TAR} = 36°$.



Appelons triangles de type 1 ceux qui ont deux angles de 72°, et triangles de type 2 ceux qui ont deux angles de 36°. Un triangle de type 1 ou 2 peut être pavé par deux triangles isocèles, l'un de type 1, l'autre de type 2. Dans l'une ou l'autre figure, la notion de cosinus permet de prouver l'existence de deux longueurs a et b telles que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$. Nous ne parlons pas d'une existence mathématique au sens strict du terme. La solution positive de l'équation $x^{-1} = x - 1$ devrait prendre une consistance pour l'élève sur un plan affectif et culturel, avant qu'il puisse écrire ce nombre avec le symbole $\sqrt{\square}$. Car cette écriture-là est inutile pour prouver que le nombre d'or est irrationnel.



Pour l'enfant, ce qu'il manipule existe . Par exemple, l'aire d'un carré peut être doublée, donc le nombre $\sqrt{2}$ existe. L'élève donne une existence à ce qu'il produit : constructions géométriqueset résultats de calculs. Son monde s'agrandit quand il idéalise ses instruments de dessin. Et la géométrie l'oblige à découvrir de nouvelles techniques de calcul, où les machines à calculer sont disqualifiées. Des élèves qui auront rencontré des exemples de longueurs incommensurables pourront mieux partager le souci de notre discipline : **l'exactitude**.