Une autre version

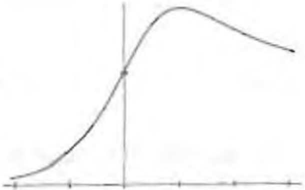
par Iñès LADIREZ

Remarque préliminaire

Cet énoncé repose sur la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ *et consiste à regarder le comportement asymptotique de la courbe. La présence des suites y est totalement artificielle : c'est un bel exemple d'anti-mathématiques. Je propose d'en rester à un énoncé "continu", sans intervention du "discret" qui ici n'ajoute rien, ni au plan mathématique, ni au plan de l'évaluation des candidats.*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

dont une calculatrice graphique propose la courbe ci-contre.



I - Quelques éléments pour préciser la représentation graphique

La courbe affichée suggère différentes propriétés qu'on demande de confirmer, de préciser ou d'infirmer par un calcul ou un raisonnement précis :

- f semble définie sur tout $I\!R$ (on peut étudier les variations de $e^x - x$) ;
- f semble avoir pour asymptote horizontale les droites d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$;
- f semble avoir un maximum en $x = 1$ dont la valeur semble comprise entre 1 et 2 ;
- f semble monotone croissante à gauche de ce maximum et monotone décroissante à droite.

II - Comportement de la courbe le long de ses deux asymptotes

L'étude précédente a confirmé l'existence de deux asymptotes d'équations respectives $y = 0$ et $y = 1$. On peut alors se poser le problème de savoir si les aires $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ des domaines définis par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 1 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{pour } A(\lambda) \qquad \begin{cases} \lambda \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{pour } B(\lambda)$$

ont des limites finies lorsque λ tend vers $+\infty$ pour $A(\lambda)$ et vers $-\infty$ pour $B(\lambda)$.

Etude de $A(\lambda)$

a) Ecrire $A(\lambda)$ sous la forme d'une seule intégrale.

b) Cette intégrale ne peut pas être calculée directement, mais on peut d'abord remarquer qu'elle croît avec λ. Le justifier!

c) Montrer que, pour $x \geq 0$, $\dfrac{1}{e^x - x} \leq 2e^{-x}$ c'est-à-dire $e^x - x \geq \dfrac{e^x}{2}$.

En déduire que $A(\lambda) = \int_0^\lambda 2\,x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) Calculer $\int_0^\lambda 2\,x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et conclure.

Etude de $B(\lambda)$

En remarquant (et en justifiant !) que pour $x \leq 0$, $e^x - x \geq 1$, conclure de même pour $B(\lambda)$.