Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"...si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 243 (Gérard LAVAU)
Trouver les quadruplets d'entiers strictement positifs (a, b, x, y) tels que :

$$a + b = xy$$
$$ab = x + y$$

ÉNONCÉ N° 244 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)
Quelle relation lie les polynômes de la variable complexe :

$$\sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{n}{p} \mathrm{C}_{n+p-1}^{n-p} (z-1)^p \quad \text{et} \quad z^n - 1 \ ?$$

ÉNONCÉ N° 245 (François LO JACOMO, Paris)
Soient O, H, I trois points d'un plan.
a) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre du cercle inscrit ?

Comment construire ce triangle dans les cas particuliers où I est situé sur le segment $[OH]$ ou sur sa médiatrice ?
b) A quelle condition existe-t-il un triangle ABC admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et I pour centre de l'un des cercles exinscrits ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 225

Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$, n réels strictement positifs.
Pour $1 \leq k \leq n$, on note P_k la moyenne arithmétique des produits k à k de ces réels :

$$p_k = \frac{1}{C_n^k} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} .$$

Montrer que pour tout k compris entre 2 et $n-1$, $p_{k-1} p_k \leq p_k^2$ et que, pour $1 \leq k \leq n$, la suite $u_k = p_k^{1/k}$ est décroissante.
(u_1 = moyenne arithmétique et u_n = moyenne géométrique des n réels $a_1, a_2 \ldots a_n$).

SOLUTION

Problème éminemment calculatoire qui peut être abordé de deux manières :
1) Par dénombrement, comme l'ont fait René MANZONI (Le Havre) et Pierre SAMUEL (Bourg la Reine).
2) Par récurrence, comme l'a fait Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles).
La première méthode suppose fixés les n réels $a_1, a_2 \ldots a_n$. Avec les notations de Pierre SAMUEL, qui pose $p\,(\mathrm{H}) = \prod_{i \in \mathrm{H}} a_i$, on calcule

$p(\mathrm{H})p(\mathrm{H'}) = p(\mathrm{I})^2\, p(\mathrm{J})$ où $\mathrm{I} = \mathrm{H} \cap \mathrm{H'}$ et $\mathrm{J} = (\mathrm{H} \cup \mathrm{H'}) - \mathrm{I}$, si bien qu'en sommant :

$$p_{k-1} p_{k+1} = \frac{1}{C_n^{k-1}\, C_n^{k+1}} \sum_{\mathrm{card}(\mathrm{I}) = i} a(\mathrm{I})$$

$$p_k^2 = \frac{1}{\left(C_n^k\right)^2} \sum_{\mathrm{card}(\mathrm{I}) = i} b\,(\mathrm{I})$$

où $a(\mathrm{I})$ et $b(\mathrm{I})$, sommes des $p(\mathrm{H})p(\mathrm{H'})$ intervenant dans $p_{k-1}\, p_{k+1}$ et dans p_k^2

respectivement et vérifiant H∩H' = I, valent respectivement :

$$a(\mathrm{I}) = C_{2k-2i}^{k-i+1}\, p(\mathrm{I})^2\, s(\mathrm{I}) \text{ et } b(\mathrm{I}) = 2C_{2k-2i}^{k-i}\, p(\mathrm{I})^2\, s(\mathrm{I})$$

en appelant s(I) la somme des p(J) pour J disjoint de I et Card (J) = $2k-2i$. Le résultat cherché se déduit d'une comparaison des coefficients de ces deux sommes.

Je m'attarderai davantage sur la seconde méthode. On suppose que, pour tout ensemble de $(n-1)$ réels strictement positifs, et pour tout k, les relations sont vérifiées. Si l'on pose $p_0 = 1$ et $p_k = 0$ pour $k < 0$ et $k > n-1$, il n'est même pas nécessaire de se limiter quant aux valeurs possibles de k, la relation devient triviale à l'extérieur de l'intervalle pour lequel on nous demande de la démontrer. Par ailleurs, cette hypothèse de récurrence est clairement vérifiée dans le cas où $n-1 = z$, donc dans le cas de deux réels a_1 et a_2.

On ajoute un n-ième réel a.

Dans les nouvelles moyennes, que nous appellerons q_k pour les distinguer des précédentes, certains termes contiendront a, d'autres non ; de sorte que :

$$q_k = a\frac{k}{n}p_{k-1} + \frac{n-k}{n}p_k$$

En appliquant cette même formule à q_{k+1} et q_{k-1} on peut développer :

$$q_{k+1}q_{k-1} - q_k^2 = \frac{a^2\left(k^2-1\right)}{n^2}\left(p_k p_{k-2} - p_{k-1}^2\right) + \frac{(n-k)^2-1}{n^2}\left(p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2\right)$$

$$-\frac{1}{n^2}\left(ap_{k-1} - p_k\right)^2 + a\left(\frac{k(n-k)-(n-1)}{n^2}\right)\left(p_{k+1}p_{k-2} - p_k p_{k-1}\right).$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence et du fait que

$$p_{k+1}p_{k-2} - p_k p_{k-1} = \frac{p_{k+1}}{p_k}\left(p_k p_{k-2} - p_{k-1}^2\right) + \frac{p_{k-1}}{p_k}\left(p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2\right),$$

chacun des quatre termes du membre de droite est négatif ou nul, d'où le résultat, par récurrence sur n.

Quant à la seconde question, prouver que $u_k = p_k^{1/k}$ est décroisante, quelle que soit la méthode adoptée pour la première, elle en découle immédiatement. $p_2 \leq p_1^2$ a été démontré ci-dessus bien que cela n'ait pas été formellement demandé, car nous avons posé $p_0 = 1$ et prouvé : $p_{k-1}p_{k+1} \leq p_k^2$, même pour $k = 1$.

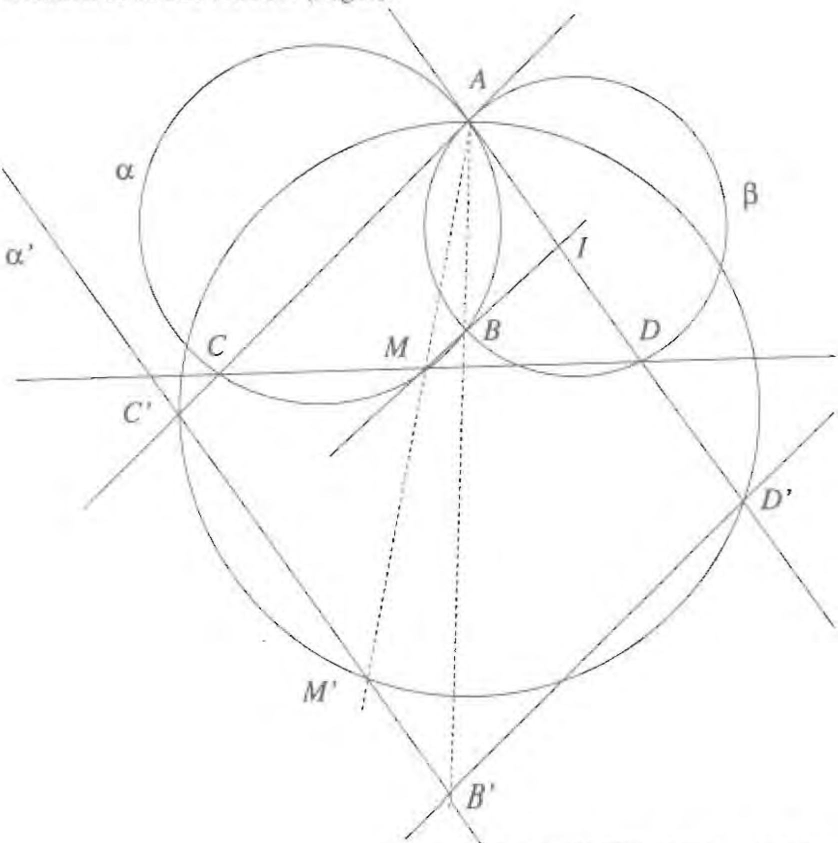
Par ailleurs, $p_{k-1}p_{k+1} \leq p_k^2 \Rightarrow \dfrac{p_{k+1}^{1/(k+1)}}{p_k^{1/k}} \leq \left(\dfrac{p_k^{1/k}}{p_{k-1}^{1/(k-1)}}\right)^{k-1/_{k+}}$ d'où le résultat par récurrence sur k (n étant fixé).

ÉNONCÉ N°227 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

Soient α et β deux cercles situés dans un même plan, et qui se coupent en deux points A et B. La tangente en A au cercle β recoupe le cercle α en C et la tangente en A au cercle α recoupe le cercle β en D. La droite (CD) recoupe le cercle α en un point M distinct de B. Montrer que la droite (MB) coupe la corde $[AD]$ en son milieu.

PREMIERE MÉTHODE

Solution de R. RAYNAUD (Digne)



Une inversion de pôle A transforme

B en B', D en D',

le cercle α en la droite $(B'C')$, parallèle à la droite (AD),

le cercle β en la droite $(B'D')$, parallèle à la droite (AC),

la droite (CD) en le cercle $AC'D'$, qui recoupe la droite $(B'C')$ en M' inverse de M,

la droite (MB) en le cercle $AM'B'$, qui recoupe la droite (AD) en I' inverse de I : $AI.AI' = AD.AD'$.

Pour démontrer que I est le milieu de $[AD]$, il suffit de démontrer que D' est milieu de $[AI']$:

Dans le cercle $AC'M'D'$, les cordes $[AD']$ et $[C'M']$ sont parallèles, donc $DM' = AC'$.

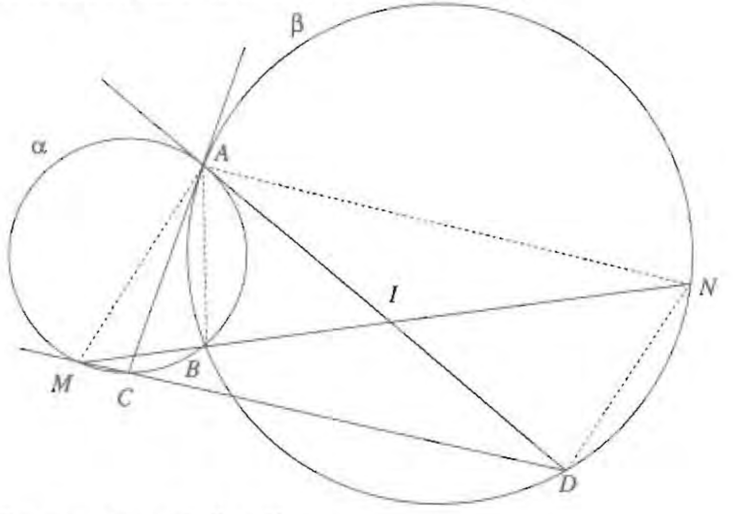
Dans le parallélogramme $AC'B'D'$, $AC' = D'B'$. Donc $D'M' = D'B'$.

Dans le cercle $AM'B'I'$, la médiatrice de la corde $[M'B']$ coupe en D' la corde parallèle $[AI']$.

D' est donc le milieu de $[AI']$. CQFD.

DEUXIEME MÉTHODE

Solution de Jacques DAUTREVAUX (06 - St André)



(MB) recoupe le cercle β en N.

Les égalités angulaires (modulo π) suivantes :

$$\underset{\text{dans } \beta}{(NB, ND) = (AB, AD)} = \underset{\text{dans } \alpha}{(MB, MA)}$$

et $(NB, NA) = (AB, AC) = (MB, MC)$

dans β dans α

montrent que le quadrilatère $ANDM$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en un point I milieu à la fois des segments $[MN]$ et $[AD]$.

AUTRES SOLUTIONS

Utilisant l'inversion : M.BAUVAL (Versailles), G.BOUEZ (Paris), M. BOUTEILLER (Brive), Daniel CARRON (Culham, Royaume Uni), Maurice CRESTEY (Vincennes), Denis GERLL (Paris) et Christian GAUTIER (Versailles), Jacques LEGRAND (Biarritz), A. MARCOURT (Ste Savine), Michel MARGUERITE (Domfront).

N'utilisant pas l'inversion : Miguel AMENGUAL COVAS (Majorque, Espagne), Jean-Louis AYME (St Denis de la Réunion), René BENOIST (Palaiseau), Jean-Luc BOUILLOT (Magnanville) et Robert TAUVY (Vallery), Jacques BOUTELOUP (Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Alain CORRE (Yaoundé, Cameroun), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Christian DUFIS (Limoges), Denis GERLL (Paris) et Christian GAUTIER (Versailles), Groupe Géométrie de l'IREM de Bordeaux, Philippe JACQUEMIER (Revel), Jacques LEGRAND (Biarritz), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Montaut), Eric OSWALD (Bonneville), Serge PAICHARD (Laval), Marguerite PONCHAUX (Lille), Roger QUENTON (Draguignan), Jean-Paul ROUX (Unieux), André VIRICEL (Villers lès Nancy).

REMARQUES

Faut-il réhabiliter l'inversion ? Maurice CRESTEY, ancien Inspecteur Général, écrit : «Je me sens presque obligé de demander que l'on veuille bien m'excuser d'avoir traité l'essentiel du sujet en utilisant une inversion, au risque de passer pour un dinosaure. Mais lorsque je préparais le bac, puis le concours d'entrée à St Cloud, l'inversion était un outil très utilisé en géométrie. Après tant d'années, je sais encore m'en servir. Après tout, il y a encore des lecteurs du *Bulletin* qui sont de ma génération. Quant aux plus jeunes, dont la géométrie n'a pas constitué la plus grande partie de la formation, il n'est pas mauvais qu'ils se persuadent qu'on a abandonné un outil bien performant».

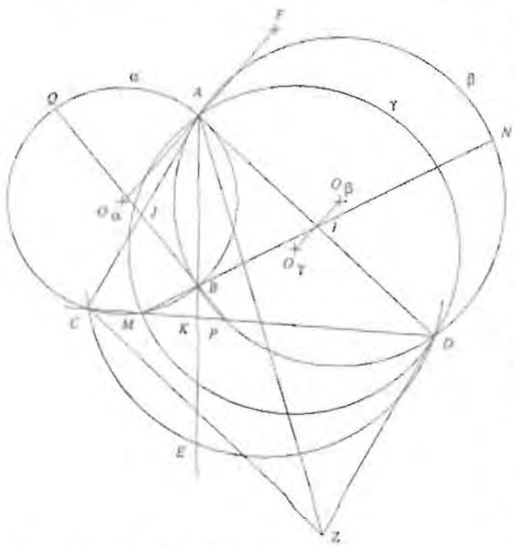
De fait, plus de 30% des solutions utilisent l'inversion, mais la seconde méthode l'emporte avec environ 40%. Parmi les très nombreuses réponses, on découvre aussi une grande diversité d'autres méthodes possibles.

Denis GERLL (Paris) et Christian GAUTIER (Versailles) proposent conjointement deux méthodes : l'une par inversion, l'autre par similitude. Si (CD) recoupe β en P, et (BP) recoupe (AC) en J, l'étude de la similitude transformant le triangle ABC en DBA, donc le cercle α en β, permet de conclure que $ABIJ$ sont cocycliques, que (IJ) est parallèle à (DC) et que ladite similitude transforme J en I (et P en M), donc que $\frac{IA}{ID} = \frac{JA}{JC} = \frac{ID}{IA}$.

Cette même similitude est utilisée par Philippe JACQUEMIER (Revel) pour prouver que $DMAN$ est un parallélogramme, par Jacques LEGRAND dans l'une de ses deux solutions pour prouver que (MB) est parallèle à (donc confondu avec) la médiane de BAD, ainsi que , par le groupe de géométrie de l'IREM de Bordeaux qui ajoute que (AB) est la symédiane du triangle ACD (car l'intersection K de (AB) et (CD) est barycentre de D et C affectés des coefficients AC^2 et AD^2), donc que, grâce à une similitude inverse de centre M transformant P en A, (MI) est médiane du triangle AMD.

Edgard DELPLANCHE (Créteil) rajoute à cela les propriétés du quadrilatère harmonique $ACED$, E étant l'intersection de (AB) avec le cercle circonscrit à ACD. Entre autres, le fait que l'angle $(BC, BD) = 2(AC, AD)$, donc que M est confondu avec B si et seulement si les deux cercles sont orhogonaux : ce fait est signalé par une demi-douzaine d'autres lecteurs. Certains distinguent plusieurs cas selon la position de M par rapport à A, B voire C. Signalons que M est confondu avec C si le rapport des rayons $\frac{r_\alpha}{r_\beta} = 2\cos(AD, AC)$.

René MANZONI (Le Havre) remarque que le symétrique γ du cercle β par rapport à (AD) passe par M : si O_α, O_β et O_γ désignent les centres des trois cercles et F le symétrique de O_α par rapport à A, $[AM]$, $[AB]$ et $[AD]$ sont orthogonaux à $[O_\gamma O_\alpha]$, $[O_\alpha O_\beta]$ et $[O_\beta O_\gamma]$ respectivement, et les points M, B et le milieu de $[AD]$ se déduisent par une translation de vecteur $\overrightarrow{FA}$ des projections de F sur $[O_\gamma O_\alpha]$, $[O_\alpha O_\beta]$ et $[O_\beta O_\gamma]$ lesquels sont sur sa droite de Simson.



André VIRICEL (Villers lès Nancy), enfin, prouve que si $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, le triangle ACZ est semblable À $O_\alpha A O_\beta$, donc que les angles (AC, AZ) et (MB, MA) sont égaux, d'où il déduit que la similitude transformant le triangle AMD en DAC transforme (AB) en la médiane (AZ) de DAC.

Certains (Miguel Amengual Covas - Majorque, Espagne ; Marguerite PONCHAUX - Lille ; Jean-Paul ROUX - Unieux) on recours à l'analytique, la trigonométrie ou les nombres complexes. Par ailleurs, Christian DUFIS (Limoges) met en avant le rôle symétrique joué par les cercles α et β, prouvant notamment que $[ND]$ et son homologue sur α $[QC]$ se coupent sur la droite (AB). Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles) signale que les puissances de I par rapport aux cercles α et β sont opposées ($IA^2 = -\overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{ID}$).

ENONCE N°226

Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur IR, continues en un point et vérifiant, a étant un paramètre réel :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = a\,f(x).f(y)$.

SOLUTION de Pascal CHANTRIAUX (38-Meylan)

1 - Considérations préliminaires

Si $a = 0$, en prenant $y = 0$, on obtient $2f(x) = 0$ pour tout x réel, d'où la seule solution $x \mapsto 0$.

Si $a \neq 0$ alors, en posant $g(x) = \dfrac{a}{2} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on est ramené à la recherche de l'ensemble E des fonctions g définies sur IR et continues en un point, qui vérifient la condition :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$ **(1)**.

On vérifie facilement Que les fonctions :

- constantes $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$
- $x \mapsto \cos x$ et, plus généralement, $x \mapsto \cos(kx)$ avec $k > 0$
- $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et, plus généralement, $x \mapsto \mathrm{ch}(kx)$ avec $k > 0$

sont dans E. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

2. Recherche de l'ensemble E.

Dans toute cette partie, g est une fonction de E, non identiquement nulle.

a) Propriétés algébriques de g.

Avec $y = 0$ dans **(1)**, on obtient $2g(x) = 2g(x)g(0)$. Or g n'est pas identiquement nulle, donc

$$g(0) = 1 \qquad \textbf{(2)}.$$

D'où, en prenant $x = 0$ dans **(1)**, $g(y) + g(-y) = 2g(y)$ pour tout y, ce qui prouve que

$$g \text{ est paire} \qquad \textbf{(3)}$$

et, en prenant $y = x$ dans **(1)**,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(2x) + 1 = 2[g(x)]^2 \quad \textbf{(4)}.$$

Enfin, en remplaçant x par $x + y$ et y par $x - y$ dans **(1)**,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(2x) + g(2y) = 2g(x + y)g(x - y) \qquad \textbf{(5)}.$$

b) Continuité de g.

On sait qu'il existe un point c en lequel g est continue.

D'après **(5)**, pour tout y, $g(2y) = 2g(c + y)g(c - y) - g(2c)$. On en déduit, en utilisant la continuité de g en c, que $\lim\limits_{y \to 0} g(2y) = 2\left[g(c)\right]^2 - g(2c)$ d'où, compte tenu de **(4)**, $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 1$. La fonction g est donc continue en 0.

Soit à présent x un réel quelconque. Grâce à (1) et à la continuité de g en 0, on obtient

$$\lim_{h \to 0}\left[g(x + h) + g(x - h)\right] = \lim_{h \to 0}\left[2g(x)g(h)\right] = 2g(x) \qquad \textbf{(6)}$$

Grâce à **(5)**, à la continuité de g en 0 et à **(4)**, on obtient

$$\lim_{h \to 0}\left[2g(x + h)g(x - h)\right] = \lim_{h \to 0}\left[g(2x) + g(2h)\right] = g(2x) + 1 = 2\left[g(x)\right]^2.$$

En utilisant ces deux résultats pour passer à la limite dans l'identité

$$\left[g(x + h) - g(x - h)\right]^2 = \left[g(x + h) + g(x - h)\right]^2 - 2\left[2g(x + h)g(x - h)\right]$$

on obtient $\lim\limits_{h \to 0}\left[g(x + h) - g(x - h)\right]^2 = \left[2g(x)\right]^2 - 2\left[2\left[g(x)\right]^2\right] = 0$ d'où

$$\lim_{h \to 0}\left[g(x + h) - g(x - h)\right] = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

La demi-somme des lignes **(6)** et **(7)** fournit $\lim\limits_{h \to 0} g(x + h) = g(x)$. On a établi le résultat :

$$g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \qquad \textbf{(8)}.$$

c) g est déterminée par sa valeur en un certain point b

La fonction g valant 1 en 0 et étant continue en 0, il existe un réel $b > 0$ tel que $g > 0$ sur $[0, b]$.

Montrons que b et $g(b)$ déterminent g, c'est-à-dire que :

si h est une fonction de E vérifiant $h > 0$ sur $[0, b]$ et $h(b) = g(b)$
alors $h = g$ (**9**).

Soit h une telle fonction. Elle est non identiquement nulle et vérifie donc toutes les propriétés démontrées ci-dessus pour g en a) et b). Les fonctions h et g étant paires et continues, pour montrer que h et g coïncident sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur $A = \left\{ \frac{n}{2^p} b \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \right\}$ qui est une partie dense de $[0, +\infty[$ (puisque $b > 0$).

D'après la relation (**4**) appliquée à g et à h, avec $x = b/2$, $\left[g\left(\frac{b}{2}\right)\right]^2 = \frac{g(b)+1}{2} = \frac{h(b)+1}{2} = \left[h\left(\frac{b}{2}\right)\right]^2$. Or, $g\left(\frac{b}{2}\right) > 0$ et $h\left(\frac{b}{2}\right) > 0$ car $\frac{b}{2} \in [0, b]$ donc $g\left(\frac{b}{2}\right) = h\left(\frac{b}{2}\right)$. En réitérant le raisonnement à partir de $\frac{b}{2}$ puis de $\frac{b}{2^2}$ etc... qui sont aussi dans $[0, b]$ on obtient, par une récurrence facile, l'égalité $g\left(\frac{b}{2^p}\right) = h\left(\frac{b}{2^p}\right)$ pour tout p entier naturel.

Fixons p et démontrons la relation $g\left(\frac{n}{2^p} b\right) = h\left(\frac{n}{2^p} b\right)$ par récurrence sur n.

Les égalités $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{b}{2^p}\right) = h\left(\frac{b}{2^p}\right)$ prouvent qu'elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie aux rangs $n - 1$ et n.

La relation (**1**) appliquée à g et à h permet d'écrire

$$g\left(\frac{n+1}{2^p} b\right) + g\left(\frac{n-1}{2^p} b\right) = 2\, g\left(\frac{n}{2^p} b\right) g\left(\frac{b}{2^p}\right)$$

et
$$h\left(\frac{n+1}{2^p} b\right) + h\left(\frac{n-1}{2^p} b\right) = 2\, h\left(\frac{n}{2^p} b\right) h\left(\frac{b}{2^p}\right).$$

Or, $g\left(\frac{b}{2^p}\right) = h\left(\frac{b}{2^p}\right)$, $g\left(\frac{n-1}{2^p} b\right) = h\left(\frac{n-1}{2^p} b\right)$ et $g\left(\frac{n}{2^p} b\right) = h\left(\frac{n}{2^p} b\right)$ donc

$$g\left(\frac{n+1}{2^p}b\right)=h\left(\frac{n+1}{2^p}b\right).$$

On a bien vérifié que g et h coïncident sur A, donc sur $\mathbb{R}$

d) Détermination de g.

Discutons suivant les valeurs de $g(b)$ et utilisons le résultat montré en c).

Premier cas : $g(b) > 1$.

On peut donc poser $k = \frac{1}{b}$ Argch $[g(b)]$ c'est-à-dire $g(b) = \text{ch}(kb)$ avec $k > 0$.

La fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ de E est positive strictement sur $[0, b]$ et coïncide avec g au point b. C'est donc g.

Deuxième cas : $g(b) = 1$

La fonction constante $x \mapsto 1$ de E est positive strictement sur $[0, b]$ et coïncide avec g au point b. C'est donc g.

Troisième cas : $g(b) < 1$

Par définition de b, $0 < g(b) < 1$. On peut donc poser $k = \frac{1}{b}$ Arccos $[g(b)]$ c'est-à-dire que $g(b) = \cos(kb)$ avec $0 < kb < \pi/2$. La fonction $x \mapsto \cos(kx)$ de E est positive strictement sur $[0, b]$ puisque $0 < kx < \pi/2$ pour tout x de $[0, b]$, et coïncide avec g au point b. C'est donc g.

5 - Conclusion

Compte tenu des résultats des paragraphes 1 et 4.d),

Si $a = 0$, la seule solution est la fonction constante $x \mapsto 0$.

Si $a \neq 0$ alors les solutions sont :

- les fonctions constantes $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 2/a$
- les fonctions $x \mapsto \frac{2}{a}\cos(k\,x)$ avec $k > 0$
- les fonctions $x \mapsto \frac{2}{a}\text{ch}(k\,x)$ avec $k > 0$.

AUTRES SOLUTIONS

Alain CORRE (Yaoundé - Cameroun), René MANZONI (Le Havre), Marguerite PONCHAUX (Lille), Pierre SAMUEL (Hossegor), Micel TANGUY (Quimper), M. VIDIANI (Fontaine lès Dijon),

… et quatre solutions incomplètes ou fausses…

REMARQUES

«L'originalité de l'hypothèse de l'exercice de Mlle CHAILLOUT m'a tout de suite frappé, car je m'intéresse aux équations fonctionnelles depuis plusieurs années (20 au moins)» écrit M. VIDIANI (Dijon).

«D'habitude, précise-t-il, on suppose f continue partout ou même seulement intégrable, puis on transfère pour montrer qu'elle est C_∞.»

«D'où l'hypothèse originale est que f est supposée continue en *un seul point*, et Mlle CHAILLOUT, par son idée, permet de montrer qu'elle est alors continue partout.»

«Cette idée va faire faire un bond dans la diminution des hypothèses de ce genre d'exercice. Gageons qu'en 1995...fleuriront les exercices d'oraux exploitant cette idée.»

A cet éloge, M. VIDIANI joint un long article, solidement illustré sur les méthodes de résolution d'équations fonctionnelles dans l'optique des oraux de concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

Il est intéressant de discerner ce qui, dans cette équation, est en rapport avec la continuité de ce qui se conserve, même si l'on supprime l'hypothèse de continuité. Car on peut concevoir des solutions continues en aucun point : M. VIDIANI cite la fonction θ définie sur $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ par $\theta(x + y\sqrt{2}) = y + x\sqrt{2}$ et sur un supplémentaire dans $\mathbb{R}$ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (dont l'existence est conditionnée par l'axiome du choix) par $\theta(z) = z$. La fonction $\cos(\theta(x))$ vérifie l'équation fonctionnelle sans être continue en aucun point. Et plus généralement toute fonction $\cos(\varphi(x))$ où $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ vérifie l'équation fonctionnelle.

René MANZONI (Le Havre) constate par exemple que

$$(g(x+y) - g(x-y))^2 = 4(g^2(x) - 1)(g^2(y-1)),$$

ce qui prouve qu'indépendamment de toute continuité, la fonction g est soit comprise entre (-1) et $(+1)$ pour tout x, soit supérieure à 1 pour tout x (elle ne peut pas être inférieure à (-1), car $g(x) = 2g^2(x/2) - 1$).

Marguerite PONCHAUX (Lille) prouve que les zéros de g sont en progression arithmétique et Pierre SAMUEL (Hossegor) ajoute que, si elle admet un zéro b, la fonction est périodique, de période divisant $4b$. Mais l'existence d'un zéro au moins quand la fonction est comprise entre (-1) et $(+1)$ suppose la continuité. A partir de la continuité, on peut intégrer par rapport à x l'équation fonctionnelle - comme le fait Michel TANGUY (Quimper) - et prouver ainsi que la fonction est dérivable, même deux fois dérivable et plus... et qu'elle vérifie une équation différentielle simple.

Une autre direction de recherche peut être de changer l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée. Ainsi, Marie-Laure CHAILLOUT étudie les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant cette équation. Les résultats sur la continuité se démontrent de la même manière que pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mais pour conclure que $g(x) = \cos(\alpha x)$, avec $\alpha z = u + iv$, elle prouve que sur un intervalle $]0, x_0]$ la partie imaginaire de g est de signe constant, ce qui permet de résoudre sans ambiguïté l'équation $g^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) + 1\right)$ et donc de calculer $g\left(\frac{px_0}{2^n}\right)$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Pour les fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, le résultat précédent prouve que leurs restrictions à $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont de la forme $g(x) = \cos(\alpha x)$ et $g(iy) = \cos(\beta y)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. La relation $g(x + iy) + g(x - iy) = 2g(x)g(iy)$ jointe à : $2g(x + iy)g(x - iy) = g(2x) + g(2iy)$ nous donne : $g(x + iy) = \cos(\alpha x \pm \beta y)$.

Mais comment préciser le signe ? A priori, il se peut que sur un ensemble de points $g(x + iy) = \cos(\alpha x + \beta y)$ et sur un autre ensemble, $g(x + iy) = \cos(\alpha x - \beta y)$. A la frontière entre les deux ensembles, on doit avoir, à cause de la continuité, $\cos(\alpha x + \beta y) = \cos(\alpha x - \beta y)$, donc, soit $x = 0$, soit $y = 0$, soit α réel et $\alpha x = k\pi$, soit β réel et $\beta y = k\pi$. Si en un point de cette frontière potentielle, il y avait changement de signe, par exemple, si, pour y petit, on avait en un point x : $g(x + iy) = \cos(\alpha x + \beta y)$ et $g(x - iy) = \cos(\alpha x + \beta y)$, cela mettrait en défaut $g(x + iy) + g(x - iy) = 2g(x)g(iy)$. Donc les solutions sont toutes de la forme $g(x + iy) = \cos(\alpha x + \beta y)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Si maintenant, on restreint l'ensemble de départ, Jacques AMON (Limoges) montre qu'on qu'on peut trouver des solutions g de $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et même de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$) prenant des valeurs inférieures à (-1). Ce sont les $g(n) = (-1)^n \operatorname{ch}(kn)$, du fait que $(-1)^{n+m} = (-1)^{n-m}$. Elles sont les restrictions à $\mathbb{Z}$ de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $g(x) = \cos((ki + \pi)x)$. Mais le problème se complique si l'on cherche des solutions de $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sont obligatoirement continues. Si $g(1) > 1$, alors on retombe sur les seules solutions continues : $g(x) = \operatorname{ch}(kx)$ du fait que l'équation fonctionnelle permet de calculer de proche en proche $g(qx) = P_q(g(x))$, P_q étant un polynôme de degré q vérifiant : $P_q(\cos x) = \cos qx$. Ceci permet de trouver les q racines de $P_q(X) = g(1)$ et de prouver qu'une seule est réelle supérieure à 1, ce qui détermine $g\left(\frac{1}{q}\right)$ sans ambiguïté et, par suite, permet de calculer g sans ambiguïté sur tout **Q**.

Mais il n'en va pas de même si $g(1) < 1$. L'équation $P_q(x) = g(1)$ offre alors q valeurs possibles pour $g\left(\frac{1}{q}\right)$, à savoir, si $g(1) = \cos t$, $g\left(\frac{1}{q}\right) = \cos\left(\frac{t + 2k\pi}{q}\right)$. Le choix n'est pas totalement arbitraire, certes, mais on trouve tout un tas de fonctions solutions non continues de l'équation fonctionnelle !

Par exemple, pour tout q impair et tout entier $k > 0$, appelons q_k le plus petit entier >0 tel que $q_k q \equiv 1 (\text{mod.} 2^k)$, et posons $q_0 = 0$.

Considérons la fonction qui à $x = \frac{p}{2^k q}$ associe $g(x) = \cos((1 + 2q_k q)\pi x)$.

Quelle que soit la manière d'écrire x sous la forme $\frac{p}{2^k q}$, la formule ci-dessus fournit la même valeur de $g(x)$.

Supposons en effet que $x = \frac{p}{2^k q} = \frac{p'}{2^{k'} q'}$ avec $k \leq k'$. Appelons d le PGCD de q et q' : $q = du$ et $q' = du'$ avec u et u' premiers entre eux. On cherche à prouver que $\cos(x + 2\pi x q_k q) = \cos(x + 2\pi x q'_k q')$.

$q_k q - q'_k \cdot q'$ est divisible par d, tout comme il est divisible par 2^k puisque $q_k q \equiv 1 (\text{mod.} 2^k)$ et $q'_k \cdot q' \equiv 1 (\text{mod.} 2^{k'})$. Il est donc divisible par $2^k d$. Or, $2^k dx$ est entier, car $\frac{q}{d} = u$ divise p du seul fait que $up' = 2^{k'-k} u'p$. Ce qui prouve le résultat annoncé.

Dès lors, il suffit de réduire x et y au même dénominateur pour rendre évidente la relation : $g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y)$ dans la mesure où le coefficient $1 + 2q_k q$ dépend exclusivement de ce dénominateur commun. Cette fonction (comme une infinité d'autres fonctions semblables) vérifie l'équation fonctionnelle. Mais si x a un dénominateur impair, $g(x) = \cos \pi x$ alors que si x a pour dénominateur une puissance de 2 ($q = 1 \Rightarrow q_k = 1$), $g(x) = \cos 3\pi x$, donc la fonction n'est nullement continue, les deux sous-ensembles de **Q** ainsi définis étant tous deux denses.