Etudes

Mettre toutes les routes en sens unique.
Le théorème de Robbins sur la forte-connexité

Peter GREENBERG-Martin LOEBL
Institut Fourier
Université de Grenoble I

INTRODUCTION

«La circulation est affreuse». On entend cette phrase un peu partout, surtout aux heures de pointe. Une idée pour améliorer la situation : donner à toutes les rues et avenues de la ville un sens unique. Dès qu'une ville prend cette décision, c'est aux ingénieurs de se demander : «Voici le plan de la ville. Peut-on choisir un sens pour chaque rue de telle sorte qu'on pourra toujours conduire d'un point à un autre ?»

Un peu de réflexion les amène à une condition nécessaire pour une réponse positive :

(!) Il faut qu'il n'y ait aucune rue dont l'omission coupe la ville en deux parties, l'une séparée de l'autre. Car, si une telle rue existe, en lui donnant un sens on ne pourrait aller que d'une des parties à l'autre, sans possibilité de rentrer.

Le but du présent article est l'exposition d'un théorème classique de Robbins [R] : La condition (!) est suffisante ! L'argument de la preuve est un bijou diabolique, qui contient d'ailleurs la façon de trouver les «sens uniques» désirés pour chaque rue…

La démonstration est dans le cadre de la théorie des graphes, dont on rappelle les points essentiels.

Les auteurs ont profité de l'hospitalité des universités de Bielefeld (Allemagne) et Charles (République Tchèque). Ils remercient B.Malgrange pour son intérêt.

Le théorème de Robbins

D'abord, quelques rappels de la théorie des graphes : on note par $G = (A,S)$ un graphe, A et S étant les ensembles des *arêtes* et *sommets* de G. Pour simplifier l'exposé, on demande que les sommets au bord d'une arête soient distincts et qu'ils déterminent l'arête qu'ils bordent. Une *orientation* d'un graphe, $\theta = \{\vec{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ est un choix d'une orientation pour chaque arête, c'est-à-dire la désignation d'une *source* et d'un *but* de l'arête. On note par $-\vec{\alpha}$ «l'autre» orientation de α.

1 . Définition. - Soit θ une orientation d'un graphe $G = (A,S)$. Alors (G,θ) est fortement connexe si, pour chaque $x,y \in S$, il existe un chemin dirigé de source x et de but y, ainsi qu'un chemin dirigé de source y et de but x.

(Un *chemin dirigé* de source x et de but y est une suite $\alpha_1 , \ldots , \alpha_n \in A$ telle que la source de $\vec{\alpha_1}$ est x, le but de $\vec{\alpha_n}$ est y, et la source de $\vec{\alpha}_{i+1}$ est le but de $\vec{\alpha_i}$, $i \geq 1$).

Étant donné un graphe $G = (A,S)$, existe-t-il une orientation θ telle que (G,θ) soit fortement connexe ? Evidemment, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

(Ci) G est connexe.

Mais il faut aussi que :

(Cii) Pour chaque $\alpha \in A, G - (\text{int } \alpha)$ est connexe.

(int α est α moins les sommets au bord). Parce que sinon, si $\vec{\alpha}$ est une orientation de α, il n'y aurait pas de chemin dirigé du but de $\vec{\alpha}$ à sa source.

2. Théorème (Robbins). - *$G = (A,S)$ possède une orientation fortement connexe si et seulement si (Ci) et Cii) sont vérifiées.*

Pour la démonstration, on remarque que (Cii) est équivalent à :

(Cii') Chaque arête $\alpha \in A$ appartient à un cycle.

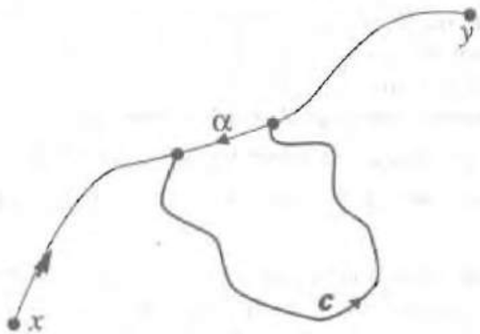
On commence par un lemme.

3. Lemme . - *(G,θ) est fortement connexe si et seulement si*

(i) *G et connexe.*
(ii) *Chaque arête $\alpha \in A$ appartient à un cycle orienté.*

Démonstration. - Le fait que la forte connexité de (G, θ) implique (i) et (ii) n'est pas difficile et on le laisse au lecteur.

Supposons donc que (G,θ) satisfait (i) et (ii). Soient $x,y \in S$; il faut trouver un chemin dirigé de source x et but y. On sait par (i) que G est connexe.



Soit γ un chemin (voir la figure) entre x et y, et soit $\alpha \in A$ la première arête rencontrée en parcourant γ de x à y, qui est orienté «dans le mauvais sens» (c'est-à-dire vers x). Alors, α appartient à un cycle orienté c,par (ii). En remplaçant γ par $(\gamma - \alpha) \cup (c - \alpha)$, on s'est ainsi rapproché du point y. Après un nombre fini de substitutions de ce type (borné par le cardinal $A!$), on a construit un chemin dirigé de x à y. ■

Le théorème I est une conséquence d'un résultat plus fort. On verra que, à partir d'un graphe $G = (A,S)$ qui satisfait (Ci) et (Cii), on peut prendre les arêtes dans n'importe quel ordre, et les munir d'une orientation qui sera, à la fin du processus, fortement connexe.

4. Définition. - Une *orientation partielle* θ_I est une orientation $\{\vec{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ des arêtes d'un sous ensemble I de A. Si θ_I est une orientation partielle d'un graphe G, un *cycle non contradictoire* (CNC) est un cycle c de G tel qu'on puisse étendre l'orientation θ_I en une orientation θ pour laquelle c est orienté.

5. Théorème. - *Soit $G = (A,S)$ un graphe, et soit θ_I, I, $I \subset A$* une orientation partielle. Alors il existe une extension de θ_I *en une orientation θ fortement connexe si et seulement si*

(Pi) *G est connexe*
(Pii) *chaque arête $\alpha \in A$ appartient à un CNC.*

Remarque: En posant $I = \varnothing$, le théorème 5 implique le théorème 2.

Démonstration : Par récurrence sur le cardinal de $A - I$. Si $A = I$, on conclut par le lemme 3. Supposons 5 vrai si card$(A - I) \leq k$. Remarquez qu'il suffit de démontrer que (Pi) et (Pii) impliquent l'existence d'une extension fortement connexe $\theta \geq \theta_I$; l'argument dans l'autre sens, d'après le lemme 3, est banal.

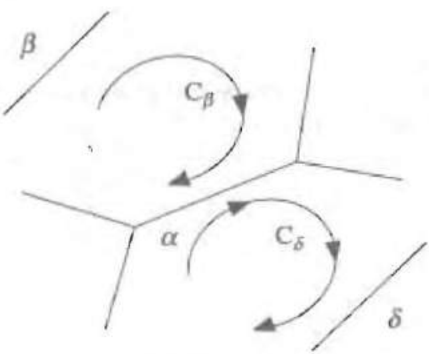
Soit $G = (A,S)$ un graphe, avec une orientation partielle θ_I telle que card$(A - I) = k + 1$, et telle que (Pi) et (Pii) sont satisfaites. Choisissons une arête $\alpha \in A - I$. Si on peut lui donner une orientation $\vec{\alpha}$ (ou $-\vec{\alpha}$) telle que $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$ satisfait (Pi) et (Pii), on conclut par récurrence.

Supposons le contraire :

(*) ni $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$ ni $\theta_I \cup \{-\vec{\alpha}\}$ ne satisfait (Pii) ((Pi) est évidemment satisfait), et cherchons une contradiction.

Alors (voir figure), comme $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$ ne satisfait pas (Pii), il existe une arête β qui n'appartient à aucun CNC pour $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$. Mais par hypothèse, β appartient à un CNC pour θ_I.

(Q_β) Chaque CNC C_β (pour θ_I) qui contient β contient α et induit l'orientation $-\vec{\alpha}$ sur α.



Le même argument, appliqué à $\theta_I \cup \{-\vec{\alpha}\}$, montre qu'il existe une arête δ telle que

(Q_d) Chaque CNC (pour θ_I) qui contient δ contient α et induit l'orientation $\vec{\alpha}$ sur α..

Par récurrence, de tels CNC existent. Regardons

$C = (C_\beta - \{\alpha\}) \cup (C_\delta - \{\alpha\})$.

Alors, C est un CNC pour θ_I, et C contient à la fois β et δ, ce qui contredit (Q_β) et (Q_d) , et donc (*) ; ceci établit le théorème.■

Un exercice :

Alors, la preuve, vous l'avez comprise ? On applique le même raisonnement pour l'exercice suivant, qui sert de base «algébrique» à une généralisation [GL].

6. DÉFINITION. - Soit $\mathbf{Z}^n$ le groupe abélien libre à n générateurs. Une *base de Hilbert* pour $\mathbf{Z}^n$ l est un sous-ensemble $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ de $\mathbf{Z}^n$ tel que,

pour chaque $v \in \mathbf{Z}^n$ l il existe $n_j^v \in \mathbf{N}$ tel que $v = \sum_{j=1}^{k} n_j^v b_j$.

Par exemple, si B' est une base de $\mathbf{Z}^n$, alors $B' \cup (-B')$ ainsi que $B' \cup \left\{- \sum_{b_i \in B'} b_i\right\}$ sont les bases de Hilbert de $\mathbf{Z}^n$.

Exercice. - Soit B un sous ensemble de $\mathbf{Z}^n$. Il existe $e_b \in \{1 , -1\}$ pour chaque $b \in B$, tel que $eB = \{e_b b; b \in B\}$ est une base de Hilbert de $\mathbf{Z}^n$ si et seulement si

(Bi) Les éléments de $B \cup (-B')$ engendrent $\mathbf{Z}^n$ comme groupe.

(Bii) Pour chaque $\beta \in B$ il existe $m_b^\beta \in \mathbf{Z}$, $m_b^b \neq 0$, tel que $\sum_{b \in B} m_b^\beta b = 0$.

Au travail !

Bibliographie

[R] H.E. ROBBINS. - *A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control*, Amer. Math. Monthly 46 (1939), 281-283.

[GL] P.GREENBERG, M.LOEBL. - *Strong connectivity for polyhedral complexes*, à paraître.