

Qu'est-ce que faire des mathématiques ?

Faire des Mathématiques

D.DACUNHA-CASTELLE

Les mathématiciens ne se demandent ni pourquoi, ni comment ils font des mathématiques. A propos d'un rapport à écrire sur l'Enseignement des mathématiques, après avoir posé à des collègues très divers la question du comment, je me suis rendu compte qu'il était inutile de rechercher une réponse synthétique. C'est encore plus difficile pour le pourquoi. A propos de "faire des mathématiques", le seul point d'unanimité face aux non mathématiciens est l'insistance sur la place de l'intuition, sur le caractère non continu et non linéaire de la recherche enfin tout ce qui écarte le poncif mathématiques égale déduction. Mes propres réponses ont varié en 35 ans d'exercice du métier. Je crois qu'à de rares individus près, la manière de faire des mathématiques comme le choix des sujets reste, que cela plaise ou non, liée au milieu où se fait la recherche, aux formes de travail valorisées, notamment à la forme de travail en commun, aux critères de validation des résultats et bien sûr aux circonstances les plus fortuites. Ajoutons pour le choix des sujets, l'importance de la mode.

La place des mathématiques à l'Ecole joue sûrement un rôle. Mon milieu familial ignorait tout des mathématiques ; elles sont restées pour moi fastidieuses et peu compréhensibles jusqu'en Seconde. En première, un élève dont le père était mathématicien m'a ouvert des horizons. Un dimanche, j'ai

trouvé $\mu^2 = -1$ dans un problème de cinématique. Après avoir retourné énoncé et calculs, j'en ai conclu à une forme non précisée d'absurdité du problème. Le lundi, le professeur m'a dit que je verrais plus tard les imaginaires et que le problème n'était donc pas absurde. Peu convaincu, je me suis fait expliquer \mathbb{C} par le père de mon ami. En Mathématiques Élémentaires, j'ai découvert le bonheur de chercher et, je dois le confesser, de trouver. Avec le recul, j'ai un sentiment de reconnaissance envers mon professeur passionné d'arithmétique et envers les beaux problèmes de géométrie, notamment ceux portant sur l'inversion et les faisceaux de cercles. Je n'ai pas retrouvé ce sentiment les années suivantes, je me contentais d'admirer le paysage mathématique, trop occupé par ailleurs. Je n'ai retrouvé le temps de m'investir dans la recherche que l'année de l'Agrégation. Il y avait de beaux problèmes, reconnaissons-le.

Faire des mathématiques a ensuite changé de nature. Toute ma vie, ce sera pour moi faire des probabilités même si j'ai touché à bien d'autres spécialités. La mode, à la fin des années cinquante, en particulier à l'École Normale n'était pas du tout aux probabilités. Au CNRS, celles-ci faisaient partie du secteur Physique théorique ! Sans doute à cause du mot « loi » historiquement utilisé en probabilités. A ce propos, je ne résiste pas à rappeler une anecdote. Au début des années 70, ayant été chargé de faire les sujets du baccalauréat, j'ai découvert avec stupéfaction le libellé des programmes, fort hardi, d'une série ; sur la même demi-ligne était écrit : loi de GAUSS, loi des grands nombres. La discussion qui s'en suivit et que je tiens secrète avec un Inspecteur Général très attachant par ailleurs me ferait mal voir de ce corps où j'ai, encore, d'excellents amis. Donc, un peu par esprit de contradiction un peu par goût de la physique, pas mal par complexe d'infériorité vis à vis des grandes théories à l'honneur en ces années et beaucoup par hasard puisqu'un poste d'assistant, denrée très rare à l'époque, m'était offert, je me retrouvai probabiliste avec un bagage fort léger ou même inexistant sur les développements récents de la théorie. Une forme d'intuition assez spéciale est importante en probabilité. Beaucoup de mathématiciens et de physiciens peinent sur des problèmes élémentaires. Elle est souvent décisive lorsqu'il s'agit de modéliser des situations qui viennent de partout, les sujets allant du plus spéculatif au plus utilitaire. Qui rentre en probas a bien des chances de rester ouvert sur l'extérieur. J'y ai trouvé une situation qui me convenait parfaitement, je suis un peu claustrophobe en mathématiques, j'en ai fait l'expérience ayant été pendant deux ans totalement enfermé dans un problème ardu de géométrie des BANACH sans aboutir totalement.

Avant de partir pour un très long service militaire, j'ai écouté un séminai-

re de Paul LÉVY, dont l'oeuvre me fascinait déjà. J'avais en tête des questions qui pouvaient être résolues sans recours à une bibliothèque, sans papier ni crayon, juste avec des probas et de l'analyse classique. Cette manière de faire des mathématiques est un exercice de concentration excellent et recommandable. Je la considère comme le principal de nos privilèges et cette possibilité de s'abstraire d'un contexte a toujours été pour moi un grand recours dans des moments pénibles à titres divers.

Paul LÉVY répondit par retour à tous mes courriers et me facilita des publications qui me donnèrent une confiance dont je manquais. Pourtant, au moment de traiter d'un problème, les jeunes mathématiciens ne mettent jamais en question son intérêt. Pour moi, pendant au moins vingt ans, je ne l'ai jamais fait en décrétant que les mathématiques que je faisais étaient essentielles pour moi et aussi, tant qu'à faire, pour le reste de mes semblables ! Cette attitude me semble très saine pour un jeune chercheur. Je me suis mis ensuite à travailler à deux, quelquefois à trois, avec mes amis J. BRETAGNOLLE et J.-L. KRIVINE. Aujourd'hui, certains jeunes mathématiciens connus doivent beaucoup au travail en commun et le disent avec bonheur. Dans les années 60, faire des mathématiques ne pouvait par définition que se faire seul, la signature collective était regardée avec méfiance sinon avec mépris.

Et pourtant, apprendre à reconnaître dans toute sa finesse et sa complexité la pensée de l'autre, son cheminement dans le projet commun n'exclut ni la créativité ni l'autonomie de la pensée et de la technique. De plus, en variant mes collaborations, j'ai pu diminuer la frustration qui réside dans l'abandon, très jeune, de toute prétention encyclopédique en mathématiques. Apprendre beaucoup de mathématiques nécessite du temps et est incompatible avec le travail de recherche, l'enseignement, la vie familiale et tout le reste.

Beaucoup de mathématiciens n'ont donc, il faut s'y résoudre, au mieux (et pour le pire quelquefois) qu'un vernis superficiel lorsqu'ils s'éloignent de leurs spécialités. Aussi lorsqu'une recherche débouche « ailleurs » que sur son objectif prévu, utilise des techniques « exotiques », oblige de s'investir loin de sa spécialité, elle apporte beaucoup. Je citerai deux anecdotes à ce propos. Ayant résolu un problème lié à des histoires de sommes de variables aléatoires, nous nous sommes retrouvés, avec J. BRETAGNOLLE, être invités par les spécialistes de géométrie des BANACH à être « des leurs ». Nous ne savions rien des problèmes que se posaient ces gens-là, et nous en avons résolu un par hasard. Effectivement, nos techniques et nos résultats étaient beaucoup plus intéressants regardés en géométrie des BANACH qu'en proba-

bilité. Cela a entraîné pour moi un flirt assez prolongé de ce côté mais en me sentant toujours probabiliste ! Travaillant ensuite à résoudre un problème posé par Paul LÉVY encore dans les années 50 (et soit dit en passant que nous avons résolu à sa satisfaction, à la nôtre mais qui depuis 25 ans n'a, semble-t-il, intéressé personne, à mon avis à tort), nous sommes retombés sur un problème important de géométrie des BANACH, que nous avons cette fois reconnu. En discutant avec J.L. KRIVINE, nous nous sommes aperçus, en premier, qu'il s'agissait en fait d'un problème très similaire à un problème de théorie des modèles en logique mathématique. En utilisant une technique connue des logiciens mais jamais utilisée jusqu'alors en analyse ou en géométrie des BANACH (technique des ultraproducts et des espaces étalés), nous pouvions démontrer de manière élégante une conjecture géométrique importante. Je crois que je n'ai jamais senti aussi bien la puissance et la beauté des formalismes mathématiques qu'en cette occasion.

Chercher des solutions élégantes est toujours une tâche mathématique importante. Il y a bien sûr des «trivialisateurs» de génie mais chacun peut apporter sa pierre à la construction de formalismes adaptés et esthétiques. J'ai découvert grâce à J.L. KRIVINE la théorie des modèles et un peu de logique moderne. Je me suis convaincu, en cette occasion, qu'il fallait se méfier, et le terme est faible, des jugements péremptaires de mathématiciens renommés qui exécutent sans appel des disciplines qu'ils sont loin de maîtriser. Cela a atteint la logique accusée de formalisme et cela l'atteint encore. C'est totalement injuste. Par exemple, je constate que bien des collègues ne pressentent pas la force et la profondeur des nouvelles mathématiques issues de la logique qui sont les mathématiques de l'informatique, comme la théorie des langages alors qu'ils s'intéressent souvent de façon puérile à l'informatique pour les mathématiques et aux finesses les plus invraisemblables des traitements de texte ! Le mauvais formalisme est un danger à une époque où le nombre de chercheurs augmente. Il existe une pratique déjà ancienne : celle d'écrire en détail ce qui est évident, implicitement pour toute personne avertie et de le publier. Pour moi ce n'est pas «faire de la recherche en mathématiques» et je vois trop de travaux de ce type, dont sont à terme victimes de jeunes chercheurs. Il n'y a évidemment pas de règle précise en ce domaine, mais est formel ce qui est simple technicité sans créativité, et comme «faire des mathématiques» a été aussi pour moi mettre le pied à l'étrier à des plus jeunes, j'ai été amené à leur éviter au maximum sans toujours y arriver, ce danger.

Pendant deux ans, je n'ai fait que des mathématiques dites pures, plus exactement des probas, accessoirement de l'analyse et un peu d'autres

choses. Je suis considéré par mes collègues comme ayant alors progressivement changé pour devenir un mathématicien appliqué !

D'abord le mot est un peu aberrant, au-delà de sa connotation morale. Je pense que l'on doit parler de science et de technologie en mathématiques. Celles-ci ont une dimension technologique indiscutable ; elles sont utilisées, le plus souvent par le biais de programmes informatiques, pour obtenir des résultats bien adaptés à une question non mathématique. Pour donner une solution, non la solution. Adapté signifie ici que la situation est « débloquée » de manière intéressante pour l'interlocuteur des mathématiciens ou de l'ingénieur, de manière éventuellement aussi optimale que possible. La technologie mathématique est utilitaire, sans universalité, particulière et provisoire. Peut-être la vieille géométrie descriptive au-delà de sa récupération « taupinale » était-elle une technologie du XIX^e siècle. L'ambiguïté vient de ce que certaines disciplines comme les probabilités (et ses enfants, la statistique et la théorie de l'information), l'analyse numérique, se prêtent mieux que d'autres à des développements technologiques. Mais les codes relèvent de l'algèbre, la robotique en partie de la géométrie, et il me semble aberrant d'appeler appliquées des mathématiques uniquement parce que, pour une part, elles relèvent historiquement de certaines demandes technologiques. Il est risible de considérer comme appliquées les probabilités outil de la géométrie des BANACH, de la théorie du potentiel ou des EDP. On a vraiment l'impression que certains tiennent par cette appellation à créer la fiction du péché originel.

Je me suis intéressé à la statistique pour des raisons d'ordre assez politique. Lorsque, dans un pays du Tiers Monde, on m'a posé des questions concrètes de statistique en liaison avec la zootechnie, je n'ai pu que m'avouer et avouer mon impuissance. J'ai donc commencé à apprendre des statistiques, à essayer de le faire avec des gens qui faisaient des travaux de type technologique mais fondés sur des théories mathématiques solides. Je n'en ai pas trouvé beaucoup dans l'Université, j'ai eu la chance de trouver un excellent initiateur en la personne de R.TOMASSONE qui venait de monter le département de biométrie de l'INRA.

Disons tout de suite que lorsque j'ai eu à démontrer des théorèmes de statistique dite mathématique, je n'ai pas eu l'impression de faire un travail différent de celui que je faisais en mathématiques pures. Il existe des théories statistiques très difficiles techniquement, il existe aussi des notions issues de la théorie de l'information comme celle d'entropie, qui sont centrales dans une large partie des mathématiques. Récemment, avec deux de mes jeunes collègues, partant de préoccupations statistiques, nous avons obtenu des

résultats substantiels dans la théorie des moments, partie bien classique de l'analyse. Donc, je n'ai pas le sentiment d'avoir franchi une frontière «pures : appliquées». L'ironie de l'histoire est d'ailleurs que la statistique mathématique est actuellement largement de la géométrie des BANACH !

Il m'arrive aussi d'entrer complètement dans un problème technologique, toujours à l'intérieur d'une équipe. Actuellement, je travaille sur un système de prévision à très court terme des maxima de pollution de l'air à Paris (prédire à 6 heures du matin ce qu'il va se passer l'après-midi). Est-ce que cette activité est «faire des mathématiques», de manière semblable, on pourrait dire est-ce que calculer des structures pour faire un pont est «faire des mathématiques»? Ma réponse est que de manière générale, le travail courant d'un ingénieur mathématicien est très différent de celui d'un chercheur. Je ne mets d'entrée aucune échelle de valeur dans cette différence. L'acharnement idéologique contre la technologie est une stupidité souvent doublée d'une grande hypocrisie. Donc, pour moi, faire trouver une méthode bien élaborée, en choisissant au mieux les paramètres, les programmes, en faisant toutes les expériences nécessaires, est un travail de technologie qui n'est pas «faire des mathématiques» au sens où on l'entend du lycée à l'université. Maintenant, il arrive qu'un travail technologique en appelle à une recherche théorique et que l'on ait un pied de chaque côté. C'est le cas pour notre système de prévision. Nous avons résolu de manière satisfaisante le problème par une méthode classique et nous cherchons à l'aide d'une théorie encore à l'état d'esquisse une méthode plus performante. De cette frontière entre les mathématiques et la technologie qu'elles engendrent, il est intéressant de regarder le «monde». Celui des mathématiques compte chaque jour un peu moins de théologiens de l'art de faire de «vraies» mathématiques et celui de l'extérieur en appelle de plus en plus aux mathématiques et surtout à leur technologie, cela vient de toutes parts, de la sociologie à l'automatique. L'impérialisme deviendra, devient, une réalité qui ne doit rien à notre prosélytisme.

Pour terminer, je dois dire que ma conception globale sur les conditions nécessaires (mais pas suffisantes) pour «faire des mathématiques» me semble en danger. L'économisme triomphant et dévastateur tend à impliquer une obligation de résultat à court terme et des obligations de publication. Il tend à substituer des règles bureaucratiques dévaluation «au poids» à une évaluation normale, que nous devons d'ailleurs rendre plus efficace et non corporatiste. Les pressions exercées sur les plus jeunes par l'inadéquation du nombre des postes, par le poids des relations d'équipes ne favorise pas le travail créatif. Les manques d'éthique au niveau des publications se multiplient. Les mathématiques ne sont pas inscrites dans le ciel comme détachées de

toute politique sociale. Elles ont besoin de liberté, de ne pas être soumises à des critères de rentabilité immédiate (sur le long terme, elles ont fait leurs preuves !) Elles souffrent de toutes les formes d'élitisme méprisant et malthusien. Heureusement, et cela me rend optimiste, que l'exercice des mathématiques rend particulièrement résistant et allergique à ces pressions. Il n'en est que plus important que les jeunes puissent « faire des mathématiques » très tôt si telle est leur vocation. Et puisqu'il s'agit du *Bulletin* de l'APMEP, je dois dire que le rôle des enseignants du secondaire est capital surtout pour les élèves dont le milieu n'a aucune culture mathématique ; leur formation doit être ouverte sur les mathématiques vivantes et ils doivent pouvoir exiger des programmes de lycée qui permettent aux élèves qui le veulent et le peuvent de « faire des mathématiques ». Ce n'est pas le cas aujourd'hui.