Qu'est-ce que faire des mathématiques ?

Les mathématiques, une invention !

Richard PALLASCIO
CIRADE, UQAM, Montréal

Introduction

L'idée d'un numéro spécial sur la thématique *Qu'est-ce que faire des mathématiques?* est intéressante, car elle oblige tant le scripteur que le lecteur à s'interroger sur sa conception des mathématiques, sur sa propre épistémologie des mathématiques, de même que sur son activité mathématique, seul ou avec d'autres, des élèves ou des étudiants-maîtres par exemple.

Je suis un formateur de maîtres en mathématiques, tant au primaire qu'au secondaire, à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), et je suis également un chercheur en didactique des mathématiques au Centre interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Éducation (CIRADE).

C'est donc dans un contexte d'apprentissage que je suis amené à "faire des mathématiques". Enfin, certaines de mes recherches actuelles portent sur l'implantation d'une pédagogie du projet incluant les mathématiques, au 1[er] cycle du secondaire (12 à 14 ans), et sur la philosophie des mathématiques appliquée auprès d'élèves de 10 à 14 ans.

Je vais donc dans un premier temps présenter ma conception des mathématiques et de ce que peut vouloir dire "faire des mathématiques", après quoi je donnerai deux exemples tirés de protocoles de recherche réalisés auprès d'élèves du 2e cycle du primaire (10 à 12 ans).

Une conception instrumentale des mathématiques

Nous avons tous une conception personnelle des mathématiques (PALLASCIO, 1992). Bernard CHARLOT (1976) les résume à trois conceptions épistémologiques différentes : les *«mathématiques du ciel»* (selon l'expression du philosophe des sciences Jean T. DESANTI), c'est-à-dire perçues comme étant des structures existantes en soi, les *«mathématiques de la terre»* perçues comme étant la structure du monde naturel ou social, et les *mathématiques perçues comme étant des instruments*, comme une *création*.

Le pédagogue qui est investi de la première conception, la plus répandue, cherche à présenter le « monde des mathématiques » comme existant indépendamment de notre esprit, lequel doit être formé (i.e. « prendre la forme de ») à celles-ci. Selon la deuxième conception, les mathématiques sont incorporées dans les choses elles-mêmes. En les manipulant concrètement, on finira bien par s'approprier les éléments mathématiques qu'elles contiennent. Il suffit d'y mettre le temps. Selon la dernière conception, les mathématiques n'ont pas été découvertes, elles ont été créées, inventées. Elles sont une métaphore du monde réel, parmi d'autres, de nature artistique par exemple !

Or la connaissance, tout en étant éminemment utilitaire, car elle doit servir à la réalisation d'un projet personnel, d'une « projection » volontaire dans le temps, s'établit tout de même par la construction de représentations de la réalité. Ma conception des mathématiques est celle qui correspond le plus, à mon avis, à la façon dont les mathématiques se sont faites, et non pas à celles qui sont majoritairement transposées dans les écoles. Les personnes qui investissent cette conception, et qui agissent en conséquence, sont souvent celles qui réussissent à faire aimer les mathématiques à leurs élèves. Il est malheureux de l'avouer, mais les idées majoritaires qu'ont les enseignantes et les enseignants sur les mathématiques, ne leur viennent pas des mathématiques elles-mêmes, mais de l'enseignement qu'ils en ont reçu, réalisé, sauf dans de rares exceptions, dans le contexte « de mathématiques toutes faites, et non de mathématiques à faire », pour reprendre l'expression de Maurice GLAYMANN, dans une conférence au congrès de l'Association Mathématique du Québec, à Hull, en 1979.

Dans le cadre d'une conception utilitaire des mathématiques, et des sciences d'ailleurs, l'idée de modèle est centrale. Le mathématicien, la mathématicienne, selon cette conception, sont de véritables constructeurs de modèles, dans le but de mieux appréhender la réalité, autrement dit pour résoudre des problèmes que cette réalité nous pose. Une mathématique qui ne serait qu'un jeu de l'esprit sans connotations utilitaires, ne survivrait pas longtemps. Cette idée de modèle, de métaphore de la réalité, de construction de représentations de cette réalité, sera au centre des exemples qui suivent.

1er exemple : un cube parfait existe-t-il ?

Dans le contexte d'un programme de *"philosophie pour enfants"* (LIPMAN, SHARP, OSCANYAN, 1980), nous avons expérimenté un roman philosophico mathématique intitulé Les aventures mathématiques de Matilde et David (DANIEL, LAFORTUNE, PALLASCIO et SYKES, à paraître). Le programme Philosophie pour enfants vise la compréhension et la réflexion sur des concepts universels. Ce programme est chapeauté par une épistémologie de l'apprentissage et par une philosophie de l'éducation pragmatiques, centrées sur le développement global des jeunes et qui mettent l'accent sur les besoins et les intérêts des jeunes ainsi que sur leurs expériences quotidiennes. Ce programme place l'emphase sur la "construction du sens". Au lieu de chercher les bonnes réponses, les jeunes apprennent notamment, à l'aide d'un matériel adéquat, à poser des questions pertinentes et à y répondre par eux-mêmes, au moyen du dialogue philosophique entre pairs, ce que LIPMAN et SHARP appellent la "communauté de recherche" (LAFORTUNE, DANIEL, PALLASCIO, SYKES, à paraître). Les élèves lisent à voix haute, à tour de rôle un paragraphe d'un chapitre du roman, après quoi ils expriment les questions que la lecture du roman a fait surgir dans leur esprit. Quelques questions sont choisies par le groupe pour fins de discussion. Un passage du roman situe Matilde dans sa chambre:

- Tiens, on dirait presqu'un cube ! Isabelle nous a parlé du cube ce matin, dans le cours de géométrie. Ou'est-ce qu'elle disait au juste ? Matilde fronce les sourcils. Attendons que je réfléchisse, un peu. [...] Elle se demande :
- Est-ce qu'une chambre peut vraiment être un cube ou est-ce qu'elle a seulement l'air d'un cube ? Isabelle nous a dit, je m'en souviens maintenant, qu'il n'était pas possible d'avoir un cube absolument parfait sur la terre. Cela m'étonne !

Ce monologue a suscité la question chez les élèves du groupe expérimental "Existe-t-il ou peut-on construire un cube parfait ?" Voici des extraits de leur discussion (A pour adulte intervenant, E pour élève ou enfant):

A: ... parler d'un cube parfait.

E: On l'a découvert. On pensait qu'un cube était parfait, qu'il avait toutes les bonnes arêtes, les bons sommets, toutes les bonnes affaires.

E: Il y a du monde qui ont réfléchi, qui ont bien observé et ils ont découvert que ça n'existait pas.

A: Est-ce que ça te satisfait, Jérôme ?

E: Oui. Il y a peut-être la moitié d'un millimètre qui n'est pas parfait, donc ça répond à la question.

E: Je ne sais pas. Si on essaie de faire un cube parfait et si par chance toutes les arêtes sont pareilles... Est-ce que ça se pourrait ?

E: Moi, je dis que ça se pourrait peut-être avoir un cube parfait, parce que si on prend, mettons, 4 carrés (sic) et si on les regarde, puis avec une lame, on en ôte un petit peu... Tu essaies toujours d'enlever des petites graines jusqu'à ce qu'ils soient égaux...

E: A la fin, il va falloir que tu aies des instruments trop petits pour faire quelque chose.

A: Alors le cube parfait...?

E: ... ça se pourrait, mais ce n'est pas évident !

E: Faudrait avoir de la chance.

A: Alors, ce serait seulement une question de chance ?

E: Oui. De bons calculs, de bonnes observations...

E: Non. Je ne pense pas que si tu mesures les centimètres... Après, il faut que tu tombes dans les millimètres, après tu tombes dans les centièmes de millimètres, après les millièmes de millimètres, tu continues toujours comme ça. Tu ne pourras jamais faire un cube parfait si tu mesures.

[...]

E: On peut prendre des blocs de géométrie.

E: Oui, mais les blocs de géométrie ne sont pas tous égaux. Eux autres, ils ont fait ça le plus égal possible, le plus parfait possible, mais ça ne veut pas dire qu'ils sont parfaits, parfaits, parfaits. Ca peut nous sembler parfait, mais...

A: Jusqu'à maintenant, sauf quelques exceptions, vous dites qu'un cube parfait, ça n'existe pas, mais il y a certaines personnes qui disent: "peut-être qu'on peut mesurer, peut-être qu'on peut construire avec de bons instruments..." Mais il y en a plus qui semblent avoir dit, que ça n'existe pas, que ça serait trop difficile à construire de façon parfaite, compte tenu qu'il faut trancher les millimètres... Alors est-ce qu'on peut parler de cube, à ce moment là ?

E: Non, parce que si ce n'est pas un cube parfait, ce n'est pas un cube.

A: Alors, comment pourrait-on l'appeler ?

E: Le carré en trois dimensions !

E: Bien non.

E: Je ne sais pas pourquoi on parle du cube, parce que si on est capable d'avoir un carré parfait, on peut avoir un cube parfait.
E: On pourrait l'appeler le cube imparfait.
E: Je pense qu'il reste un cube quand même. C'est comme si c'est dans notre imagination, comme on le pense.
E: On l'appelle cube parce que... ça ressemble à un cube.
E: Un cube parfait dans notre imagination va être un cube parfait dans la réalité, pour nous.
A: *Qu'est-ce que ça veut dire "dans la réalité"? [...]*

Ce dialogue, que nous appelons une communauté de recherche et qui s'est poursuivi pendant une bonne heure, amène les élèves, à partir de leurs propres questionnements et de leurs propres réflexions, à distinguer la pensée de l'action, l'essentiel de l'accidentel, la figure géométrique de sa représentation, le signifié du signifiant... Cette activité réflexive permet aux élèves de concevoir les mathématiques comme une construction de l'esprit humain, comme un monde métaphorique correspondant au monde des quantités et des formes.

"Selon les perspectives pragmatique et socioconstructiviste, l'éducation est un processus par lequel l'individu apprend, à l'aide des pairs, à construire sa propre compréhension des problèmes et à formuler ses propres hypothèses de solution. Dans le prolongement de cette perspective, l'objectif de l'éducation mathématique ne consiste pas à faire apprendre ou à faire croire, mais à donner du sens et, ce faisant, à faire entrer les jeunes dans un processus de recherche et de réflexion." (LAFORTUNE, DANIEL, PALLASCIO, SYKES, à paraître).

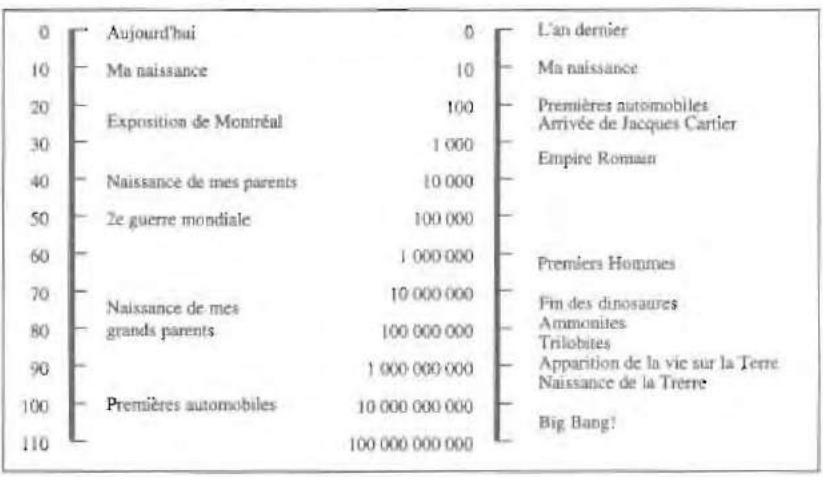
2ème exemple : une ligne du temps multiplicative

Les élèves d'un groupe multi-programmes (10 à 12 ans) travaillant dans le contexte d'une pédagogie du projet, avaient comme champ d'étude, "le passé".

Dès les premiers jours de l'année, chaque élève devait apporter à l'école un objet antique. Les objets recueillis étaient très variés: montre de poche d'un arrière-grand-père, vieilles photographies d'automobiles, vieux objets ménagers, par exemple, des fers à repasser sans fil... Le premier travail des élèves consistait à identifier l'année ou la période d'origine ou de fabrication de chaque objet et à les situer sur une ligne du temps: une première exploration dans un passé relatif, les objets datant de moins de 100 ans, dans la plupart des cas.

La ligne du temps ne posait pas de difficultés... jusqu'au moment où une élève s'amena avec des fossiles, soit une ammonite, datant de la période du crétacé (100 millions d'années) et un trilobite de la période du dévonien (350 millions d'années) ! Une première activité mathématique a permis de constater qu'il n'y avait vraiment pas moyen d'étendre la ligne du temps jusqu'à cette période. En effet, si les 100 dernières années sont représentées minimalement sur un carton d'un mètre (une année correspondant à un centimètre), alors 350 millions d'années vont nécessiter une bande de 350 millions de centimètres,soit 3,5 millions de mètres ou 3 500 km, soit encore la distance approximative séparant Montréal de Miami !

Le fait de changer d'échelle ne réglait pas le problème, car tous les objets ayant pour origine le dernier siècle se ramenaient alors indistinctement sur un même point! De même l'imbrication de sous-échelles dans une échelle principale apparaissait plus valable pour créer des "zoom" sur une période donnée, que pour régler le télescopage qui nous occupait. Les élèves avaient alors convenu avec l'enseignante d'utiliser des points de suspension... pour situer les fossiles sur la ligne du temps. Mais même à cela, la distance entre les deux fossiles s'avérait encore plus longue qu'entre notre époque et le plus "jeune" des deux fossiles ! De plus l'élève qui avait apporté les fossiles, n'appréciait pas du tout de se retrouver dans les pointillés! Que faire ? Nous avons alors proposé aux élèves de ce groupe d'utiliser une échelle, non pas "additive", mais bien "multiplicative", en multipliant par 10 à chaque intersection de l'échelle, plutôt que d'additionner 10 ans à chaque intersection !



Echelle arithmétique vs échelle géométrique
(figure tirée de Palascio, 1993)

Cet incident non prévu a permis aux élèves d'examiner sous un autre angle la différence entre l'addition et la multiplication, de constater que si l'élément neutre de l'addition est 0, celui de la multiplication est 1, car une échelle géométrique ne peut pas démarrer à partir de 0, qu'avec 100 divisions de 10 années d'une échelle linéaire, nous ne pouvons représenter qu'un millénaire, alors qu'avec 100 divisions sur une échelle géométrique, nous pouvons représenter un "gogol" d'années (1 suivi de 100 zéros), et que tout au plus nous n'avons besoin que d'une dizaine d'intervalles multiplicatifs pour remonter jusqu'au Big Bang ! Quelle économie !

Les bons coups, comme parfois les mauvais coups, nous tombent dessus parfois sans crier gare. Cette occasion fortuite a amené un groupe de "petits matheux" à construire un nouveau type de ligne du temps, plus pratique dans certains cas. Mais il y a plus à tirer de cette construction. D'une part, les multiplications proposées aux élèves ont souvent des résultats proches des additions utilisant les mêmes quantités. Par exemple, en pratiquant sur des exercices comme $2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$, les élèves en viennent à se dire qu'il n'y a pas une grande différence entre l'addition et la multiplication. Le travail décrit ci-dessus infirme rapidement cette impression auprès des élèves. La motivation subséquente pour maîtriser cette opération, par exemple pour apprendre les tables de la multiplication, vient plus aisément. Le fait d'établir, au moins de temps en temps, certains liens entre les mathématiques et la réalité, facilite les pratiques algorithmiques moins drôles, mais quand même nécessaires.

Deuxièmement, au niveau du concept du temps, la perception que nous en avons rétroactivement, s'avère à nos yeux davantage logarithmique que linéaire. En effet, l'importance de la dernière année passée, à cause de la proximité des événements et de la multiplicité des points de repère frais à notre mémoire, est équivalente à plusieurs années qui l'ont précédée, alors qu'historiquement, le dernier siècle, parce qu'il nous semble plus déterminant que les précédents dans les conjectures économiques, sociales et politiques actuelles, nous apparaît comme aussi important que le dernier millénaire.

D'aucuns affirment même que le temps s'accélère, faisant référence aux changements sociaux, technologiques... qui se succèdent à un rythme de plus en plus rapproché. Cette perception, bien que le temps soit incompressible dans la réalité qui nous occupe, correspond bien à la perception que nous en avons. Et une ligne du temps est bel et bien un modèle et non la réalité (Pallascio, 1991), permettant aux individus, et particulièrement aux jeunes élèves, de se représenter un concept long à comprendre et à s'approprier.

Conclusion

Cette dernière construction montre que les mathématiques sont bien des outils à notre disposition, des instruments susceptibles de nous permettre dans certaines circonstances de résoudre des problèmes qui s'offrent à nous (Pallascio, 1992). Les enseignantes et les enseignants, de même que les élèves eux-mêmes, ne devraient pas hésiter à s'inventer de nouveaux outils mathématiques, car c'est de cette manière que les mathématiques se développent: à mon avis, les mathématiques sont une invention, et non une découverte réalisée par d'autres et que nous devons maintenant apprendre par coeur, souvent sans rien y comprendre. Bien sûr, nous ne partons pas à zéro! Il faut bien dire à un enfant que la communauté internationale s'est entendue pour définir la mesure d'un angle droit comme étant égale à 90°. Il s'agit d'une convention. Mais lorsqu'il quittera l'école, l'individu devrait être convaincu que les mathématiques sont des outils à sa disposition, aussi souples et aussi adaptables que les règles de la grammaire française. Aussi bien nous pouvons utiliser la syntaxe, l'alphabet, la grammaire... pour écrire (ou inventer?) un texte comme celui-ci, aussi bien nous pouvons utiliser le symbolisme mathématique, les systèmes de numération, les résultats établis (ou théorèmes), les règles d'inférence (ex: deux choses égales à une même troisième, sont égales entre elles)... pour décrire, illustrer ou expliciter une réalité, comme celle du temps à l'aide d'une échelle non linéaire.

L'individu a besoin, avant tout, de mieux se comprendre: *«une connaissance compréhensible, c'est essentiellement une connaissance utilisable»* (Aubé, 1974). En ce sens il apparaît important que les jeunes soient invités à réfléchir sur leurs processus mentaux. C'est ainsi que les mathématiques peuvent se présenter comme étant un outil de travail qui permet d'élaborer des modèles rationnels métaphorisant divers éléments de connaissance et d'explorer la réalité à l'aide de raisonnements analogiques.

De cette façon, nous devrions pouvoir assurer une plus grande durabilité aux différents modèles explicatifs du monde environnant que nous tentons d'enseigner aux jeunes.

Références

AUBÉ, M. (1974). Psychologie et mathématiques: projets communs, dans *Bulletin AMQ*, XVI (1), 63-64.

CHARLOT, B. (19761). *Les contenus non mathématiques dans l'enseignement des mathématiques.* ' IREM de Nantes, tiré-à-part.

DANIEL, M.-F., LAFORTUNE, L., PALLASCIO, R., SYKES, P. (à paraître). *Les aventures mathématiques de Matilde et David*, 88 p.

GLAYMAN, M. (1980). Une mathématique que l'on construit ou la mathématique achevée?..., dans *Bulletin AMQ* , XX(1), 1 1-18.

LAFORTUNE, L., DANIEL, M.-F., PALLASCIO, R., SYKES, P. (à paraître). Y a-t-il de la place pour philosopher sur les mathématiques au collégial? *Pédagogie collégiale*, 26 p.

LIPMAN, M., SHARP, A.-M., OSCANYAN, F. (1980). *Philosophy in the classroom.* Philadelphie, PA: Temple University Press.

PALLASCIO, R. (1991). "Puissance et limite des modèles", dans *Instantanés mathématiques*, XXVII (3), 9-13.

PALLASCIO, R. (1992). *Mathématiques instrumentales et projets d'enfants*, éd. Modulo, 100 p.

PALLASCIO, R. (1993). "Pédagogie du projet et mathématiques", dans *Apprendre différemment!*, PALLASCIO, R. et LEBLANC, D. (dir.), éd. Agence d'Arc, 246 p.