Informatique

*Le séminaire APMEP de mai 1994 était consacré à l'**informatique**. Vous trouverez dans ce Bulletin, ainsi que dans les suivants, l'essentiel des interventions qui y furent faites. Merci à leurs auteurs d'avoir bien voulu nous communiquer leurs textes.*

Quelques problèmes pédagogiques posés par l'utilisation des outils informatiques

J.-P. Sorribas

Introduction

Lorsque la Commission Informatique m'a sollicité pour intervenir au séminaire 1994, je me suis demandé quelle pouvait être ma contribution.

Ni chercheur, ni informaticien, ni didacticien, ni universitaire, je peux apporter un témoignage, dans un triple cadre :
- celui d'un professeur de mathématiques en lycée, enseignant le plus souvent en TC ;
- celui d'un animateur MAFPEN et IREM ;
- celui d'un animateur informatique local, initiateur d'une expérimentation pédagogique pluridisciplinaire sur le thème «optimiser l'utilisation pédagogique des outils informatiques».

Etat des lieux

Ce que disent les professeurs (enquête préalable à l'expérimentation pédagogique au lycée Paul Sabatier) :
- nécessité d'une importante formation initiale,
- lourd travail personnel,

- pour les collègues ayant reçu une formation :
  - formation insuffisante
  - mauvaises conditions matérielles (machines, logiciel, effectifs)
  - perte de temps élèves (les programmes…)
  - efficacité discutable.

C'est évidemment ce dernier point (efficacité pédagogique) qui est fondamental. Mais, pour le tester convenablement, il faut, le mieux possible, résoudre les problèmes liés aux conditions matérielles (mise en place d'une maintenance efficace dans l'établissement), et à la formation (par exemple, en organisant une formation locale, à la demande, parallèlement aux stages PAF1 et PAF2). Après seulement, nous pouvons tester à quelles occasions et dans quelles conditions (demi-groupes dans la salle informatique ? utilisation de l'ordinateur en salle de cours ? travail en libre service ?…) le recours à l'informatique s'avère efficace. Si effectivement nous dégageons l'intérêt de ce recours, alors l'investissement - non négligeable - en travail personnel initial sera rentabilisé et accepté.

Outils informatiques utilisés en mathématiques au lycée.

→ Travail personnel, soutien : peu utilisé dans mon lycée, mais par contre très exploité dans les collèges (SMAO).

→ Les logiciels de type **Imagiciel** sont utilisés
  - soit comme appui du cours, en utilisant un ordinateur relié à un rétroprojecteur ou à un moniteur de grande taille ;
  - soit en travaux dirigés (ou modules), dans la salle informatique (18 micro-ordinateurs)

→ Les outils "ouverts" sont :
  - calculatrices
  - tableurs (MS Works, Excel)
  - grapheurs (Graph'x, Dérive, calculatrices graphiques)
  - calcul formel (Dérive)
  - géométrie (Cabri-Géomètre, Géoplan, Géospace).

En pratique, dans notre lycée :

1 - les **tableurs** sont peu utilisés (temps d'apprentissage non négligeable, priorité à la calculatrice).

Exemple 1 : Introduction de la notion de nombre dérivé par optimisation de l'erreur commise en remplaçant localement la courbe par une sécante. On organise un tableau de nombres visualisant $f(x_0 + h) - [ah + f(x_0)]$ pour plusieurs valeurs de a et de h, et on analyse les observations en liaison avec l'interprétation graphique et l'expression formelle de la différence suivant les valeurs de a (disparition du terme en h). L'utilisation du tableur permet de développer rapidement ce tableau, mais au prix d'une faible implication des élèves : les résultats obtenus restent mystérieux et le lien avec la situation de départ très indirect. Une stratégie apparemment plus lourde, mais pédagogiquement profitable à ce niveau (classe de Première), consiste à transformer la classe en tableur, chaque élève gérant une ou plusieurs cellules du tableau de nombres et effectuant les calculs avec sa propre calculatrice, la synthèse se faisant collectivement au tableau mural.

Les avantages sont :

- utilisation d'un outil personnel ;
- contrôle des résultats, chaque calcul étant fait par plusieurs élèves, avec parfois des stratégies différentes ;
- richesse de la synthèse collective.

2 - les **grapheurs** sont utilisés en classe ou en libre service.

Exemple 2: utilisation en TA2, où le tracé de courbe reste l'objectif principal de la plupart des exercices d'analyse, et la principale cause d'échec, et où peu d'élèves disposent de calculatrice graphique.

En obtenant immédiatement, et avant toute étude, le tracé de la courbe (et son impression), on centre l'activité non plus sur ce tracé, mais sur la cohérence entre l'étude et le tracé, les résultats obtenus étant directement confrontés à leur interprétation graphique, ce qui, de plus, donne du sens à ce graphique. Enfin, dans le cas de problèmes "concrets" (par exemple, optimisation de l'aire d'un rectangle de périmètre donné), on peut se contenter dans un premier temps de la courbe obtenue à partir de l'expression de $f(x)$: la courbe devient un outil, et non un obstacle technique difficile à franchir.

3 - les logiciels de **calcul formel** sont peu utilisés, sauf dans quelques cas comme outil de vérification ou d'exploration rapide. Leur exploitation pédagogique pose problème pour le moment.

4 - les logiciels **de géométrie** sont souvent employés, en particulier Géoplan, qui permet de mettre en œuvre, au choix de l'utilisateur, des outils de géométrie pure, ou de géométrie analytique.

Quelques problèmes...

- Spécificité des calculatrices

On a souvent entendu des réflexions du genre : «ils ne sauront plus calculer», «ils ne savent pas utiliser leur calculatrice». En effet, on calcule autrement (mais pas forcément plus mal) avec un nouvel outil. En effet, il faut apprendre à l'utiliser, et cela fait partie de notre rôle.

Les calculatrices sont actuellement **le seul outil informatique auquel les élèves ont accès en permanence**, et une grande partie de leur utilisation nous échappe. Leur présence entraîne des modifications importantes dans les comportements des élèves, et dans les pratiques pédagogiques, qui ne correspondent pas toujours à des choix de l'enseignant, mais qui sont imposés par les faits, souvent sans prendre le temps de la réflexion. Elles sont là ; il faut faire avec.

Un exemple significatif est l'apparition des formulaires au baccalauréat (option dont personnellement je me félicite) : nous ne l'avons pas décidée pour des raisons pédagogiques, mais elle nous a été imposée pour "contrer" l'utilisation de banques de formules.

Il faudrait peut-être envisager de précéder, ou au moins d'accompagner l'événement, et cesser de courir après ; cela paraît crucial dans la perspective de l'intégration prochaine de logiciels de calcul formel. Il faudrait aussi éviter de parler en termes simplistes d'interdiction ou d'autorisation, pour en venir à l'essentiel : l'exploitation de l'outil.

Beaucoup d'élèves l'utilisent spontanément comme un moyen d'exploration ou de recherche (exemple : prévoir une limite), ou de contrôle de résultats établis par d'autres moyens, sans que parfois on ne sache vraiment ce qui emporte leur conviction (la preuve mathématique ? la "confirmation" par la calculatrice ?). Ces activités sont souvent très riches, et on peut regretter que nos élèves ne disposent pas, dans les mêmes conditions de disponibilité, d'un outil d'exploration géométrique.

Pour l'enseignant, deux champs d'activités (pas forcément dissociés dans la pratique) s'ouvrent alors :

1 - **Intégration** de l'outil dans la démarche pédagogique :

→ **exploration**

Exemple 3: découverte de la fonction logarithmique à partir de la touche ln, précédant et motivant une étude théorique

→ **recherche individuelle ou collective**

Exemple 4 : résolution graphique ou numérique d'équations.

2 - activités visant à la **maîtrise** de l'outil :

→ **utilisation judicieuse :**

Exemples : connaissance des outils graphiques (trace, zoom, ...), et des procédés de mémorisation de fonctions. Utilisation des variables (y compris la variable mémorisant le dernier résultat).

La question de l'apprentissage de la programmation ne se pose plus vraiment, puisque la plupart des problèmes abordés dans le second cycle sont intégrés dans les calculatrices récentes. Par contre, celui d'une démarche cohérente dans l'ordonnancement des tâches et actions reste tout à fait d'actualité.

Cela suppose une bonne connaissance des modèles de machines utilisées, dont le choix échappe souvent à l'enseignant. C'est un vrai problème.

→ **contrôle des résultats :**

Quel crédit accorder à un résultat fourni par la calculatrice ? est-il numériquement correct (connaissons-nous les champs de validité garantis par le constructeur) ? est-il pertinent par rapport au problème posé ?

Les problèmes soulevés ci-dessus (et explorés plus loin au travers d'activités variées) sont posés par tous les outils informatiques que nous utilisons ; mais le fait que la calculatrice soit **en permanence** à la disposition de l'élève est un fait pédagogique original : faute de maîtriser les phases et modalités d'utilisation, nous devons, d'une part être à l'écoute pour "récupérer" en vue d'exploitation pédagogique des pratiques originales, voire exotiques, mais jamais dépourvues d'intérêt (voir par exemple un élève activer sa calculatrice pour résoudre un problème de construction géométrique peut surprendre). L'intégration prochaine du calcul formel aux calculatrices scientifiques posera les mêmes problèmes, de façon accrue (puisque le domaine mathématique concerné sera beaucoup plus vaste). Il est urgent de les résoudre, ou en tout cas d'avancer la réflexion.

Problèmes communs à l'utilisation des divers outils

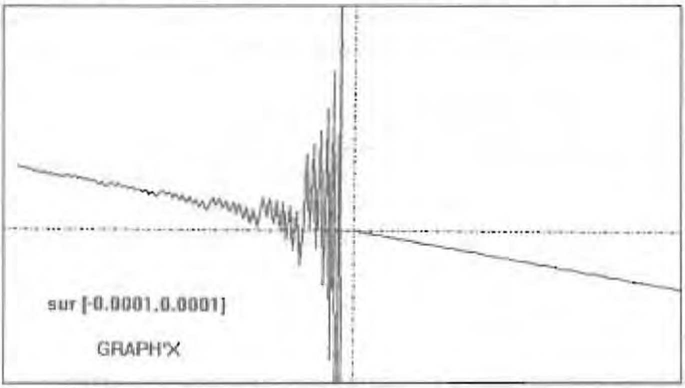
Validité et contrôle des résultats

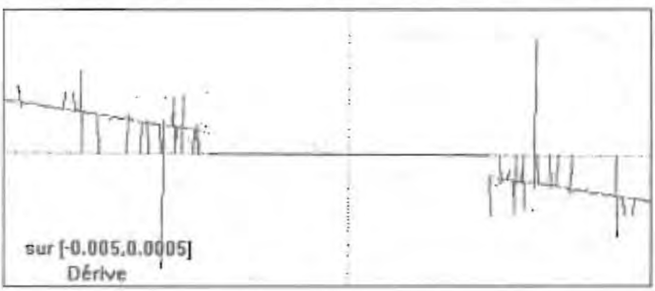
Exemple 5 : Lors de l'étude de la limite en 0 de $f : \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, Frédéric conteste le résultat théorique : sa calculatrice fournit 0 pour de petites valeurs de x, ce qu'il invite à vérifier en faisant le calcul pour $x = 10^{-20}$. L'exploitation aussitôt menée par la classe montre qu'après une "bonne" stabilisation autour de 1, on obtient 0 pour $f(x)$ lorsque $|x|$ est inférieur à 10^{-13}. Dans ce cas simple, l'enseignant jubile : belle occasion de sensibiliser aux limites du calcul approché (la calculatrice utilisée calcule sur 13 chiffres, et donc, $1 + 10^{-13}$ est pour elle identique à 1, $\ln(1 + 10^{-13})$ à 0, et par suite $f(10^{-13})$ à 0.

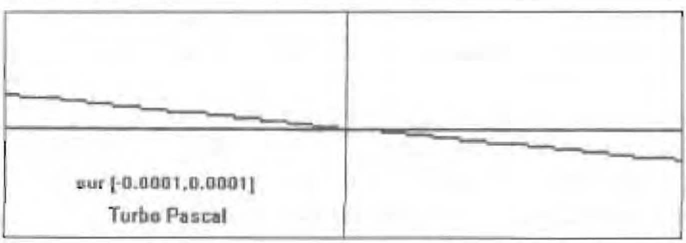
Mais au fond, tout le monde est inquiet : les élèves, parce qu'ils doutent de la toute puissance de leur machine, ce qui est salutaire, mais aussi l'enseignant qui pense que pour cette fois, il s'en est bien tiré, et que, ne connaissant pas les méthodes de calcul utilisées par le constructeur, ni leur champ de validité, il utilise et fait utiliser un outil qu'il maîtrise mal.

Il faut donc multiplier et développer les attitudes de contrôle. Une voie fructueuse est d'aborder le problème à travers des outils différents, et d'apprécier la cohérence des divers résultats obtenus.

Exemple 6 : il s'agit cette fois de la limite en 0 de $g : \mapsto \dfrac{\sin x - x}{x^2}$, obtenue en travaux dirigés après étude de l'encadrement de $\sin x$. Olivier contrôle en faisant tracer la courbe de g sur un petit intervalle de centre 0, et obtient une courbe bizarre. On décide de recourir aux trois traceurs de courbes accessibles sur l'ordinateur de la classe, et on obtient les tracés ci-dessous :







Exemple 8 : où l'outil informatique devient générateur de problème.

Application du théorème "des valeurs intermédiaires" : on s'intéresse à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$: étude de la fonction, existence et encadrement des solutions, ce qui est fait en exercice en classe.

Un élève suggère de "vérifier avec Dérive". Il saisit l'expression sur l'ordinateur de la classe, et demande la résolution.
Dérive fournit les trois racines suivantes :

$$2\ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi}{18}\right]\ ;\ -2\ \mathrm{COS}\left[\frac{\pi}{9}\right]\ ;\ 2\ \mathrm{COS}\left[\frac{2\pi}{9}\right]$$

Stupéfaction générale, suivie d'une phase spontanée de vérification sur les calculatrices (calcul approché des valeurs proposées par Dérive, confronté avec les encadrement obtenus).

Pour répondre aux questions posées, un des exercices du devoir hebdomadaire suivant met en place, sur cet exemple, la méthode trigonométrique de résolution des équations du troisième degré basée sur la relation cos 3α ...
Conclusion de certains élèves : Dérive avait raison. Ouf!

Exemple 9 : contrôle d'acquisition.

Les élèves de TC ont étudié diverses applications du plan dans lui-même (projections, isométries, similitudes diverses), et leur effet sur quelques configurations. Le but de l'activité est de mettre au point ces notions et d'en contrôler l'acquisition. Les élèves sont en demi-groupe, un élève par machine. Certains n'ont jamais utilisé un ordinateur, mais ceci ne posera pas problème. Après une courte phase collective, les indications sur les possibilités du logiciel seront fournies individuellement, à la demande (et souvent répandues ensuite de bouche à oreille).

A l'aide du logiciel Géoplan, plusieurs exercices ont été préparés par le professeur. Chacun d'entre eux montre un point M et son image M'. L'élève peut à son gré déplacer M, et observer le comportement de M'.

Plusieurs commandes ont été prévues ; sur l'appui d'une touche connue, on peut :

- garder trace des positions de M et M' ;
- faire apparaître une droite D dont il pourra visualiser l'image comme lieu de M' lorsque M décrit D ;
- faire apparaître dans le même but un cercle C.

La consigne est :

"Pour chaque exercice, vous devez :

1 - pronostiquer la nature et les caractéristiques de l'application en jeu, en notant les raisons de vos choix ;

2 - relever dans l'historique de construction la traduction analytique de l'application ;

3 - démontrer, pour la prochaine fois, à l'aide de cette traduction, que vos pronostics sont corrects".

Le choix de définir l'application de manière analytique, et non géométrique (ce que Géoplan permet aussi) est délibéré. C'est une façon de ne pas réduire l'activité à une simple observation. D'ailleurs, une des premières questions posées est : "on ne démontre pas ?". De plus, la traduction analytique (non consultée dans la phase 1) ne fournit pas une vraie indication pour les élèves qui ne sont pas familiarisés avec cette forme, mais plutôt avec la forme complexe. La phase 3, faite "sur papier" n'est pas forcément évidente, en particulier dans le cas d'antidéplacements (on devra composer avec la symétrie d'axe Ox et faire disparaître $\overline{z}$), et on poserait pour beaucoup un vrai problème en l'absence de pronostics préalables.

Les élèves disposent de tous les outils de Géoplan, et peuvent, en particulier :

- réaliser toutes sortes de constructions géométriques élémentaires ;
- attacher le point M au cercle C ou à la droite D ;
- demander à voir les lieux géométriques de points, droites,...
- montrer/cacher le repère ;
- demander l'estimation numérique de diverses grandeurs géométriques (distances, coordonnées, mesures d'angles,...)

Les élèves sont très actifs dans la phase 1, et réinvestissement les propriétés vue en cours, de façon parfois surprenante. Par exemple, ils ne se préoccupent pas de rechercher le(s) point(s) invariant(s), mais s'intéressent plutôt à estimer l'effet de la transformation sur les configurations simples (image d'une droite, d'un cercle, effet sur la distance et l'orientation), ce qui leur permet, par élimination, de cerner le problème, après quoi, ils déterminent les éléments caractéristiques par des procédés géométriques.

Exemple 9.1 : (cas d'une homothétie).

- des déplacements aléatoires du point M permettent de deviner l'image d'une horizontale ou d'une verticale (dans Géoplan, les déplacements sont commandés au clavier), ce qui, apparemment, suffit à se convaincre que l'image d'une droite est une droite. Le fait qu'il s'agisse d'une droite parallèle n'est , en général, pas relevé. On exclut déjà les transformations "fantaisistes" (dans la phase d'explication, les élèves ont vu une application qui transformait une droite en une courbe de type Lissajous) ;
- on cherche ensuite l'image du cercle C. On obtient un cercle, ce qui ne sur-

prend personne, mais surtout de rayon différent, ce qui élimine les isométries. On pense alors à une homothétie (pas à une similitude, probablement repoussée comme on repousse le pire). Reste à trouver les caractéristiques;

- Une élève a l'idée de tracer la droite (MM') et de demander son lieu géométrique. On voit très nettement que toutes les droites (MM') passent par le même point. La conviction est emportée : c'est une homothétie. La visualisation du repère permet de pronostiquer les coordonnées du centre (qui sont entières dans cet exemple). Le rapport (2/3) pose problème.
- On définit le centre I pas ces coordonnées estimées, et on demande l'évaluation de la distance IM' dans le repère (I,M). Géoplan affiche 2/3, et on observe que ce rapport demeure constant quand M se déplace. Fin de la phase 1.

Exemple 9.2 (cas d'une symétrie glissée) :

- On s'assure de la conservation des distances en cherchant l'image du cercle C.
- En observant le sens de rotation de M', on exclut la conservation de l'orientation. On pronostique donc un antidéplacement sans point invariant, qu'on se contentera de décrire comme composée d'une réflexion et d'une rotation).

Exemple 9.3 : (similitude directe).

- L'effet sur le cercle C exclut une isométrie.
- L'observation du lieu de (MM') (ou, pour certains, de l'image d'une droite) exclut une homothétie. On pense à une similitude directe (d'autant que la construction de l'image de C a permis de prévoir que l'orientation est conservée).
- Pour déterminer le rapport, certains ont procédé à une estimation en observant les rayons de C et C', d'autres ont demandé au logiciel les mesures des rayons (facile pour C, plus délicat pour C', non reconnu par le logiciel comme cercle). La simplicité du résultat ($k = 2$) a permis de conclure assez rapidement. L'angle ($\pi/2$) est estimé très facilement sur l'image d'une horizontale. Reste à localiser le centre.
- Se référant aux constructions vues en cours, les élèves les plus avancés construisent, en utilisant les barycentres, l'ensemble Γ des points P tels que $\dfrac{PM'}{PM} = 2$. Ils demandent ensuite le lieu géométrique des cercles Γ lorsque M varie, constatent que tous ces cercles passent par un même point dont ils estiment les coordonnées, nomment ce point I et concluent l'étude

en demandant l'affichage de $\frac{IM}{IM'}$, et de l'angle $\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right)$.

Cette série d'activités permet de voir la richesse des outils informatiques dont nous disposons. L'implication des élèves, et l'utilisation judicieuse des acquisitions du cours, ont fait de ce bref T.D. (1 h 30, pendant laquelle tous les élèves ont étudié au moins 5 exercices, certains allant jusqu'à 8) une séquence très riche où de nombreuses questions ont été posées (le professeur n'y répondant pas), de nouveaux problèmes soulevés (par exemple, une transformations du plan transformant un cercle du plan en un cercle de même rayon est-elle forcément une isométrie ?... et si elle transforme tous les cercles du plan en cercles de même rayon ?).

La notion de transformation y a été abordée de manière dynamique (difficile à faire sans l'outil informatique), l'aspect "effet sur les objets et propriétés géométriques" l'emportant naturellement sur l'aspect "transformation ponctuelle", ce qui va tout à fait dans le sens des programmes actuels (les transformations comme outils géométriques).

On regrette que les élèves ne disposent pas en permanence de tels outils de recherche et de conjecture.

En conclusion

Oui les outils informatiques nous posent des problèmes :
Comment en contrôler l'utilisation ? Comment les intégrer dans notre démarche pédagogique ? Comment garder son statut à la démonstration ? Comment gérer leur impact sur les activités "calculatoires" ?

Mais ils nous offrent aussi de réelles pistes d'exploitation pédagogique, permettant dans certains cas de donner du sens aux notions en jeu, de se convaincre de la grande cohérence des mathématiques et d'avoir une attitude active et constructive.

A nous de les utiliser efficacement.