Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"...si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 246 (Roger CUCULIÈRE, Rabat, Maroc)

Trouver tous les triangles à côtés entiers dont l'aire est égale au demi-périmètre (resp. au périmètre)

ÉNONCÉ N° 247 (Serge PAICHARD, Laval)

Placer deux points M et N sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC de telle sorte que $MN = MB + NC$.

ÉNONCÊ N° 248 (Jacques BOUTELOUP, Rouen)

Soit n un entier naturel ≥ 1. On désigne par r la partie entière de $\sqrt{n}$. Démontrer que n est premier si et seulement si :

$\forall\ p \leq r\ \ C_{n-1}^{p} + (-1)^{p+1}$ est multiple de n. Trouver un exemple montrant que $C_{n-1}^{r} + (-1)^{r+1}$ peut être multple de n sans que n soit premier.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 228 (François LO JACOMO, Paris)

Montrer que si a et b sont premiers entre eux ($0 < a < b$), C_b^a est divisible par b.

SOLUTION de Charles HERMITE (Paris), transmise par Richard ANDRÉ-JEANNIN (54, Longwy)

Plus généralement, nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Hermite (*Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, Gauthiers-Villars, Paris, vol.1, 1905)

Proposition: : En posant d = p.g.c.d. (a,b), on a $\frac{b}{d} \mid C_b^a$.

Preuve : D'après Bezout, il existe des entiers A et B tels que $d = Bb + Aa$.

On en déduit que le nombre $E = d\dfrac{(b-1)(b-2)\ldots(b-a+1)}{a!}$ est entier

car, d'après la relation de Bezout, on a $E = B\,C_b^a + A\,C_{b-1}^{a-1}$. Par ailleurs,

on a : $bE = d\,C_b^a$ et par suite $\frac{b}{d} \mid C_b^a$. C.Q.F.D.

Remarque 1 : Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, on en déduit que $p^r | C_{p^r}^a$, pour tout $r \geq 1$ (le cas $r = 1$ est bien connu).

Remarque 2 : En utilisant une technique analogue, HERMITE a démontré que $\frac{b-a+1}{\delta} | C_b^a$, avec δ = p.g.c.d.$(b+1, a)$. On en déduit en particulier que les nombres de Catalan, définis par $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ sont des nombres entiers.

AUTRES SOLUTION

Utilisant $a\,C_b^a = b\,C_{b-1}^{a-1}$: Jacques AMON (Limoges), Corinne BERNE (Marseille), Roger BOUDEILLE (59-Attiches), Jacques BOUTELOUP (Rouen), François COUCHOT (14-Hérouville St Clair), Maurice CRESTEY (Vincennes), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), E. DELPLANCHE (Créteil), Gilbert GRIBONVAL (91-Palaiseau), M. IGUIDER (Salé-Maroc), Jean-Yves LE CADRE (22-Mael Carhaix), René MANZONI (Le Havre), J.-L. NICOLAS (Villeurbanne), Charles NOTARI (31- Montaut), Renaud PALISSE (Paris), Jean-Dominique PICCHIOTTINO (Aubervilliers), R. RAYNAUD (Digne), Jean-Paul ROUX (42-Unieux), Geneviève SAMBARD (St Quentin), Gérard ZUNTINI (Bastia).

Faisant appel à C_{b-1}^{a} : Jean-Christophe LAUGIER (Reims), Marguerite PONCHAUX (Lille), Jean-Paul QUELEN (Barcelone-Espagne).
Par décomposition en facteurs premiers : Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles).
En étudiant les rotations d'un collier de b perles dont a noires : Pierre JULLIEN (13-Meyreuil).

REMARQUES

J'ai hésité à poser ce problème tant il est simple, mais une rapide préenquête m'a montré qu'il est insuffisamment connu, même si certains collègues l'utilisent déjà dans leur enseignement. Par ailleurs, l'énoncé original était :

«Montrer que si a et b sont premiers entre eux $(0 < b < a)$, C_a^b est divisible par a », qui est devenu sur les épreuves :
«Montrer que si a et b sont premiers entre eux $(0 < a < b)$, est divisible par a.» puis, à l'issue d'une correction d'épreuves à laquelle j'ai omis de participer :

«Montrer que si a et b sont premiers entre eux $(0 < a < b)$, C_b^a est divisible par a.»

Il a fallu un erratum pour rétablir l'énoncé, sinon originel, du moins correct, et je prie ceux qui en ont été troublés de nous en excuser, mais fort heureusement, la plupart des lecteurs ont corrigé par eux-mêmes cette coquille.

Signalons d'autre part que ce résultat n'admet pas de réciproque au sens strict : $C_{10}^{4} = 210$ est divisible par 10, $C_{12}^{6} = 924$ est divisible par 12, etc.

Toutefois, Renaud PALISSE (Paris) précise que C_n^4 est divisible par n si et seulement si n est impair ou congru à 2 modulo 8. Or, ce résultat se généralise :

Soit p un nombre premier, k un entier ≥ 1, $C_n^{p^k}$ est divisible par n si et seulement si $\exists\ \alpha$ $(0 \leq \alpha < k)$ et $\exists\ q$ premier avec p $(1 \leq q < p^{k-\alpha})$ tels que $n \equiv q\,p^{\alpha}\ (mod\ p^{k+\alpha})$. En effet, n divise $C_n^{p^k}$ si et seulement si p^k divise

$C_{n-1}^{p^k-1}$. Si n est divisible par p^k, les puissances de p divisant les termes du numérateur de $C_{n-1}^{p^k-1} = \dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-p^k+1)}{(p^k-1)(p^k-2)\dots\times 1}$ sont les mêmes que celles divisant les termes du dénominateur, et donc $C_{n-1}^{p^k-1}$ n'est même pas multiple de p. Par contre, si n n'est pas divisible par p^k, $\exists\ \alpha\ (0 \le \alpha < k)$ et $\exists\ q$ premier avec p $(1 \le q < p^{k-\alpha})$ tels que $n \equiv q\,p^{\alpha}$ (mod. p^k). Dans un seul des termes du numérateur, à savoir $n - qp^{\alpha}$, l'exposant de p est $\ge k$, et il n'y a pas de terme équivalent au dénominateur. Le dénominateur, quant à lui, contient qp^{α} alors qu'aucun terme du numérateur n'est congru à qp^{α} (mod. p^k). En dehors de ces deux termes, les puissances de p du numérateur se simplifient exactement avec celles du dénominateur, et pour que $C_{n-1}^{p^k-1}$ soit divisible par p^k, il faut et il suffit que le terme $n - qp^{\alpha}$ du numérateur "compense" le terme qp^{α} du dénominateur, donc que $n \equiv q\,p^{\alpha}$ (mod. $p^{k+\alpha}$).

En définitive, pour p^k fixé, la probabilité que $C_n^{p^k}$ soit divisible par n vaut $\dfrac{p}{p+1}\left(1 - \dfrac{1}{p^{2k}}\right)$ alors que la probabilité que n et p^k soient premiers entre eux vaut $\dfrac{p-1}{p}$, les deux valeurs ne coïncident que pour $k = 1$.

Peut-on généraliser davantage ?

ÉNONCÉ n° 229 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Déterminer l'ensemble des foyers des coniques passant par deux points fixes, d'excentricité et de direction focale constantes.

SOLUTION

Une coquille s'est malencontreusement glissée dans l'énoncé original, le mot «direction» est devenu «distance», mais elle a fait l'objet d'un erratum dans le *Bulletin* de juin, paru cinq semaines après celui contenant l'énoncé.

Entre temps, plusieurs lecteurs ont abordé l'énoncé erroné : Jacques AMON (Limoges), René MANZONI (Le Havre) et M. VIDIANI (Dijon) pour qui «l'énoncé modifié conduit à des calculs particulièrement sadiques, le tracé ne pouvant être fait qu'en MAPLE qui, de plus, a permis de vérifier les résultats trouvés à la main.»

Pourtant, René MANZONI a courageusement traité proprement les deux versions de l'énoncé. Pour la version erronée, il fixe les coordonnées des deux points fixes $A(-\ell, 0)$ et $B(\ell, 0)$, et du centre variable $S(\alpha, \beta)$ de la conique, laquelle a pour demi grand axe a et pour demi distance focale c, toutes deux constantes par hypothèse. En appelant θ l'angle (variable) de $\overrightarrow{AB}$ à l'axe focal de la conique et (x_A, y_A), (x_B, y_B) les coordonnées de A et B dans le repère orthonormé centré en S et d'axe $\overrightarrow{SX}$ passant par les foyers, l'équation de la conique fournit : $\dfrac{x_A^2}{a^2} + \dfrac{y_A^2}{a^2 - c^2} = \dfrac{x_B^2}{a^2} + \dfrac{y_B^2}{a^2 - c^2} = 1$ et prouve d'une part l'existence d'un réel r tel que

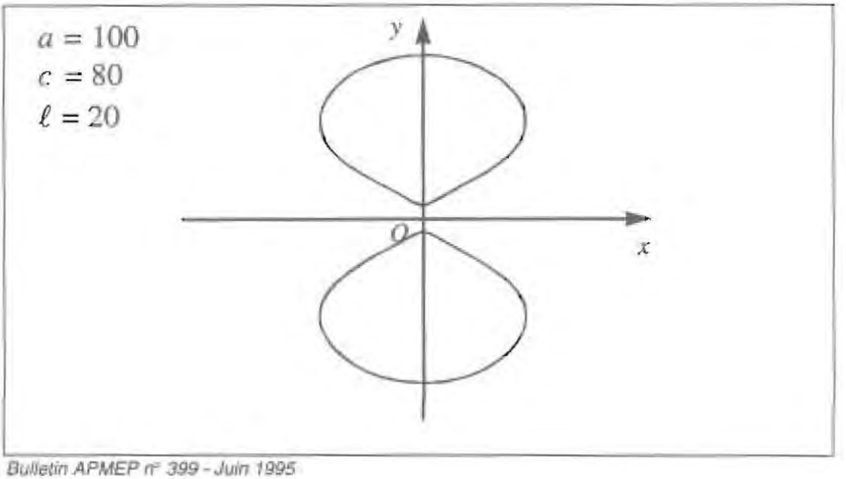
$$\frac{x_A + x_B}{2} = ra^2 \sin\theta \ , \ \frac{y_A + y_B}{2} = r\left(a^2 - c^2\right)\cos\theta \ ,$$

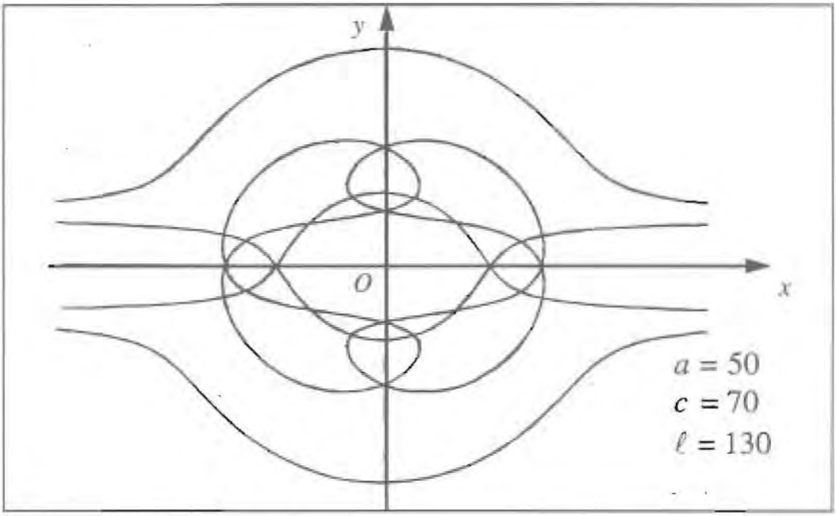
d'autre part, la relation : $r^2 = \dfrac{1}{a^2 - c^2\cos^2\theta} - \dfrac{l^2}{a^2\left(a^2 - c^2\right)}$.

Dès lors, les formules de changement de repère donnent les coordonnées, dans l'ancien repère lié à AB, des foyers de la conique :

$$x = c\cos\theta(\varepsilon - rc\sin\theta) \ ; \ y = c\sin\theta(\varepsilon - rc\sin\theta) - r(a^2 - c^2)$$

(avec $\varepsilon = \pm 1$), ce qui fournit une représentation paramétrique (de paramètre θ) de la courbe cherchée. La suite est du ressort de la machine, mais René MANZONI joint à sa solution deux listings (en Turbo-Pascal et en Turbo-C), et quatre courbes dont j'ai choisi la plus simple et la plus compliquée.





Mais ce n'est pas à ces courbes qu'avait pensé Marie-Laure CHAILLOUT. Elle s'était intéressée à l'article paru en mai 1993 (*Bulletin* n° 388, p. 169) de Jean DE BIASI (Toulouse) sur la puissance d'un point par rapport à une conique. L'article démontre notamment la relation suivante :

Si, pour un point M quelconque, une droite passant par M et faisant un angle θ avec l'axe focal de la conique coupe la conique en A et B, alors

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB}\,(1-e^2\cos^2\theta) = FM^2 - e^2\,MH^2$$

H étant la projection orthogonale de M sur la directrice associée à F ; si je l'applique au milieu I de $[AB]$, comme $e\,IH = \dfrac{AF+BF}{2}$ ou $\left|\dfrac{AF-BF}{2}\right|$ suivant que A et B sont de part et d'autre (pour $e\cos\theta > 1$) ou du même côté (pour $e\cos\theta < 1$) de la directrice, j'obtiens dans le premier cas :

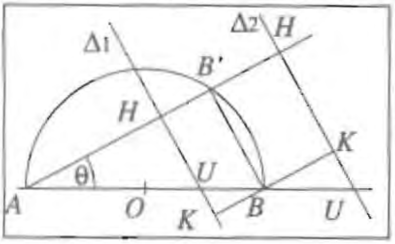
$$e^2AB^2\cos^2\theta = AB^2 + 4\,IF^2 - (AF-BF)^2 = (AF+BF)^2$$

et dans le second : $e^2AB^2\cos^2\theta = (AF-BF)^2$.

Comme, dans l'énoncé corrigé, θ est constant, F appartient à une conique de foyers A et B et d'excentricité $(1/e\cos\theta)$, hormis lorsque $e\cos\theta = 0$, auquel cas, la conique dégénère en la médiatrice de $[AB]$ (le cas $e = 0$ n'est même pas à envisager : un cercle n'a pas de direction focale).

Plusieurs lecteurs ont répondu à cet énoncé corrigé : Jacques DAUTREVAUX (06 - St-André), Edgard DELPLANCHE (Créteil), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut) et Marguerite

PONCHAUX (Lille), mais ils n'ont pas utilisé la puissance du point par rapport à la conique. De fait, la figure ci-contre de Jacques DAUTREVAUX



prouve instantanément que suivant que la directrice passe entre les points fixes A et B (Δ_1) ou à l'extérieur de $[AB]$ (Δ_2), on a : $AH + BK = AB' = AB\cos\theta$ ou $AH - BK = AB\cos\theta$, ce qui entraîne : $FA + FB = AB.e\cos\theta$ ou $FA - FB = AB.e\cos\theta$, prouvant que F appartient à la conique Γ de foyers A et B et d'excentricité $(1/e\cos\theta)$. L'idée supplémentaire de Jacques DAUTREVAUX et Edgard DELPLANCHE est que dans tous les cas, $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AH}{BK} = \dfrac{UA}{UB}$, U étant l'intersection de la directrice avec la droite (AB) (sous réserve que U ne soit pas à l'infini, donc que $\cos\theta \neq 0$, sans quoi Γ dégénère en la médiatrice de $[AB]$). Il en résulte que U est le pied d'une bissectrice de $\widehat{AFB}$, celle qui est normale en F à Γ, ce qui facilite la démonstration de la réciproque et la construction de la conique de foyer F. L'autre foyer F' se trouve elle aussi sur Γ, il est rejeté à l'infini lorsque la direction focale constante est parallèle à une des asymptotes de Γ.

Mais plutôt que de détailler ces démonstrations, je voudrais dire un mot d'une autre méthode proposée par Charles NOTARI. On se place dans le plan projectif complexe et on s'appuie sur le fait que les tangentes à une conique passant par les foyers passent par les points cycliques et réciproquement. Dès lors, la transformation homographique qui envoie A et B aux points cycliques et envoie les points cycliques en C et D, transforme la famille de coniques en une famille de cercles passant par deux points E et G fixes de (CD), a savoir : l'image par cette transformation homographique des deux points à l'infini de la famille de coniques (ces points sont confondus si $e = 1$).

L'image K de F par cette transformation homographique est donc l'intersection de deux tangentes menées de C et D, images des points cycliques, au cercle image de la conique, et l'on a $KD - KC = \sqrt{DG.DE} - \sqrt{CE.CG}$ ce qui prouve que K est sur une conique de foyers C et D, donc tangente aux droites joignant C et D aux points cycliques ; cette conique est l'image par la transformation homographique d'une autre conique tangente aux droites joignant A et B aux points cycliques, c'est-à-dire une conique de foyers A et B.

Un beau saut périlleux !

ÉNONCÉ N° 230 (Norbert VERDIER, Damas - Syrie)

Quelles sont les valeurs possibles de det A_n lorsque A_n est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent $(+1)$ ou (-1) ? (on pourra se limiter à certaines valeurs de n).

SOLUTION

M. VIDIANI (Dijon) fait remarquer, et je l'en remercie, que, sous une forme légèrement différente, cet énoncé a déjà été posé dans cette même rubrique il y a une dizaine d'années sous le numéro 93 (cf. *Les 200 premiers problèmes de l'A.P.M.E.P.* réunis par Dominique ROUX, volume III, p. 134), et que les matrices de ce type sont connues dans la littérature mathématique sous le nom de Matrices en Damier (il cite notamment le recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure de Faddeev et Sominski, Moscou 1977, p. 73, exercices 522 à 527).

Mais, comme le montrent également les autres réactions reçues (de Pierre BARNOUIN (06 - Cabris), la Sup IV du Lycée Pierre Corneille de Rouen, René MANZONI (Le Havre), Jacques AMON (Limoges)), il semble qu'il s'agisse d'un problème ouvert et qu'il soit encore possible de dire des choses intéressantes à son sujet.

Rappelons certains résultats connus et cités notamment par M. VIDIANI : tout d'abord, le déterminant est un entier multiple de 2^{n-1}, car en retranchant la première colonne des $(n-1)$ dernières colonnes, le déterminant reste inchangé, mais les $(n-1)$ dernières colonnes sont chacune divisibles par 2.

Ensuite, en vertu de l'inégalité d'Hadamard :

$$(\det a_{ij})^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2\right), \text{ on a } |\det A_n| \leq (\sqrt{n})^n .$$

Comme pour toute matrice en damier A_n on peut (en multipliant une colonne par (-1) en trouver une autre A'_n telle que dét $A'_n = -$dét A_n, l'ensemble cherché est un ensemble de multiples de 2^{n-1} symétrique par rapport à l'origine et compris dans l'intervalle $\left[-(\sqrt{n})^n ; (\sqrt{n})^n\right]$.

Par ailleurs, la matrice $V = U - 2I$, où U est la matrice ne contenant que des 1 (donc de rang 1) et I l'identité, admet (-2) pour valeur propre d'ordre $(n-1)$; l'étude de sa trace prouve que sa dernière valeur propre est $(n-2)$, donc que dét $V = (n-2)(-2)^{n-1}$. En outre, si je considère une matrice en damier A_n d'ordre n, dont la première colonne est appelée u_1, la matrice

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \hline -u & A_n \end{array}\right)$ est une matrice en damier d'ordre $(n+1)$, de déterminant : $2 \times$ dét A_n ; il suffit, pour s'en convaincre, d'ajouter la deuxième colonne à la première. Ces quelques considérations suffisent pour trouver toutes les valeurs possibles du déterminant lorsque $n \leq 5$:

Pour $n = 2$,	$-2, 0, +2$	$\sqrt{2}^2 = 2$
Pour $n = 3$,	$-4, 0, +4$	$\sqrt{3}^3 = 5{,}1\ldots$
Pour $n = 4$,	$-16, -8, 0, 8, 16$	$\sqrt{4}^4 = 16$
Pour $n = 5$,	$-48, -32, -16, 0, 16, 32, 48$	$\sqrt{5}^5 = 55{,}9..$

Mais, à partir de $n = 6$, cela ne suffit plus : $\sqrt{6}^6 = 216 > 192$. Il semble toutefois que la valeur 192 ne soit pas atteinte, comment le prouver ? Les méthodes ci-dessus permettent de construire des matrices de déterminants : ± 128, ± 96, ± 64, ± 48 et 0. Mais peut-on avoir ± 160 ? René MANZONI affirme que oui, sans citer d'exemple. Pour $n = 7$, il cite ± 448 et ± 576 parmi les valeurs possibles ($\sqrt{7}^7 = 907{,}5\ldots$), mais je ne connais pas d'exemples pour ces valeurs. Et on est là en face de deux problèmes distincts : quelle est la valeur maximale de $|$dét $A_n|$ pour n donné ? Et, si l'on appelle S_n cette valeur maximale, tous les multiples de 2^{n-1} compris entre $-S_n$ et S_n peuvent-ils être déterminants d'une matrice en damier d'ordre n ? Il est vraisemblable que non !

Deux idées méritent d'être avancées.

La première généralise la méthode par laquelle à partir d'une matrice en damier A_n d'ordre n, nous en avons construit une d'ordre $n + 1$ et de déterminant $2 \times$ dét(A_n).

Pour $m \leq n$, à partir de deux matrices A_n et B_m, en damier d'ordre n et m respectivement, on peut construire une matrice en damier d'ordre $m + n$, C_{n+m}, de déterminant : $\boxed{\text{dét } C_{n+m} = 2^m \text{ dét } A_n \text{ dét } B_m}$ en posant :

$$C_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} B_m & B_m \mid X \\ \hline -A' & A_n \end{array}\right)$$

La matrice A' est composée des m premières colonnes de A_n, et la matrice X est quelconque. Si j'additionne la $(m+1)^{\text{ème}}$ colonne à la première, puis la $(m+2)^{\text{ème}}$ à la seconde, et ainsi de suite, j'ai :

$$\text{dét } C_{n+m} = \text{dét}\left(\begin{array}{c|c} 2B_m & Y \\ \hline 0 & A_n \end{array}\right)$$

d'où le résultat. Par exemple, à partir de $A_4 = U_4 - 2I_4$ (de déterminant 16) et de $B_3 = U_3 - 2I_3$ (de déterminant 4), on construit une matrice C_7 de déterminant 512, que même MAPLE V de Pierre BARNOUIN n'avait pas trouvée !

Ou encore, à partir de $A'_5 = U_5 - 2I_5$ (de déterminant 48) et $B'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (de déterminant 2), on construit C'_7 de déterminant 384 (meilleure que $U_7 - 2I_7$).

Dans le cas particulier où $A_n = B_m$, on prouve par cette méthode que, si $\det A_n = (\sqrt{n})^n$ alors il existe une matrice C_{2n} de déterminant $(\sqrt{2n})^{2n}$, de sorte que l'ensemble $\mathcal{H}$ des entiers pour lesquels $S_n = (\sqrt{n})^n$ contient pour le moins toutes les puissances de 2. D'après un article cité par M. VIDIANI, et paru dans RMS n°6, février 1994, p. 468, cet ensemble $\mathcal{H}$ n'est pas déterminé actuellement. Si $n \in \mathcal{H}$ et si dét $A_n = S_n$ on dit que $\frac{1}{\sqrt{n}} A_n$ est une ***matrice d'Hadamard.***

Que dire de plus sur cet ensemble $\mathcal{H}$, si ce n'est qu'hormis 1 et 2 qui en font trivialement partie, il ne contient que des multiples de 4 (sinon $S_n = (n)^{n/2}$ ne serait pas multiple de 2^{n-1}) ? Ou encore que si $(n, m) \in \mathcal{H}^2$, alors $nm \in \mathcal{H}$? Il suffit, dans une matrice B_m, de remplacer tous les 1 par des matrices A_n et tous les (-1) par des matrices $-A_n$, pour obtenir une matrice D_{nm} de déterminant : dét $D_{nm} = (\text{dét } A_n)^m (\text{dét } B_m)^n$.

En effet, toutes les combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes permettant de triangulariser B_m peuvent être appliquées à des paquets de lignes ou de colonnes de D_{nm}, si bien que si B_m a même déterminant que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & Z \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

D_{mn} a même déterminant que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 A & & & Z' \\ & \lambda_2 A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m A \end{bmatrix}$$

Le cas de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A_n & A_n \\ \hline -A_n & A_n \end{array}\right)$, qui était déjà un cas particulier pour la relation additive précédente, est aussi un cas particulier pour cette relation multiplicative, en posant $B_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais contentons-nous du fait que $\mathcal{A}$ contient toutes les puissances de 2. Nous allons en déduire que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n > \left(\frac{3}{4} n\right)^{n/2}}$$

ce qui, à partir de $n = 7$, est meilleur que la minoration citée en solution de l'énoncé 93. Supposons en effet que cette inégalité soit vérifiée pour tout $n < 2^k = m$: c'est notamment le cas pour $k = 2$. La technique additive citée précédemment prouve que : $S_{n+m} \geq 2^n S_n S_m > (3n)^{n/2} (m)^{m/2}$ car m est une puissance de 2 ($m \in \mathcal{A}$).

Posons $\qquad t = \dfrac{n}{n+m} \in]0 , 1/2[$.

$$S_{n+m} > \left((3t)^t (1-t)^{1-t} (n+m)\right)^{\frac{n+m}{2}}$$

et une simple étude de fonction prouve que sur $]0 , 1/2[$, $(3t)^t (1-t)^{1-t} \geq 3/4$. Dès lors, la relation est encore vérifiée pour tout $n + m$ compris entre $2^k + 1$ et $2^{k+1} - 1$, et par récurrence sur k, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La seconde idée, par laquelle je voudrais conclure, est que pour chercher le maximum S_n on peut utiliser l'ordinateur mieux qu'en construisant des matrices aléatoires.

Partons d'une matrice A_n, déterminée par exemple par la technique ci-dessus, et supposons dét $A_n > 0$. En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on peut écrire : dét $A_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, les termes $u_1 \ldots u_n$, s'obtenant à partir des co-facteurs. Si certains de ces termes sont strictement négatifs, il suffit de changer les signes des coefficients correspondants de la première colonne pour les rendre positifs et donc accroître le déterminant de la matrice. Je peux ainsi optimiser la première colonne sans toucher aux autres. Puis, de la même manière, j'optimise la seconde et ainsi de suite. Après avoir fait toutes les colonnes, il se peut que la première ne soit plus optimale du fait des changements introduits sur les suivantes, et rien ne m'empêche de recommencer le cycle. Mais je ne le recommencerai pas indéfiniment, car chaque modification apportée à la matrice fait croître son déterminant, celui-ci ne peut croître indéfiniment. J'aboutirai donc à un état stationnaire, qui n'est peut-être qu'un maximum local dépendant de la matrice de départ, mais ce maximum sera sans doute meilleur que celui obtenu sur un échantillon aléatoire de matrices.

Notons que la matrice $U - 2I$ de déterminant $(n-2)\,2^{n-1}$ constitue un de ces maximums locaux qui, au moins pour $n \geq 7$, n'est pas un maximum absolu.

SOLUTIONS TARDIVES

ÉNONCÉS 225, 226 ET 227 : Dominique DAVION (Chambéry).

Jeux d'eau et train, près de la gare de Grenoble.