Bulletin de l'APMEP n°397 - Février 1995

Journées Nationales
Brest-Loctudy - 1994

Débat.
Intervention de E. BARBIN, M.CHOMETTE et J.HOUDEBINE.
Contribution de R.DUVAL.

La démonstration aura-t-elle encore une place dans l'enseignement des mathématiques ?

Evelyne BARBIN
IREM Paris VII - IUFM de Créteil

Lorsqu'Yvon Allain m'a fait part de la tenue de cette table ronde, celle-ci était ainsi présentée par Michel Leberre : «Après la période des Maths Modernes où au Lycée tout devait être démontré, nous sommes arrivés à la situation actuelle : de nombreux théorèmes sont admis sans démonstration, tout sujet d'examen nécessitant une réelle recherche de démonstration est banni. De plus à l'échelle mondiale, dans beaucoup de pays, enseignement de masse et initiation à la démonstration sont considérés comme incompatibles, et il n'est pas exagéré de qualifier la position, sur ce point, de quelques nations, dont la France, d'exception culturelle. Combien de temps cette situation perdurera-t-elle ?» La démonstration semble donc condamnée, aussi bien par les programmes que par les instances internationales. Or, affirme le texte de la présentation officielle de la table ronde, la démonstration est, pour une large part, «notre raison d'être» d'enseignant. Ainsi, la démonstration est condamnée et elle est notre raison d'être.

Bref, l'enseignant de mathématiques vit une situation tragique, l'enseignant de mathématiques est un héros tragique.

Consultons le dictionnaire du Petit Robert. Tragédie : «une situation où l'homme prend douloureusement connaissance d'un destin ou d'une fatalité qui pèse sur sa vie, sa nature ou sa condition même». Tragédie : «une situation où les événements se traduisent par des conflits intérieurs». Je vous propose de nous interroger d'abord sur la "fatalité" qui pèse sur notre héros, puis sur les "conflits intérieurs" qui l'agitent, avant d'examiner sa "condition" d'enseignant aux prises avec l'apprentissage de la démonstration.

Le ressort de beaucoup de romans tragiques est le suivant : dans la première partie du roman, nous assistons au bonheur du héros, et puis, soudainement, des événements viennent contrarier ce bonheur, et le héros voit avec fatalité sa vie dégringoler. Dans la seconde partie du roman, le héros regrette avec nostalgie l'époque faste de son passé. A la lecture de la présentation de la table ronde envoyée par les collègues de la Régionale de l'APMEP de Brest, j'ai perçu une certaine nostalgie de l'époque des "mathématiques modernes", qui me semble refléter assez justement la manière dont nombre de collègues ressentent la situation actuelle.

La nostalgie de l'époque des "mathématiques modernes"

Les collègues expliquent qu'à cette époque faste, ils donnaient un enseignement rigoureux. Il est vrai que l'enseignement des mathématiques voulait présenter les structures mathématiques qui avaient permis aux mathématiciens de la première moitié du siècle de reconstruire les mathématiques sur des fondements rigoureux. La rigueur était l'essence des mathématiques modernes, elle devait être aussi le propre - dans les deux sens du terme - de leur enseignement. Cet enseignement donnait le spectacle de la dernière vision des mathématiques, en rejetant les débris de leur construction historique, qui encombraient l'enseignement et qui étaient censés gêner la compréhension des élèves.

A cette époque faste, les enseignants avaient devant eux des élèves sélectionnés et prêts à recevoir un enseignement, justifié comme celui d'un langage universel et devenu celui d'une discipline de sélection "par excellence".

Années 1980, de nouveaux programmes et de nouveaux élèves.

De nouveaux programmes qui introduisent, en particulier, un enseignement par activités au collège et par résolution de problèmes au lycée. De nouvelles exigences ministérielles qui prévoient que 80% des élèves arrivent au niveau baccalauréat, et la vague des "nouveaux élèves", qu'avaient su maîtriser les collèges, déferle sur les lycées, puis sur les universités. Notre héros, s'interrogeant sur son "destin", relie les nouveaux programmes aux nouveaux élèves. Le soupçon s'installe chez lui : les nouveaux programmes sont une adaptation aux nouveaux élèves.

Ce soupçon signifie, à mon avis, que ce que l'on appelait dans les années 1980 «l'esprit des nouveaux programmes» n'est pas "passé". La réforme des "mathématiques modernes" avait suscité une véritable réflexion sur les mathématiques, qui n'a pas été renouvelée à l'occasion des nouveaux programmes. Si certains enseignants résistent à «l'esprit des nouveaux programmes», c'est sans doute pour une grande part parce que cet esprit n'a jamais été explicité dans toute sa dimension épistémologique. Il aurait fallu une formation épistémologique sur les concepts de l'analyse pour que la nouvelle façon de les concevoir soit comprise et pratiquée par les enseignants. Il aurait fallu une formation épistémologique et didactique pour que les enseignants puissent construire et gérer un enseignement par activités, qui ne se réduise pas à des activités introductives, qui restent trop souvent des alibis, et à des activités parcellaires, où les savoirs émiettés perdent toute signification.

La nostalgie est profonde, et, malheureusement ou heureusement, notre héros est lucide : l'époque des "mathématiques modernes" est révolue.

Une époque révolue

L'époque bourbakiste était consacrée surtout à la structuration des mathématiques, et aujourd'hui les mathématiciens travaillent beaucoup à étudier et à comprendre des phénomènes, ce qui est aussi le but de leur profession. Si nous voulons avoir une idée des mathématiques qui se pratiquent aujourd'hui chez les professionnels, il suffit de se reporter aux conférences sur «les mathématiques à la pointe» que nous avons entendues lors des Journées APMEP 1994. Alain HILLON a parlé des algorithmes de traitement automatique de l'information qui permettent de reconnaître les images de satellite, des théories mathématiques qui servent à modéliser les différents types d'incertitude. Alain MENESGUEN a montré comment divers savoirs mathématiques servent d'outils pour comprendre les processus dynamiques de la biologie ou de l'écologie marine.

Après avoir entendu ces conférences, notre héros pose à la table-ronde la question suivante :«Le professeur de mathématiques ne devient-il pas un enseignant de techniques mises à la disposition des autres disciplines ?». Cette question est bien la marque d'un "conflit intérieur", car notre héros regrette l'époque des "mathématiques modernes".

Cette question en recouvre deux autres : les mathématiques sont-elles de simples modèles ou de simples outils techniques ? et devons-nous enseigner cette conception des mathématiques ? Pour aborder ces deux dernières questions, je commencerai par les reformuler.

D'abord, les mathématiques ne sont jamais de simples modèles ou de simples outils qui s'adaptent ou qui s'appliquent au réel. D'une part, comprendre des phénomènes du réel demande de construire une réalité qui sera mathématisable. La réalité n'est pas donnée et mathématique, elle est construite et mathématisée. D'autre part, les outils mathématiques utilisés pour comprendre cette réalité sont eux-mêmes transformés à cet effet. La construction de nouvelles connaissances par les mathématiques va de pair avec la construction de nouvelles mathématiques.

Je formulerai donc ainsi une nouvelle question : le professeur de mathématiques doit-il enseigner les mathématiques comme instrument de compréhension des phénomènes de la réalité ? Et je répondrai oui. Mais, attention, il ne s'agit pas du tout ici de mathématiques concrètes, car la réalité construite est abstraite, tout comme les mathématiques sont abstraites.

Ensuite, je crois que la seconde question en contient implicitement une autre : faut-il enseigner les mathématiques à la pointe ? Tout comme l'enseignant moderne a enseigné les mathématiques bourbakistes à leur époque, l'enseignant post-moderne ne doit-il pas enseigner les algorithmes de traitement de l'information et les systèmes dynamiques ? Ceci supposerait, comme à l'époque des mathématiques modernes, de reconstruire les programmes de mathématiques depuis la maternelle à cet effet, car les programmes sont toujours dressés vers des connaissances terminales. Cependant, ces connaissances ne seront atteintes que par une minorité d'élèves, et peut-être à une époque où d'autres mathématiques seront de mise, dynamisme de la recherche oblige. Enseigner les mathématiques à la pointe, c'est toujours restreindre les mathématiques à une seule signification, celle de leur temps. Or les mathématiques n'ont pas une seule signification, elles ont l'épaisseur de leur histoire. Avant de servir d'outils à la biologie marine, la géométrie a été un instrument de compréhension de phénomènes d'une réalité moins complexe, réduite à ses dimensions de longueur, de largeur et de profondeur.

L'enseignement des mathématiques doit prendre en compte les différentes réalités qu'elles ont permis d'étudier dans l'histoire.

Je formulerai donc ainsi une autre question : le professeur de mathématiques doit-il enseigner les mathématiques comme un processus historique et un objet culturel ? Et je répondrai oui. Mais, il ne s'agit pas ici de calquer l'enseignement sur l'histoire, mais de saisir dans l'histoire les problèmes qui donnent signification aux savoirs. Il ne s'agit pas non plus de renoncer à enseigner les mathématiques contemporaines. Comme l'écrit Rudolf BKOUCHE : *«un des problèmes de l'enseignement, à chaque époque, est bien celui d'amener ceux que l'on enseigne au plus proche du savoir contempo-*

rain, mais l'accès au savoir contemporain ne se réduit pas à la seule présentation de ce savoir, la réforme des 'mathématiques modernes' l'a bien montré. L'accès au savoir contemporain exige des cheminements, cheminements difficiles à expliciter, mais cheminements dont on ne peut faire l'économie».

L'enseignement doit s'adresser à tous les élèves, comme partie de la connaissance humaine, et ceci m'amène à l'autre aspect de l'époque révolue des "mathématiques modernes" : l'exigence de mener 80% des élèves au niveau baccalauréat. Cette exigence n'est pas seulement une mode ministérielle, elle renvoie à des évolutions de fond de notre société qui, on l'a constaté dans les années 1980-90, transcendent le clivage entre gauche et droite : transformations techniques, évolution des formes de travail, redéfinition du niveau de formation de base des jeunes, évolution de la demande sociale face aux menaces croissantes de chômage, etc.. L'enseignement de masse est inscrit dans l'histoire, mais il n'est pas nécessairement synonyme d'un enseignement dévalué, il doit être autre.

J'en viendrai maintenant aux questions sur l'enseignement de la démonstration. Ce préambule était nécessaire, car, comme l'indiquait bien la présentation de cette table ronde par nos collègues de la Régionale de l'APMEP, nos questions d'aujourd'hui sur la démonstration s'inscrivent dans la nostalgie d'une époque. Ces questions s'enracinent aussi dans l'idéologie des "mathématiques modernes" de cette époque, une idéologie que nous ne parvenons pas à dépasser.

La démonstration est-elle la raison d'être des mathématiques, et donc des professeurs de mathématiques ?

La conception des mathématiques comme synonymes de la démonstration est une conception historiquement datée. Elle fut un héritage de la métaphysique d'Aristote et des traités de l'Antiquité. Elle fut de nouveau mise en avant au XIX^e siècle, et surtout au début de notre siècle avec la pensée formaliste et structuraliste des mathématiques. Nous allons brièvement évoquer une période intermédiaire, celle des grandes innovations mathématiques que sont la géométrie analytique et le calcul différentiel, une période où les mathématiques sont conçues comme un instrument de compréhension.

En effet, les conceptions orthodoxes de la géométrie grecque sont critiquées et dépassées aux XVII^e et XVIII^e siècles. Au XVII^e siècle, les scientifiques s'intéressent aux phénomènes techniques, et ils vont construire une réalité mécanique et quantitative du monde. Les mathématiques sont pour eux un moyen de comprendre cette réalité et de maîtriser la nature par des techniques bénéfiques à l'humanité. Ils construisent ainsi des mathématiques qui permettent d'inventer et de résoudre des problèmes. Comme l'écrivent

Pascal ou Leibniz, c'est bien peu de choses que de démontrer ce que quelqu'un d'autre a déjà inventé. Les scientifiques sont obnubilés, non par l'idée de démonstration, mais par celle de méthode, conçue comme un art d'inventer. Ils vont oser, en opposition avec les conceptions orthodoxes de la géométrie grecque, travailler avec le mouvement et avec l'infini. Au XVIII[e] siècle, "siècle héroïque" des mathématiques parce que le plus fécond en résultats mathématiques, Wronski ironise sur ceux qui préfèrent la forme aux détriment de la nouveauté, Clairaut écrit un ouvrage élémentaire de géométrie ou les démonstrations en forme sont bannies, Euler jongle avec l'infini d'une façon qui serait condamnée sous le stylo d'un de nos élèves de lycée.

La Période des XVII[e]-XVIII[e] siècles est une période où la rigueur formelle n'est pas de mise, mais où la vérité des nouveaux résultats est légitimée par son adéquation à la réalité de la nouvelle physique. Elle fut suivie d'une période, où, au contraire, l'effort de rigueur devient important, et cet effort de rigueur fut lui aussi porteur de nouvelles mathématiques.

Bref, à la question que nous examinons, je répondrai non. La démonstration n'est pas la raison d'être des mathématiques, c'est un moment des mathématiques et elle n'est pas le seul moment. La seule signification des objets mathématiques n'est pas d'être des pièces dans le puzzle de la démonstration, les objets mathématiques sont construits dans des situations qu'ils permettent de comprendre et qui leur donnent signification. La seule signification de la démonstration n'est pas d'apporter des certitudes sur des objets. Déjà là elle doit expliquer des situations où les objets sont construits. Je ne dis pas que l'apprentissage de la démonstration doit être abandonné, je dis que polariser l'enseignement des mathématiques sur la démonstration au détriment de la construction des objets mathématiques est épistémologiquement intenable et pédagogiquement désastreux. A faire de la démonstration notre raison d'être, nous perdons notre âme de mathématicien et d'enseignant, car nous courons le risque de transformer les mathématiques en une rhétorique sans âme, parce que sans objet.

Nous devons ici nous demander de quelle démonstration nous parlons quand nous parlons de "la" démonstration.

"La" démonstration : quelle démonstration ?

En examinant aussi bien les formes locales de la démonstration que son rôle dans un cadre global, nous nous apercevons assez vite qu'il n'y a pas une démonstration, mais des démonstrations. Ceci en se rapportant aussi bien à l'histoire des mathématiques, aux programmes du secondaire ou aux discussions entre collègues lors des corrections collectives de copies.

La démonstration de la géométrie grecque est conçue dans un système axiomatico-déductif, elle procède par synthèse, c'est-à-dire qu'elle va du connu à l'inconnu. Les textes grecs donnent les définitions des objets mais n'exposent pas leur élaboration, ils établissent des démonstrations propres à convaincre mais ne portent pas trace des procédés de recherche. Tout se passe comme si l'enseignement au collège avait hérité de ces textes.

Nous faisons comme si les objets idéaux de la géométrie étaient déjà dans la tête de nos élèves. Nous attendons des élèves des textes en forme où les hypothèses mènent déductivement aux conclusions, sans distinguer la production de ces textes de la procédure de recherche proprement dite. Nous essayons de les persuader de la valeur convaincante des démonstrations : le paradoxe de cette dernière phrase indique bien notre difficulté à rendre pertinentes ces démonstrations.

Il est vrai cependant que le système axiomatico-déductif a été abandonné, au profit d'îlots déductifs. Mais nous concevons des ilôts qui sont seulement déductifs. Nous oublions que la démonstration n'est pas seulement donnée pour apporter des certitudes, mais qu'elle est là pour expliquer localement des situations et pour construire globalement une intelligibilité. En restreignant la démonstration à son seul aspect technique de preuve, nous concevons des ilôts déductifs qui correspondent à des champs de solutions, et non-pas à des champs de situations-problèmes. Autrement dit, les résultats non démontrés sur lesquels peuvent être déduits les autres n'ont pas de signification autre que celle-là : "on a le droit" de les utiliser. D'où un certain malaise chez les enseignants, qui estiment la démarche douteuse, et chez les élèves, qui voient là la manifestation d'un arbitraire incompréhensible. Si les résultats non démontrés prenaient sens dans des situations problèmes, les élèves n'hésiteraient pas à les faire intervenir pour résoudre des problèmes relevant du même champ de situations.

Il est difficile de soutenir que les démonstrations géométriques du collège sont les seules démonstrations, car que faudrait-il faire alors des démonstrations de la géométrie analytique et de l'analyse ? Celles-ci procèdent par analyse (d'où les noms de géométrie analytique et analyse), c'est-à-dire qu'elles vont de l'inconnu au connu. Elles sont l'aboutissement des méthodes d'invention du XVII[e] siècle. Descartes explique que l'on peut résoudre tous les problèmes de géométrie (y compris les problèmes sur les courbes) en les ramenant à des résolutions d'équations algébriques. Il faut procéder par l'analyse, c'est-à-dire supposer le problème déjà résolu, puis donner des noms aux connus et aux inconnus, et traduire le problème à l'aide d'équations. Il résout ainsi un problème de lieu, dont la solution était envisagée jusque-là de façon synthétique. Ainsi, l'algèbre devient une méthode de résolution, dont Descartes élargit la portée, puisqu'elle était déjà un outil de résolution analytique de problèmes numériques. L'intrusion de l'algèbre (pourquoi des lettres et des équations pour traiter des courbes géométriques ?) est le prix à payer pour obtenir des algorithmes de résolution rapides et efficaces.

Les algorithmes du calcul différentiel ne manipulent plus seulement du fini, mais de l'infini. La place manque ici pour retracer les états de la conquête de l'infini, mais disons que les différentes étapes ne seront pas franchies dans un seul souci de rigueur formel, mais parce que de nouveaux problèmes ont exigé de modifier, de reformuler, de préciser les concepts ou d'en créer de nouveaux. Ainsi, le concept de fonction continue ne devient pertinent qu'au début du XIX^e siècle, et les propriétés de ces fonctions ne seront formulées que lorsque suffisamment de fonctions discontinues auront mis à l'épreuve l'intuition du continu acquise à la fréquentation de fonctions, issues de problèmes physico-mathématiques, qui étaient toutes continues.

Ces remarques peuvent nous conduire à envisager un aménagement de l'idée de démonstration, à imaginer un apprentissage de la démonstration par étapes.

Peut-on concevoir un apprentissage de la démonstration par étapes ?

Un apprentissage de la démonstration par étapes ne signifie pas qu'il faille poser des problèmes très simples, puis moins simples, etc., ou comme disait une professeur stagiaire de mon IUFM, qu'il faille proposer des démonstrations au collège d'une étape, puis de deux étapes, etc.. Car, une démonstration ne peut être intéressante et signifiante que si elle demande une élaboration suffisamment consistante. Il ne s'agit pas non plus d'inventer des gadgets pédagogiques, comme les démonstrations à trous, qui font certes "réussir" les élèves, mais qui ne leur feront réussir que des démonstrations à trous.

Un apprentissage de la démonstration par étapes suppose au moins deux mises en relation. D'une part, il faudrait mettre en relation cet apprentissage avec la construction progressive des objets mathématiques. Car, l'histoire des mathématiques le montre, la construction d'une rationalité mathématique et la construction des objets mathématiques s'élaborent en même temps. D'autre part, il faudrait mettre en relation la complexité des problèmes avec la complexité des procédures mises en oeuvre dans les démonstrations. N'y a-t-il pas souvent dans notre enseignement un décalage trop important entre la simplicité des problèmes que nous proposons et la force d'outils qui ont été inventés pour résoudre des problèmes autrement complexes ? Lorsque l'enseignant estime qu'il ne fait plus de démonstration aujourd'hui, n'est-ce pas aussi parce que les théories enseignées ont une portée sans commune mesure avec la simplicité des problèmes abordés dans l'enseignement ?

Un apprentissage de la démonstration par étapes ne doit pas se rapporter pas à une conception universelle, parce que technique, de la démonstration, mais à des conceptions relatives à l'intelligibilité des objets construits et des situations proposées.

Concernant l'enseignement de la géométrie en collège, il faudrait rechercher des situations spatiales qui permettent en même temps la construction d'objets géométriques idéaux et l'élaboration de raisonnements déductifs. Il faudrait aussi s'interroger sur la pertinence d'enseigner très tôt des objets très élaborés, comme les transformations et les vecteurs. Comme nous le disions plus haut, une démonstration ne peut être intéressante et signifiante que si elle demande une élaboration suffisamment consistante. Des outils peu puissants, comme les cas d'égalité des triangles, sont peut-être plus pertinents pour apprendre aux débutants à chercher, à combiner et à élaborer une démonstration. La construction des objets géométriques idéaux ne va pas de soi, et il faudrait sans doute rechercher d'autres situations d'apprentissage, par exemple les problèmes arithmétiques, qui ne sont plus au programme.

Concernant l'enseignement de l'analyse au lycée, il faudrait élaborer des situations qui permettent en même temps la construction des concepts de l'analyse et l'élaboration de raisonnements analytiques. Des situations cinématiques peuvent être propres à cet effet. Il ne s'agit pas de «se mettre à la disposition des autres disciplines», mais de revenir sur la signification épistémique des mathématiques comme instrument de compréhension de la réalité. La réalité à laquelle correspond l'analyse comprend d'autres dimensions que celles des formes géométriques, comme le temps. L'infini peut être saisi à partir de l'idée de temps et de mouvement, sans doute plus facilement qu'avec des ε et des η. Nous ne devons pas renoncer à enseigner ces derniers, mais ils participent d'une étape ultérieure, quand la difficulté des problèmes les nécessite.

Ces considérations devraient être précisées et travaillées, mais l'idée d'étapes me semble cependant aujourd'hui nécessaire. Nécessaire à un enseignement de masse de qualité, car qualité et quantité ne s'opposent pas forcément, à partir du moment où l'enseignement ne vise pas des savoirs utiles pour plus tard (vous comprendrez plus tard pourquoi on fait comme ça en mathématiques), mais des savoirs intéressants pour tout de suite (les mathématiques ça m'intéresse, moi, élève de n'importe quelle classe). Les textes que nous demandons à nos élèves ne doivent pas être des stéréotypes, mais des traces de leurs propres procédures de raisonnement. Nous ne devons pas exiger tout de suite de nos élèves des démonstrations en forme, mais nous devons aménager des cheminements vers ces démonstrations.

En conclusion, je dirai que la situation n'est pas tragique mais qu'elle est grave.

La situation est grave parce que la démonstration vue comme une rhétorique est condamnée, car, contrairement aux instances Européennes qui rejettent les fromages au lait cru, nos élèves aiment justement ce qui a de la saveur. Et si je peux me permettre encore une fois de comparer les démonstrations à des fromages, je dirai, pour illustrer l'idée de démonstration par étapes, que les démonstrations bien pasteurisées viendront à leur heure pour nos élèves, quand ils auront compris les vertus de la pasteurisation.

Intervention de

Marie CHOMETTE
Lycée Le Dantec - Lannion
IUFM de Rennes, Site de Brest

Cette question me semble se diviser en plusieurs autres plus précises :

* A quel moment du cursus scolaire ?
* A quels élèves ? Non seulement à quel âge , mais aussi à quelles "catégories" ? On voit bien que si on la réserve aux terminales scientifiques, par exemple, ce n'est pas la même chose que si tous les élèves sont concernés.
* La question centrale étant finalement : **Pourquoi** accorde(rai)t-on une place à la démonstration dans l'enseignement des maths ?

Il me semble intéressant d'examiner un peu la situation actuelle sur chacun de ces points avant de tenter d'extrapoler.

Actuellement l'apprentissage de la démonstration est fixé institutionnellement en 4ème/3ème, donc touche la majorité des enfants et se poursuit au lycée, en principe du moins. Sur ce point déjà, la réalité est sans doute multiple : N'y a-t-il pas des classes dans lesquelles on a pratiquement abandonné cet objectif ? La situation va-t-elle changer, du moins dans les textes officiels ? La réponse conditionne en partie la réponse à la suivante : " à quels élèves ?".

Mon expérience personnelle m'amène à faire quelques constatations, qui n'ont pas la prétention d'être des analyses générales mais qu'on peut du moins considérer comme des "théorèmes d'existence " :

Tout d'abord quelques situations dans lesquelles la place de la démonstration n'est sûrement pas satisfaisante :

- Il y a une population, sans doute variable suivant les lycées, pour laquelle l'idée de démonstration n'a pas grand sens ; les maths étant plutôt associées à des calculs, des outils, des méthodes éventuellement (dans un sens qui n'est pas forcément le meilleur) et surtout des **résultats** : en somme **"une discipline de service"** dans laquelle il n'y a guère de place pour la démonstration,
- Pour d'autres élèves, y compris parmi ceux qui sont réputés "bons", la démonstration est un jeu uniquement formel qu'on mobilise seulement pour montrer qu'on en a la maîtrise (je pense par exemple à la façon dont on arrive à obtenir une écriture correcte de démonstrations par récurrence de la part de certains élèves de Terminale S sans pour autant que cela ait vraiment un statut de preuve pour eux). Il s'agit alors d'une pratique purement scolaire qui sert à avoir une note correcte en math ou qui, au contraire, vous fait échouer .
- Sans doute parce que l'apprentissage y est lié, elle est le plus souvent fortement associée à la géométrie et même parfois considérée comme une démarche propre à la géométrie justement, ce qui donc correspond à une idée de la démonstration restreinte à la démarche déductive .

Qu'est-ce-qui est à l'origine de ces situations , celles-ci et d'autres qui sont encore plus manifestement des échecs ? Là encore sans prétendre ni être très sûre de moi, ni être exhaustive, je vais apporter quelques impressions de professeurs :

- Nous savons bien que ce qui se passe en classe est fortement conditionné par les examens ou la demande des classes suivantes, de toute façon par l'évaluation : or, est-on en mesure d'évaluer cette capacité avec les formes d'évaluation dont nous disposons (je pense là au découpage des problèmes en tranches de plus en plus fines sur des questions complètement fermées) ?
- D'ailleurs qu'enseignons-nous exactement sous le nom de démonstration ? Est-ce que cela ne varie pas d'un prof à l'autre, du collège au lycée et au supérieur ? Ne mélangeons-nous pas parfois le fond et la forme, démonstration et rédaction au risque de faire confondre les deux par les élèves et rejeter le tout comme des "maniaqueries" de prof de math ?
- Si nous avons parfois une certaine nostalgie d'une époque où les démonstrations de nos élèves étaient extrêmement formalisées et codifiées, n'est-ce pas un peu, parce qu'ainsi, leur correction était simple : nous voyions tout de suite les erreurs et pouvions dire en étant sûrs de nous si elles étaient correctes ou non, ce qui n'est pas toujours le cas lorsque la forme

est très libre.

- Enfin, il se peut que paradoxalement le travail important fait sur le plan de l'heuristique ait des conséquences négatives sur le plan de la démonstration.

L'essentiel est de trouver, même à peu près (Cf."raisonnement plausible" - Polya -), et la démonstration paraît bien moins motivante.

- Il y a souvent confusion entre démonstration et argumentation, ce qui conduit à des devoirs dans lesquels on trouve une accumulation de données sans liens logiques, données qui recouvrent une partie des hypothèses nécessaires dans la démonstration visée mais qui ne sont souvent pas suffisantes ni d'ailleurs forcément toutes nécessaires. Il se peut que cela ait un rapport avec le travail fait en Français, sur les textes argumentatifs justement,et. probablement aussi ailleurs .

Nous devons donc, il me semble, être amenés à nous interroger sur la **spécificité** de la démonstration mathématique et donc finalement à revenir à la question du "pourquoi".

Si la démonstration est un outil interne aux maths est-il bien raisonnable de l'imposer à tous ?

Sinon, qu'espère-t-on enseigner à travers elle ? Vise-t-on un transfert de cette capacité vers un terrain plus général ? Dans ce cas, la difficulté du transfert de la géométrie vers d'autres domaines des maths, laisse à penser qu'il y a alors un gros travail à faire, et on peut même se demander si c'est possible. Enfin, dans le cas; où la réponse serait oui, il faut sans doute se demander si c'est utile et souhaitable, en apportant d'autres arguments que notre propre conviction, notre goût ou les banalités habituelles sur la rigueur ou la précision qu'on peut, sans doute, développer de bien d'autres façons.

Sommes-nous capables à l'aide des capacités démonstration que nous avons, nous, acquises en faisant des maths, de conclure (favorablement) ?

Intervention de
Jean HOUDEBINE

Pourquoi cette question vient-elle à l'ordre du jour aujourd'hui, alors que l'on a enseigné la démonstration sans problème pendant des années ? C'est sans doute que les résultats obtenus concrètement avec les élèves ne correspondent pas aux espérances.

De mauvais arguments pour la défendre

On ne peut s'en étonner quand on examine les objectifs d'apprentissage proposés le plus souvent comme arguments en faveur de l'enseignement de la démonstration.

Apprendre à raisonner

On dit souvent, comme premier argument, que c'est le meilleur moyen d'*apprendre à raisonner en mathématiques*. En fait il n'est pas aussi clair qu'il y paraît que la démonstration soit le meilleur support du raisonnement mathématique au collège. On le constate tous les jours en écoutant les élèves, mais aussi parfois les enseignants, échanger des arguments ou des explications au cours de la résolution de problèmes de géométrie : cela ne ressemble pas forcément à des démonstrations. On a dit aussi que le latin est excellent pour l'apprentissage du raisonnement ; pourquoi alors n'est-il pas resté obligatoire ? En quoi la démonstration est-elle supérieure au latin ? Plus généralement tout texte structuré est utile pour le raisonnement et en particulier l'argumentation. Qu'apporte de plus la démonstration ?

Apprendre la rigueur

«Écrire des démonstrations est un très bon moyen d'apprendre la rigueur» est souvent le deuxième argument. Rien n'est moins certain. Nous avons tous rencontré beaucoup de mathématiciens dont on ne pouvait mettre en doute la capacité de faire des démonstrations et qui tenaient sur certains sujets des propos bien peu cohérents voire contradictoires. On trouve dans des disciplines comme la psychologie un souci de rigueur bien plus grand qu'en mathématiques ; il faut dire qu'il est beaucoup plus facile de s'y tromper.

De bonnes raisons ?

Mais alors y a-t-il de bonnes raisons d'enseigner la démonstration ? Pour ma part il y en a trois qui me paraissent décisives :

En sciences, l'écriture est essentielle

On ne peut pas faire de mathématiques ou plus généralement de sciences sans écrire. Aucune démarche intellectuelle, en effet, ne peut se passer de langage.

Valéry disait de ceux qui n'écrivent pas : *«toute leur vie n'est faite que de commencements»*. On ne peut dépasser l'expérience vulgaire sans un langage adapté.

C'est bien parce que le langage joue un rôle essentiel dans la construction des connaissances que beaucoup de disciplines se créent un langage spécifique. Il semble que ces évidences sont trop souvent oubliées.

Cela est plus vrai aujourd'hui que jamais, dans notre civilisation dont la communication est devenue une composante essentielle : rien ne se fait sans lecture et écriture.

Lire et écrire, un point d'appui essentiel

Plus concrètement, combien d'élèves ou d'étudiants sont persuadés d'avoir résolu un problème sans avoir rien écrit et sont surpris, quand on exige d'eux d'expliquer leur solution ou au moins d'expliciter leurs intuitions, d'être incapables de le faire. Ils s'aperçoivent alors que ce qu'ils ont pensé n'est peut-être pas aussi clair qu'ils le croyaient. Il faut donc faire "écrire" des mathématiques aux élèves tout au long de leur scolarité.

Il me semble important de dire, en opposition avec les slogans trop souvent répétés, que lire et écrire est sans doute la connaissance la plus solide des élèves en difficulté. On constate par exemple que beaucoup d'élèves ne sont pas rebutés par un texte long, et qu'ils savent le lire et le relire, pourvu que la tâche proposée les passionne.

On voit aussi que les élèves les plus en difficulté, à qui l'on propose des explications, choisissent sans hésitation le texte plutôt que le schéma. La lecture et l'écriture sont donc un point d'appui essentiel pour les aider.

La structure d'une démonstration est simple

Parmi les textes scientifiques, la démonstration est sans doute celui dont la structure est la plus facile à appréhender. Il est en effet construit sur des règles peu nombreuses et relativement simples. Il est assez facile de reconnaître sa spécificité.

Changer l'enseignement

Ces réflexions ont, me semble-t-il, des conséquences importantes sur la manière de concevoir l'enseignement de la démonstration.

Faire lire et écrire d'autres types de textes

Il est d'abord indispensable de savoir que la démonstration n'est pas le seul texte que l'on puisse écrire en mathématiques. On peut aussi énoncer des conjectures, faire un compte rendu de sa recherche, expliciter une méthode, faire des commentaires heuristiques... Pourquoi ne fait-on pas écrire et lire tous ces textes aux élèves ? La place de la démonstration n'en serait que plus claire. On peut regretter, à ce sujet, que les livres scolaires contiennent peu de textes mathématiques en dehors des énoncés de problèmes.

Montrer les spécificités de chaque texte

Il est nécessaire de donner les moyens aux élèves de se repérer dans tous ces textes. A ce propos, je voudrais insister sur deux points essentiels :

- Tous les textes mathématiques dont le but est de valider une affirmation n'ont pas la même structure même si beaucoup emploient le mot "démonstration" pour désigner ces textes. Par exemple les démonstrations habituelles de géométrie ne sont pas de même nature que les rédactions basées sur des méthodes comme la résolution d'une équation ou l'étude des variations d'une fonction.
- Il ne faut pas confondre démonstration et argumentation. Les deux sont utiles en mathématiques mais ne jouent pas du tout le même rôle.

Faire écrire aux élèves des textes utiles

Il est toujours difficile de convaincre les élèves de l'utilité d'une forme nouvelle de texte. Bien peu d'élèves ressentent en quatrième l'utilité des démonstrations. En revanche il est plus facile de les convaincre de la nécessité d'écrire des mathématiques et de se mettre d'accord sur le sens de ce que l'on a écrit. La démonstration apparaît alors comme l'une des manières possibles de s'exprimer. C'est sans doute en seconde que les élèves peuvent s'apercevoir de son efficacité pour clarifier certains problèmes de géométrie.

Donner la liberté

Apprendre à écrire un texte c'est en maîtriser toutes les contraintes mais aussi toutes les libertés. N'imposons pas à nos élèves des règles superfétatoires qui donnent à nos démonstrations un aspect stéréotypé. C'est à ce prix que la démonstration peut devenir un véritable outil de communication et de construction de connaissances pour les élèves.

Contribution de **Raymond Duval** IREM de Strasbourg

La réponse à cette question dépend de celle que l'on donne à trois autres questions.

1 - Qu'entend-on par démonstration ?

Cette question peut suffire à disqualifier, aux yeux d'un mathématicien, celui qui la pose. Pourtant, à lire nombre de papiers sur la démonstration et à entendre les enseignants de mathématiques, elle est loin de donner lieu à des réponses unanimes. Les discours tenus ont cependant un point commun : il y a démonstration et démonstration. Il y a la démonstration abâtardie, caricature et trahison de l'activité mathématique : ce serait celle qui poserait des exigences formelles d'une façon inconditionnelle. Et il y a la démonstration véritable et noble : ce serait celle qui permettrait d'avoir une pleine conscience de la façon dont on produit une connaissance mathématique. Belle opposition sur le papier! Je me garderai bien de prendre parti, sinon à remarquer que le mot «démonstration» est un mot dont l'emploi est plus chaud, plus sensible, que l'emploi des mots «explication», «argumentation», «construction», ... Qu'évoque-t-il donc de particulier et de vital pour qu'à son propos on argumente jusqu'à oublier parfois la «rationalité» ? Et pourquoi, en même temps, ne veut-on pas séparer la démonstration de l'argumentation ou de la construction d'objets ?

2-Quelle doit être la place, des mathématiques dans l'enseignement dispensé jusqu'à 16 ans ?

Il y a la place réelle, trois heures par semaine, ou à peine plus, et le fait qu'il s'agisse d'une discipline parmi huit ou neuf autres. Et il y a la place imaginaire, cette place n'ayant pas la même valeur au regard de ceux pour qui l'activité mathématique correspond à un statut professionnel et aux yeux du reste de la population qui a d'autres intérêts, y compris intellectuels ou scientifiques, que celui des objets mathématiques. Vu les débats actuels sur l'enseignement et sa rénovation, cette question n'est plus seulement une question rhétorique.

3-Qu'apportent les mathématiques à la formation de base ?

On répond souvent à cette question en citant des connaissances ou des «outils»mathématiques qui seraient indispensables soit au titre de la vie quotidienne soit au titre de citoyen. Naturellement à aucun de ces deux titres la démonstration n'est mise en avant. Et cela pour une raison simple, c'est que la démonstration ne sert pas véritablement en dehors des mathématiques. Car lorsqu'il s'agit de convaincre, l'argumentation avec ses complexités, dialectique et rhétorique, s'avère plus pertinente que l'usage de la démonstration, et son apprentissage relève au moins tout autant de l'enseignement du français.

En réalité, pour pouvoir donner à cette troisième question une réponse qui ait un sens au-delà du cercle des mathématiciens, il faut changer de point de vue. Il ne faut plus seulement regarder les «objets» et les «outils» mathématiques pour eux-mêmes, comme s'ils étaient une fin en soi, mais il faut les examiner en fonction des démarches cognitives et intellectuelles que leur «découverte», que leur «construction» ou que leur «utilisation» exigent et développent. Parmi toutes ces démarches, il y en a une variété très riche que l'on désigne sous le terme générique de «raisonnement». On fait appel au raisonnement dans de multiples situations : débat, résolution de problèmes, organisation théorique d'un ensemble de connaissances, explorations pour voir là «où il n'est pas facile de deviner les résultats ou de les voir sur une figure», mathématisation,...Et dans chacune de ces situations, le raisonnement est censé accomplir une fonction différente : convaincre, prouver, construire, voir, interpréter... Mais se soucie-t-on du fait que dans ces différentes situations, ce qu'on appelle «raisonnement» correspond à des démarches cognitives très différentes ? D'une situation à l'autre, le fonctionnement du discours, le recours à des systèmes symboliques de représentation, la façon d'utiliser des figures peuvent changer du tout au tout, bien que, dans la communication codifiée que l'on en fait, tout cela se trouve généralement réduit ou masqué. Apprendre à différencier les différentes démarches de raisonnement et se les approprier implique donc une prise de conscience des fonctionnements cognitifs différents qui sont mobilisés dans des activités mathématiques que l'on croit homogènes. Cela exige un travail sérieux sur la langue, sur les figures et sur tous les autres registres de représentation utilisés. C'est la condition incontournable pour que la résolution de problèmes ou la construction d'objets puisse développer des compétences de raisonnement et d'analyse par delà le champ très particulier de connaissances mathématiques chaque fois mis en avant. Ces compétences sont non seulement nécessaires pour progresser en mathématiques mais également précieuses pour l'apprentissage dans les autres disciplines, y compris en français.

Naturellement, on peut toujours supposer que raisonner est une démarche aussi simple, aussi naturelle et réflexe que marcher ou courir quelles que soient les situations, et qu'alors il suffit de proposer de «bons» problèmes on des situations «riches» appelant tout à la fois explication, compréhension, preuve, ... pour que les élèves raisonnent et raisonnent bien. Je respecte beaucoup cette conviction de professionnel selon laquelle tout individu est prêt à penser, à s' exprimer, à chercher, à travailler comme le fait un mathématicien quand il fait des mathématiques. Elle me flatte moi qui ne suis pas mathématicien. Mais j'en conclus que tout le travail de différenciation et d'appropriation des différentes démarches de raisonnement, la maîtrise des fonctionnements des discours explicatifs, argumentatifs, démonstratifs, et leur coordination avec d'autres registres de représentation doivent se faire en dehors des mathématiques. Pourquoi pas, après tout ? Mais alors quelle réponse donner non seulement à cette troisième question mais également à la deuxième ?

Qu'on se comprenne bien. Il ne s'agit pas de reléguer l'activité proprement mathématique au second plan dans l'enseignement des mathématiques. Mais cet enseignement ne pourra atteindre son objectif idéal auprès du plus grand nombre et fournir également des réponses crédibles à la troisième question, si le point de vue mathématique n'est pas «réfléchi» dans cet autre point de vue que j'évoquais plus haut.