AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à:

Robert FERRÉOL - 6, rue des annelets
75019 PARIS.

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Voici trois questions posées par un collègue dont j'ai malencontreusement perdu les coordonnées et qui disait se les être posées lors de son enseignement en collège.

AVIS DE RECHERCHE N° 32

Combien existe-t-il de patrons de cubes non deux à deux isométriques dans $\mathbb{R}^3$?

On peut étendre la question aux polyèdres .

AVIS DE RECHERCHE N° 33

Montrer que dans un triangle non aplati *ABC*, $A < B < C$ si et seulement si $a < b < c$ (1) (où *A, B, C* sont les mesures en degrés des trois angles, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

AVIS DE RECHERCHE N° 34

Soit p et q deux nombres entiers naturels non nuls premiers entre eux. Donner un majorant de la période du développement décimal de la fraction *p/q*.

RÉPONSES AUX AVIS PRÉCÉDENTS

Je n'ai reçu aucune réponse à l'avis de recherche N° 28 concernant l'origine de l'appellation des suites arithmétiques et géométriques (qui m'a été posé par une collègue à Loctudy) et mes recherches dans divers dictionnaires n'ont strictement rien donné.

D'autre-part, la réponse qui a été donnée à l'avis n° 26 (problème de Kimberling : un triangle quelconque ABC étant donné, déterminer le point K tel que les triangles KAB, KAC, KBC ont le même périmètre) publiée dans le n° 396 donnait des renseignements sur Kimberling, mais aucun sur le problème lui-même...

Avis de recherche n°23 sur le problème des huit reines (*bulletins* 394, page 339 ; 395, page 481).

Pierre Crespin (lycée Dumont d'Urville, 212, rue Amiral Jaujard, 83000 Toulon) a conçu un logiciel turbo-Pascal pour la recherche guidée des solutions (lui envoyer une disquette avec enveloppe retour).

Michèle Germoni (collège Reynier, Six-Fours) a développé ce travail sur Minitel. Appeler 36 14 EDUCAZUR, Je comprends : EXO, Mathématiques : D, jeux : H.

Avis de recherche n°24 (*bulletins* 394, page 340; 395, page 482; 396, page 603)

Recherche de séries de trois noms communs *A*, *B*, *C*, "simples" (accessibles à un élève de sixième), et tels que : tous les *C* sont des *A* et des *B*, et tous les *A* qui sont des *B* sont des *C*.

Commentaires de P. Jacquemier (Revel)

Bien sûr, il faut que $A \cap B = C$, ou plutôt que l'intersection de l'ensemble des A et de l'ensemble des B soit l'ensemble des C. Les enfants accepteront très bien que, les A étant des tartes et les B des gâteaux aux fraises, les C soient des tartes aux fraises.

Mais ce qui est difficile pour eux, c'est que les A, les B et les C soient désignés par des noms simples, et non par des groupes de mots. Le triplet (***losange, rectangle, carré***) leur paraît probablement du même modèle que (***chat, chien, lapin***), d'autant qu'ils ont appris, dès l'école maternelle mais aussi par le langage courant, à distinguer losange et carré, ou rectangle et carré, comme à distinguer par exemple, triangle et carré.

Si on leur propose le triplet (***boulangerie, pâtisserie, boulangerie-pâtisserie***), ou des triplets construits de la même façon, ils ne s'en satisferont pas: ces noms composés "ne sont pas des vrais noms". Ce trait d'union, qui unit deux qualités, est pourtant celui de (***losange, rectangle, losange-rectangle***).

De ***losange-rectangle***, où les mots ***losange*** et ***rectangle*** sont des noms, on passe vite à losange rectangulaire: un ***losange rectangulaire***, c'est un carré. Mais l'histoire des mots n'est pas cela ; ***rectangle*** fut d'abord adjectif: qui a un angle droit. Le triangle rectangle, encore bien vivant, est attesté en 1549, me dit un dictionnaire étymologique, alors que le substantif ***rectangle***, avec la signification que nous lui donnons de parallélogramme à angle droit, n'apparaît qu'en 1690. L'adjectif ***rectangulaire*** est récent, 1845.

Je n'ai pas trouvé d'exemple aussi "beau" que (***losange, rectangle, carré***). Mais cette beauté est factice. Si ***losange*** est un substantif fort ancien (XIII^e siècle), les mots ***rectangle***, ***carré***, ici des noms, sont en d'autres endroits des adjectifs : une table carrée, un parallélépipède rectangle (1875).

La substantivation d'un adjectif est un phénomène linguistique banal. Alors proposons à nos élèves les mots (***double, triple, sextuple***). Il aura fallu passer de l'adjectif (un nombre double d'un autre) au substantif : un double. Les doubles sont les nombres de la table des 2, les triples de celle des 3, les sextuples de celle des 6.

24 est un double et un triple, donc il est un sextuple, 24 est un sextuple, donc il est un double et un triple, de la même façon que: ce quadrilatère est un losange et un rectangle, donc il est un carré, ce quadrilatère est un carré, donc il est un losange et un rectangle.

Avis de recherche n° 25 sur le papier gausso-arithmétique (suite).

Les établissements GUYOT GRAPHCO SA qui fabriquent ce papier ont pour coordonnées : avenue de la république 71210 *Montchanin* ; tel : 85 78 54 11 .

Commentaires de Gérard GRANCHER (université de Rouen).

Il est possible de faire soi-même son papier gausso-arithmétique, du moins si on a accès à un micro-ordinateur équipé d'un périphérique d'impression de bonne qualité (table traçante, imprimante laser ou imprimante à jet d'encre).

Pour que la fonction de répartition d'une loi normale soit représentée par une droite, il suffit que l'échelle des ordonnées soit déterminée par l'inverse F^{-1} de la fonction de répartition F de la loi normale:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

La difficulté est qu'il n'existe pas de formule exacte (ne faisant appel qu'aux fonctions usuelles) permettant le calcul de F et de F^{-1}. Mais il existe d'excellentes formules approximatives (On pourra consulter : ABRAMOWITZ & STEGUN, Handbook of *Mathematical* Functions with Formulas and Graphs. Dover). Voici l'une des meilleures: pour $p \in \,]0\,,\,1/2]$ et

$$y = \sqrt{-2 \ln p}\,,\ F^{-1}(p) = y - \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4}$$

avec

$a_0 = 0.322\,232\,431\,088$	$b_0 = 0.099\,348\,462\,606$
$a_1 = 1$	$b_1 = 0.588\,581\,570\,495$
$a_2 = 0.342\,242\,088\,547$	$b_2 = 0.531\,103\,462\,366$
$a_3 = 0.020\,423\,121\,024\,5$	$b_3 = 0.103\,537\,752\,85$
$a_4 = 0.000\,045\,364\,221\,014\,8$	$b_4 = 0.003\,856\,070\,063\,4$

Pour $p \in \,]1/2,\, 1]$, on utilise la relation $F^{-1}(p) = -F<^{-1}(1 - p)$.

La question de J.M. Bonneval précisait que le papier gausso-arithmétique est bien *pratique pour* tester la normalité d'une variable statistique. Cette expression est un abus de langage. La seule représentation de la fonction de répartition empirique (calculée à partir de l'observation d'un échantillon) sur du papier gausso-arithmétique ne permet pas de tester (au sens précis que donnent les statisticiens à ce mot) la normalité des observations ; cela permet seulement de vérifier graphiquement (grossièrement) que les observations sont régies par une loi proche de la loi gaussienne. Les (vrais) tests de normalité (basés sur la comparaison entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition normale de paramètres (moyenne et variance) estimés sur l'échantillon) nécessitent une mise en oeuvre plus complexe.

Une petite difficulté apparaît lors du tracé d'une droite de Henry (pour savoir qui était Henry, je vous renvoie à lecture du bulletin de la SMAI: Matapli 36 (P. CRÉPEL, Henri et la droite de Henry). Ayant observé un échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on représente sur le plan (rapporté à un repère orthonormé) les points de coordonnées $\left(x_{(i)}, F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ où $x_{(i)}$est la i-ème observation de l'échantillon réordonné par valeur croissante $(x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.Il est alors impossible de représenter la plus grande observation $(F^{-1}(1) = \infty)$. Aussi préfère-t-on alors tracer les points de coordonnées $\left(x_{(i)}, F^{-1}\left(\frac{i - 3/8}{n + 1/4}\right)\right)$, ce qui ne change pas grand chose graphiquement parlant, mais permet de représenter toutes les observations. C'est le choix effectué par les concepteurs du logiciel Statgraphics. Parfois il est proposé un autre choix du type $\left(x_{(i)}, F^{-1}\left(\frac{i-a}{n+1-2a}\right)\right)$ avec $a \in [0\ , 1/2[$; on s'assure ainsi que les points d'abscisses $x_{(i)}$ et $x_{(n+1-i)}$sont d'ordonnées opposées. Si ces points apparaissent alignés, on conclura que probablement les observations sont régies par une loi normale. Et à partir du tracé au jugé d'une droite passant près de ces points, on pourra estimer grossièrement la moyenne et l'écart-type des observations.

AVIS DE RECHERCHE N° 27. **Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposition ne sont-ils pas, en fait, un même mode de raisonnement ?**

Les deux réponses qui suivent donnent des éclairages intéressants sur le problème mais ne devraient pas, me semble-t-il, clore le sujet.

Première réponse de Rudolf Bkouche (Lille).

Cette question ne me semble pas relever d'un simple avis de recherche. Elle est en effet au cœur même de la logique, et pour être plus précis, de la distinction, souvent oubliée, entre la logique formelle d'Aristote et la logique mathématique, distinction que l'on peut rapprocher de la distinction entre géométrie et géométrie analytique. Sur cette distinction, on peut lire par exemple l'article de René Thom, “Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique” in *Pourquoi la Mathématique?* UGE, Paris 1974, p. 72-73.

Le terme *formel* que l'on retrouve dans deux expressions qui aujourd'hui nous semble proches, le formel de la logique formelle aristotélicienne et le formel du calcul formel, parlent-ils de la même chose ?

Si la logique formelle s'intéresse à la forme du raisonnement, c'est-à-dire la manière dont il se dit ou s'écrit, et aux règles qui régissent cette forme, le raisonnement porte sur un contenu et c'est ce contenu qui lui donne sens. La logique se définit alors comme une codification des règles du discours qui permet d'atteindre la vérité. Dans ce cadre, celui de la recherche de la vérité, la logique s'appuie sur des principes qui lui sont antérieurs, principes qui régissent cette recherche de la vérité ; autrement dit la logique est fondée par une métaphysique. En particulier, c'est le principe du tiers-exclu qui permet le raisonnement par l'absurde : pour montrer que A implique B, on peut montrer que si l'on suppose simultanément A et la négation de B, alors cela conduit à une contradiction ; par conséquent, si l'on suppose A, alors nécessairement B. C'est de la même façon que l'on justifie le raisonnement classique par exhaustion : pour montrer que deux grandeurs A et B sont égales, on montre que les hypothèses $A < B$ et $A > B$ conduisent à une contradiction, il ne reste alors que la seule possibilité $A = B$.

Une telle conception suppose, et c'est encore la métaphysique qui fonde cette hypothèse, une adéquation entre le langage et les "choses" dont il parle ; c'est cette adéquation nécessaire au développement de la science qui conduit les Grecs à se méfier des lieux où cette adéquation est mise en défaut, ainsi la méfiance envers l'infini.

La logique moderne, quant à elle, se définit comme un calcul. Si l'idée de considérer le raisonnement comme un calcul est ancienne, il fallait attendre le développement du calcul algébrique pour que puisse se mettre en place une représentation algébrique des *lois* de *la pensée* telle que la propose Boole dans l'ouvrage qui porte ce titre. Il s'agit essentiellement ici d'un calcul *symbolique* en ce sens que les lettres sur lesquelles opèrent le calcul représentent des objets, ici des propositions, et l'on peut comparer l'œuvre de Boole à celle de Descartes mettant en place la géométrie analytique où le calcul porte sur des lettres représentant des mesures de grandeurs. Mais si ce calcul, celui de Boole comme celui de Descartes, reste proche des objets sur lesquels il porte, il ouvre la voie à ce que l'on appelle un calcul formel : celui-ci porte essentiellement sur les lettres sur lesquelles il opère, indépendamment de toute signification. On est ainsi conduit à définir un calcul comme un ensemble de règles portant sur des signes, c'est ce point de vue qui conduit à la logique algébrique telle qu'on peut la lire par exemple dans l'ouvrage de COUTURAT *L'Algèbre de la Logique* (Gauthier-Villars, Paris 1905). Mais cette conception algébrique de la logique, si elle est fondée comme calcul, laisse en suspens le problème de son adéquation à la pensée elle-même, comme le note Louis COUTURAT lorsqu'il écrit, dans l'ouvrage cité : "*C'est une question philosophique de savoir si, et dans quelle mesure,* *ce calcul répond aux opérations réelles de l'esprit, et est propre à traduire ou* même à remplacer le *raisonnement* "

On pourrait rapprocher cette question de celle posée par PONCELET lorsqu'il énonce les deux postulats de la géométrie analytique, le premier postulat affirmant que, une situation géométrique étant donnée, on peut la représenter par un système d'équations, le second postulat affirmant que les nouvelles équations obtenues après calcul représentent encore des propriétés de la situation géométrique donnée. Si l'on remarque que le calcul est soumis à des règles formelles indépendantes de la situation géométrique donnée, la question se pose des raisons qui permettent d'affirmer l'adéquation entre le calcul et la situation géométrique. C'est le problème que pose toute représentation symbolique d'une situation lorsque l'on affirme que les calculs (c'est-à-dire les transformations effectuées sur les symboles de façon indépendante des objets qu'ils représentent) nous donnent des informations sur la situation primitive.

Dans le cadre de la logique algébrique, la contraposition se présente comme une simple tautologie. Si le calcul des propositions peut être défini à partir de deux opérations logiques, l'une binaire représentée par le signe $\vee$, l'autre unaire représentée par le signe ' satisfaisant à la propriété $A'' = A$, la proposition $A \Rightarrow B$ n'est autre qu'une façon d'écrire la proposition $A' \vee B$, laquelle peut s'écrire $A' \vee B''$ et par conséquent $B' \Rightarrow A'$. On pourrait écrire, sous une forme purement calculatoire :

$$(A \Rightarrow B) = A' \vee B = A' \vee B'' = B'' \vee A' = (B' \Rightarrow A')$$

Évidemment la question se pose du lien entre un tel calcul et le raisonnement, mais c'est là un problème philosophique auquel on ne peut répondre par une simple identification, même si l'on remarque que le calcul booléen a été fabriqué pour représenter les lois de la pensée comme la géométrie analytique a été fabriquée pour représenter les phénomènes géométriques.

On peut évidemment répondre à cette question en recourant à la notion d'interprétation, mais cela renvoie à d'autres questions: Qu'est-ce qui fonde l'interprétation? Dans quelle mesure ce fondement relève-t-il de la seule connaissance positive (non métaphysique)? Tout cela nous rappelle que l'identification du raisonnement par l'absurde et de la contraposition, si elle peut paraître séduisante dans un premier temps, pose un problème philosophique qui ne se réduit pas à une simple prise de position, celui de l'adéquation entre les constructions formelles qui se proposent de représenter des parties du réel (ici, le raisonnement humain) et ces parties du réel.

Pour revenir à la géométrie analytique, peut-on se contenter de dire que les équations des coniques de la géométrie analytique sont équivalentes aux lourdes propriétés énoncées par Apollonius, ou faut-il ajouter que les équations cartésiennes, loin d'être une simple reformulation des énoncés apolloniens, mettent en place une nouvelle manière de penser la géométrie, et par conséquent ne se contentent pas de répéter Apollonius (en précisant aussi que si elles disent plus, elles disent aussi moins)?

Voilà quelques réflexions autour de l'avis de recherche n°27. Est-ce une réponse? Je ne le pense pas, mais la question posée demandait bien plus qu'une simple réponse éliminant l'aspect essentiellement philosophique du problème qu'elle pose.

Je signale que je termine actuellement un article où j'évoque ce problème à propos des règles de la démonstration (article à paraître dans les *Actes de l'Université d'été d'Histoire des Mathématiques de Montpellier,* juillet 1993).

Deuxième réponse, de Gérard Lavau (Dijon).

On peut considérer que le raisonnement par contraposition est à classer parmi les raisonnements par l'absurde, comme l'indique R. Ferréol dans le bulletin n° 396. Outre l'exemple cité *(* n^2 *pair* $\Rightarrow$ *n pair),* on peut donner aussi :

Soit f bijective continue sur un intervalle I. Alors f est strictement monotone.

Par l'absurde, on suppose *f* non strictement monotone et l'on montre que *f* n'est pas injective, ce qui est tout à fait un raisonnement par contraposition.

Tout compact K est borné.

Par l'absurde, si *K* n'est pas borné, on construit une suite dans *K* n'admettant pas de sous-suite convergente, ce qui revient à montrer la contraposée *non borné* $\Rightarrow$ *non compact.*

Il existe cependant un certain nombre de cas où l'on utilise un raisonnement par l'absurde, et où la formulation par contraposée se fait difficilement. Citons par exemple les théorèmes ***d'inexistence*** d'objet, où l'on suppose que l'objet existe et où l'on cherche une contradiction.

Il n'existe pas de bijection d'un ensemble E sur l'ensemble de ses parties

On suppose qu'une telle bijection existe, et l'on arrive à une contradiction du type $x \in F \Leftrightarrow x \notin F$. Il me paraît difficile de dire que l'on a montré la contraposée de :

$$[x \in F \Leftrightarrow x \notin F] \Rightarrow \text{pas de bijection entre E et P(E) !!!}$$

Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si un programme quelconque s'arrêtera ou bouclera indéfiniment.

Si un tel algorithme existait, on pourrait construite un programme qui s'arrête si et seulement si il ne s'arrête pas.

Enfin, rien n'indique qu'un raisonnement par l'absurde ne puisse pas être remplacé par un raisonnement direct. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ se fait usuellement par l'absurde ; on suppose que $\sqrt{2} = p/q$ irréductible, et l'on montre que 2 divise p et q. Cependant, un raisonnement direct s'applique : l'algorithme d'Euclide pour trouver une mesure commune à $\sqrt{2}$ et à 1 ne s'arrête pas, ce qui suffit à prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

De même, le raisonnement par exhaustion d'Archimède consistant à montrer l'égalité des aires A et B de deux surfaces par un double raisonnement par l'absurde ($A > B$ puis $A < B$) conduisant chacun à une contradiction a été remplacé par le calcul direct d'intégrales.

Avis de recherche n° 30

La constante d'Euler γ, définie par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to \infty$ est bien connue et se retrouve dans beaucoup de formules de l'analyse ; mais on peut aussi considérer, pour $0 < \alpha < 1$ les constantes C_α (dépendant de α) définies par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} = \frac{n^\alpha}{\alpha} + C_\alpha + o(1)$.

Ces constantes ont-elles un nom ? Interviennent-elles aussi dans d'autres formules de l'analyse ?

Avaient été indiquées les relations suivantes : $C_\alpha = \frac{1}{\alpha} - \gamma + o(1)$ quand $\alpha \to 0$ et : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-\alpha}} = (2^\alpha - 1)C_\alpha$ (1).

François Lo Jacomo signale que la constante C_α n'est autre que $C_\alpha = -\zeta(1-\alpha)$, ce qui lui enlève pas mal de mystère. La raison en est que, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on montre facilement que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (1 - 2^{1-s} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

autrement dit : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ et que cette dernière formule se conserve pour $0 < s < 1$ par le principe du prolongement analytique (ceci bien que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ diverge !). La formule (1) donne alors le résultat.